



UNIVERSIDAD A DISTANCIA DE MADRID
(UDIMA)

*Facultad de Ciencias de la Salud y de la Educación
Departamento de Educación*

*Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria, Bachillerato,
Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.*

***ENSEÑANZA DE LAS CURVAS CÓNICAS EN LA ETAPA DE
BACHILLERATO BASADA EN LA METODOLOGÍA
DEL APRENDIZAJE INVERTIDO***

David Guillén Fernández

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Bajo la dirección de:

Carlos Mayo del Río

CÁDIZ

Enero, 2024

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	1
1 INTRODUCCIÓN	2
2 JUSTIFICACIÓN	4
3 OBJETIVOS	7
4 MARCO TEÓRICO	8
4.1 Modelo de Razonamiento de Van Hiele.....	8
4.1.1 Hipótesis del Modelo de Van Hiele.....	8
4.1.2 Los niveles de Razonamiento de Van Hiele	9
4.1.3 Principales características de los niveles de Van Hiele	12
4.1.4 Las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele.....	13
4.2 Errores, Obstáculos y Dificultades en el Aprendizaje de la Geometría	15
4.2.1 Errores Debidos a Metodologías o Costumbres de Enseñanza de la Geometría	15
4.2.2 Dificultades Propias del Campo de la Geometría.....	18
4.3 Flipped Learning o Aprendizaje Invertido	20
4.3.1 ¿Qué es el Flipped Learning o Aprendizaje Invertido?	20
4.3.2 La Taxonomía de Bloom Revisada	20
4.3.3 Roles del Profesor y el Modelo TPACK	21
4.3.4 Roles de los Estudiantes	22
4.3.5 Ventajas de la Utilización del Flipped Learning	23
4.4 Aprendizaje Cooperativo (CA/AC).....	24
4.5 Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).....	26
5 PROYECTO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE SOBRE CURVAS CÓNICAS	27
5.1 Contextualización	27
5.2 Concreción Curricular	31
5.2.1 Saberes Básicos	31
5.2.2 Competencias Específicas y Descriptores Operativos.....	33
5.2.3 Criterios de Evaluación	34
5.3 Objetivos Didácticos de la Situación de Aprendizaje	35
5.4 Atención a la Diversidad	36
5.5 Metodología.....	38
5.6 Secuencia, Actividades, Agrupamientos y Recursos	38
5.6.1 Fase 1. Indagación.....	38
5.6.2 Fase 2. Orientación dirigida	41
5.6.3 Fase 4. Orientación libre.....	49
5.6.4 Fase 5. Integración	52
5.7 Evaluación	54
5.7.1 Evaluación del Alumnado	55
5.7.2 Evaluación del Proceso de Enseñanza y la Práctica Docente.....	57
6 CONCLUSIONES Y VALORACIÓN CRÍTICA	58
7 REFERENCIAS	61
8 ANEXOS	64

ANEXO I Lista De Comprobación del DUA (CAST, 2018).....	64
ANEXO II Presentación de la Unidad Didáctica	66
ANEXO III Cuestionario Conocimientos Previos y Razonamiento de Van Hiele	67
ANEXO IV Actividades de las Fases de Indagación y Orientación Dirigida	70
Actividad 1. Construcción de Secciones Cónicas.....	70
Actividad 2. Dibujar las Curvas Cónicas con Regla y Compás.....	76
Actividad 3. Ejercicios Sobre las Circunferencias.....	82
Actividad 4. Ejercicios Sobre las Elipses.....	82
Actividad 5. Excentricidad y Relaciones Entre los Parámetros a, b y c de la Elipse	83
Actividad 6. Ejercicios Sobre las Hipérbolas.....	85
Actividad 7. Excentricidad y Asíntotas de Hipérbolas con GeoGebra I.....	86
Actividad 8. Excentricidad y Asíntotas de Hipérbolas con GeoGebra II.....	88
Actividad 9. Ejercicios Sobre las Parábolas.....	88
Actividad 10. Ecuación Cuadrática de la Parábola. GeoGebra.....	89
Actividad 11. Experimentar con el Parámetro p de la Parábola. GeoGebra	91
Actividad 12. Parábola Horizontal no centrada. GeoGebra.....	92
Actividad 13. Ejercicios Sobre Cónicas Generales.....	93
Actividad 14. Ecuación General de las Curvas Cónicas. GeoGebra.....	94
Actividad 15. Curvas Cónicas Inclinadas. GeoGebra.....	95
ANEXO V Vídeos instruccionales y Cuestionarios de Comprobación	98
Vídeo: Lugares Geométricos y Curvas Planas.....	98
Vídeo: La Circunferencia.....	98
Vídeo: La Elipse	100
Vídeo: La Hipérbola	102
Vídeo: La Parábola	104
Vídeo: Cónicas Generales.....	106
Vídeo: Historia y Aplicaciones de las Secciones Cónicas.....	107
Vídeos: El fenómeno de la Reflexión y las Curvas Cónicas.....	109
Vídeo: Las Leyes de Kepler.....	111
ANEXO VI Problemas Contextualizados	113
Actividad 16. Problema Contextualizado Sobre Aplicaciones de las Cónicas	113
Actividad 17. Problemas Contextualizado Sobre el Fenómeno de la Reflexión	115
Actividad 18. Problema Contextualizado Sobre las Leyes de Kepler.....	116
ANEXO VII Actividad 19. Investigación: Curvas Cónicas en Nuestra Provincia	118
ANEXO VIII Actividad 21. Evaluación Final Curvas Cónicas	119
ANEXO IX Instrumentos para la Evaluación del Alumnado.....	121
Diana de Evaluación para Cuestionarios de los Vídeos Instruccionales.....	121
Rúbrica Actividad 2. Gráfica de Curvas Cónicas.	122
Rúbrica Actividades 3, 4, 6, 9 y 13. Ejercicios Sobre Curvas Cónicas.....	123
Rúbrica Actividades 5, 7, 8, 10, 11, 12, 14, y 15. Investigar con GeoGebra.....	123
Rúbrica Actividades 16, 17, 18 y 19. Problemas Contextualizados e Investigación.	124
Rúbrica Actividad 21. Evaluación Final: Curvas Cónicas.....	125
Escala de Observación Evaluación de las Actividades con Estructuras Cooperativas.	127
Escala de Observación para la Evaluación de las Presentaciones Orales.	128
ANEXO X Instrumentos para la Evaluación de la Práctica docente.....	129
Cuestionario de Evaluación de la Práctica Docente para el Alumnado.	129
Dianas de Evaluación de la Práctica Docente para el Alumnado.	130
Cuestionario de la Propia Práctica Docente para el Profesor.....	132

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Subescalas de contenido PISA 2022	6
Tabla 2. Niveles del modelo de Van Hiele	12
Tabla 3. Roles de los estudiantes según las respuestas dadas al formulario	23
Tabla 4. Tabla criterios de evaluación, Competencias Específicas y Saberes Básicos.....	34
Tabla 5. Síntesis del modelo DUA: principios y pautas	36
Tabla 6. Tabla de actividades de la fase de Indagación	39
Tabla 7. Tabla de actividades de la fase de Orientación Guiada.....	42
Tabla 8. Tabla de actividades de la fase de Orientación Libre.. ..	50
Tabla 9. Tabla de actividades de la fase V. Integración.....	53
Tabla 10. Procedimientos, instrumentos y agente evaluador.	56
Tabla 11. Criterios de evaluación por actividad.....	57
Tabla 12. Lista comprobación del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA).	64
Tabla 13. Excentricidad de las órbitas de algunos planetas del sistema solar.	112
Tabla 14. Diana de evaluación para la evaluación de los cuestionarios de vídeos.	121
Tabla 15. Rúbrica para la evaluación de la actividad 2. Dibujar Curvas Cónicas.	122
Tabla 16. Rúbrica para la evaluación de los ejercicios sobre curvas cónicas.	123
Tabla 17. Rúbrica para la evaluación de las construcciones con GeoGebra.....	123
Tabla 18. Rúbrica evaluación del trabajo de investigación: curvas cónicas en tu provincia.	124
Tabla 19. Rúbrica para la evaluación de la evaluación final: curvas cónicas.	125
Tabla 20. Escala de observación actividades con estructuras cooperativas.	127
Tabla 21. Escala de observación para la evaluación de las presentaciones orales.	128
Tabla 22. Cuestionario de evaluación de la práctica docente para el alumnado.....	129
Tabla 23. Cuestionario de la propia práctica docente para el profesor.	132

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Subescalas de contenido PISA 2022	6
Ilustración 2. Ejemplo de simbología visual	16
Ilustración 3. Ejemplos de distractores de orientación.....	17
Ilustración 4. Ejemplo de distractores de estructuración.....	17
Ilustración 5. La taxonomía de Bloom (derecha) y distribución flipped learning (izquierda). 21	
Ilustración 6. Los roles del profesor y el modelo TPACK.....	22
Ilustración 7. Áreas de intervención para implementar el aprendizaje cooperativo en el aula.25	
Ilustración 8. La pirámide del aprendizaje	26
Ilustración 9. Mapa conceptual sobre el DUA	37
Ilustración 10 Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.....	38
Ilustración 11. Situación de aprendizaje: Curvas para encestar un triple o usar tu móvil	39
Ilustración 12. Construcción de curvas cónicas con cartulina	41
Ilustración 13. Imagen del vídeo de lugar geométrico, la circunferencia.	43
Ilustración 14. Imagen vídeo lugar geométrico, pregunta sobre la elipse.....	44
Ilustración 15. Dibujos de cónicas con regla y compás. GeoGebra.	45
Ilustración 16. Excentricidad de la elipse con GeoGebra.	46
Ilustración 17. Excentricidad y Asíntotas de hipérbolas con GeoGebra.....	47
Ilustración 18. Ecuación cuadrática de la parábola con GeoGebra.....	47
Ilustración 19. Parábola no centrada en el origen con GeoGebra.	48
Ilustración 20. Curvas cónicas con la ecuación general. GeoGebra.	49
Ilustración 22. Ejemplo de diana de evaluación habilidades del profesor.	58
Ilustración 22. Presentación de la unidad, objetivos, conocimientos previos y evaluación....	66
Ilustración 23. Plantilla 2 secciones cónicas con cartulina	71
Ilustración 24. Plantilla 1 secciones cónicas con cartulina	71
Ilustración 25. Construcción de secciones cónicas con cartulina.....	71
Ilustración 26. Secciones cónicas con plastilina.	72
Ilustración 27. Secciones cónicas con Zanahoria.....	73
Ilustración 28. Secciones Cónicas con GeoGebra.....	74
Ilustración 29. Cono de Apolonio de madera.....	75
Ilustración 30. Cono de Apolonio impreso en 3D.....	75
Ilustración 31. Dibujos de cónicas con regla y compás. GeoGebra.	76
Ilustración 32. Comandos de GeoGebra para dibujar con regla y compás	77
Ilustración 33. Dibujo de elipse con regla y compás. GeoGebra.	78
Ilustración 34. Elipse por el método del jardinero.	78

Ilustración 35. Dibujo de la parábola con regla y compás. GeoGebra.....	80
Ilustración 36. Dibujo de la hipérbola con regla y compás. GeoGebra.	81
Ilustración 37. Excentricidad y parámetros a , b y c de una elipse. GeoGebra.	85
Ilustración 38. Excentricidad y asíntotas de hipérbola. GeoGebra.	87
Ilustración 39. Ecuación cuadrática de la parábola y sus factores A , B y C . GeoGebra.....	90
Ilustración 40. Experimentar con el parámetro p de la parábola. GeoGebra.	92
Ilustración 41. Ecuación cuadrática de la parábola y sus factores A , B y C . GeoGebra.....	95
Ilustración 42. Curvas cónicas inclinadas y su ecuación general. GeoGebra.	96
Ilustración 43. Elementos de la Circunferencia. Cuestionario.	98
Ilustración 44. Elementos de una elipse. Cuestionario.....	100
Ilustración 45. Elementos de una hipérbola. Cuestionario.....	102
Ilustración 46. Elementos de una parábola. Cuestionario.	104
Ilustración 47. Mapa de Cádiz en Google Maps.	113
Ilustración 48. Torres de electricidad de la Bahía de Cádiz.	114
Ilustración 49. Salón Nacional de las Estatuas del Capitolio en Washington D.C.	115
Ilustración 50. El sistema solar.	117
Ilustración 51 Medidas de una pista oficial de baloncesto.....	120
Ilustración 52. Ejemplo diana de evaluación de los cuestionarios de vídeos instruccionales	122
Ilustración 53. Diana de evaluación de las habilidades del docente.	130
Ilustración 54. Diana de evaluación de la motivación del alumnado.....	131
Ilustración 55. Diana de evaluación metodología y evaluación.....	131

RESUMEN

En el presente trabajo se ha desarrollado una unidad didáctica dedicada a la enseñanza de las curvas cónicas, para un nivel de primero de bachillerato, dentro de la asignatura de matemáticas I. Para su ejecución se ha tenido en cuenta la legislación actual en educación, principalmente lo recogido en la LOMLOE (2022) y en la Orden de 30 de mayo (2023) de la Junta de Andalucía. La metodología seguida es la conocida como aprendizaje invertido, que a su vez nos ha servido de puente para el desarrollo de otras metodologías activas, como el trabajo cooperativo o colaborativo en el aula y la resolución de problemas contextualizados, realistas y significativos para el alumnado. Además, se han integrado las tecnologías de la información y comunicación, en adelante TIC, como recurso fundamental para poder llevar a cabo todo el proceso de aprendizaje y enseñanza, aunque, sin olvidar el resto de los recursos físicos, la historia de las matemáticas o el propio entorno.

Para el diseño de esta innovación se han tenido en cuenta principalmente: las dificultades que los estudiantes se encuentran en el aprendizaje de la geometría; los niveles de razonamientos por los que pasa el alumnado según el modelo de Van Hiele, que nos ayuda a comprender algunas de esas dificultades y nos propone seguir un modelo de organización didáctica (o fases de aprendizaje) para poder conseguir pasar de un nivel a otro de razonamiento superior (Corberán et al., 2014); y por último, se ha utilizado la taxonomía de Bloom revisada para decidir qué actividades se realizan en el espacio grupal y las que el alumnado debe realizar de manera individual, en función de la complejidad de las diferentes tareas (Santiago y Bergmann, 2018).

Palabras clave: flipped classroom, flipped learning, curvas cónicas, geometría analítica, software de geometría dinámica, Van Hiele.

1 INTRODUCCIÓN

Casi al terminar el primer cuarto del siglo XXI, la mayoría de los agentes implicados en el sistema educativo, están convencidos de que el proceso de aprendizaje y enseñanza en las aulas no puede mantenerse igual que a principios del siglo pasado. Las distintas ramas de la educación, como la sociología, la psicología y la didáctica, entre otras, nos señalan la necesidad de adaptarnos a la sociedad actual, que podemos denominar como “sociedad del conocimiento” o “sociedad de la información” (Fernández, 2003).

Las ciencias de la educación consideran al constructivismo como la corriente dominante desde la segunda mitad del siglo XX y, aunque esta corriente es muy amplia, todos coinciden en, por un lado, la necesidad del papel activo del alumnado para su aprendizaje significativo, y por otro, que el profesorado no es ya la única fuente posible de conocimiento (Arce et al., 2019). Esto nos lleva a la necesidad de un cambio en todo el sistema educativo y, especialmente, en los roles que deben adoptar los estudiantes y los docentes. Pero, además, esto debería ser extensible a todos los agentes del sistema educativo.

Por otro lado, y acentuando lo dicho en los párrafos anteriores, la propia legislación en educación va imponiendo el desarrollo de estas nuevas metodologías activas, para que incorporen actividades significativas y relevantes para el alumnado, para que se utilicen técnicas de aprendizaje cooperativo y/o colaborativo, para que el proceso de enseñanza y aprendizaje favorezca la reflexión y la responsabilidad de los estudiantes y se tenga en cuenta la atención a la diversidad en el aula (Orden de 30 de Mayo, 2023).

En el presente trabajo de fin de máster, en adelante TFM, se desarrolla un proyecto de innovación para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las curvas cónicas. El contenido didáctico está diseñado para el alumnado de 1º de bachillerato de ciencias y tecnología, en la asignatura de matemáticas I. La metodología seguida para tal fin es la conocida como aprendizaje invertido o flipped learning¹, que se utilizará junto con otras metodologías activas y la incorporación de las TIC. Todo ello para adaptar la educación a la actualidad y a los nuevos retos de estudiantes y docentes.

¹ Durante todo el trabajo se irá nombrando esta metodología como aprendizaje invertido o flipped learning y aula invertida o flipped classroom, sin hacer ninguna distinción entre estos términos.

En el desarrollo de las distintas sesiones didácticas que se proponen, se intenta dar una continuidad entre la geometría sintética y la analítica para evitar que exista una ruptura entre ambas. Para ello se ha utilizado la propia historia de las matemáticas y el concepto de lugar geométrico, como mediadora entre ambas (Gaita, 2014; Gascón, 2002).

Por otro lado, y siguiendo los consejos de Calvo et al. (2016), se conectará la geometría con otros bloques del currículum de matemáticas para mejorar su comprensión, principalmente en el álgebra y el estudio de funciones. También, se aprovechará la resolución de problemas contextualizados para enlazar con otras disciplinas como la arquitectura o el arte, otras materias científicas y aplicaciones de la ingeniería.

Para conseguir estos objetivos, se utilizarán recursos digitales, como software de geometría dinámica, en adelante SGD, o programas de diseño en tres dimensiones; recursos físicos, tales como materiales manipulativos o el propio libro de texto; y otros recursos de tipo transversal, como la historia de la geometría y la evolución de las matemáticas, la arquitectura y el arte o las distintas aplicaciones en las ciencias o la ingeniería.

A lo largo del trabajo se justificará la elección de la metodología elegida como una de las más idóneas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, concretamente de la geometría. Seguidamente, se expondrán los objetivos que se pretende conseguir con la realización de este trabajo.

En el apartado del marco teórico, se desarrollará el modelo de razonamiento de Van Hiele, sus niveles y fases de aprendizaje. Después, se analizarán las dificultades que tiene el alumnado para el aprendizaje de la geometría. Y, para finalizar este apartado, se analizarán los fundamentos didácticos del aprendizaje invertido junto al aprendizaje cooperativo y el aprendizaje basado en problemas.

Tras la exposición teórica anterior, nos centraremos en el propósito del trabajo, que es el diseño de la unidad didáctica o, situación de aprendizaje según la LOMLOE (2020), sobre las curvas cónicas. Como introducción, se expondrá el contexto donde se realizará el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Antes de desarrollar las sesiones y actividades, se realizará una concreción curricular según la legislación vigente en educación en Andalucía; se expondrán las metodologías y las medidas a realizar para atender a la diversidad del aula; y se especificarán la secuencia, los agrupamientos y los recursos necesarios.

Por último, dentro del apartado del desarrollo de la unidad didáctica, se describirá como se realizará la evaluación tanto de los estudiantes como de la propia situación de aprendizaje. En este apartado se tendrán en cuenta tanto las metodologías activas utilizadas, como las exigencias normativas, que nos indican que “la evaluación del alumnado será global, continua y formativa, y tendrá en cuenta el grado de desarrollo de las competencias clave y su progreso en el conjunto de los procesos de aprendizaje” (LOMLOE, 2020). Para ello, se especificarán los procedimientos que se utilizarán en cada actividad, así como los instrumentos de evaluación para llevarlos a cabo.

El TFM finaliza con las conclusiones y una valoración crítica de todo lo expuesto en él, observando las limitaciones y fortalezas de este, así como las posibles líneas de futuros trabajos que puedan completar el proyecto de innovación desarrollado aquí. También, se incluirá el listado de referencias utilizadas en el texto y los anexos a los que se van haciendo referencia en el cuerpo del trabajo.

2 JUSTIFICACIÓN

A continuación, se expondrán los motivos fundamentales por los que se ha realizado este TFM. En un primer lugar, porque la geometría es una de las ramas donde más dificultades encuentran los alumnos, en parte, debido al modelo tradicional de enseñanza (Arece et al., 2019). En segundo lugar, por la importancia de las matemáticas, y dentro de esta, de la geometría, tanto por ser parte de la cultura de nuestra sociedad, como por su carácter instrumental (Barrantes y Balletbo, 2012). Y, en tercer lugar, por la situación en desventaja, que especialmente la región de Andalucía, se encuentra con respecto al nivel de “competencia global” en matemáticas, como se desprende de la última evaluación realizadas del programa internacional PISA (OCDE, 2023).

Según Barrantes et al. (2013), la enseñanza de la geometría se ha caracterizado por un enfoque deductivo con un abuso de la memorización de conceptos, teoremas y fórmulas, frente a la comprensión de los mismos. Esto ha llevado a la resolución de problemas de forma mecánica y, además, se les ha dado más importancia a los aspectos métricos que al estudio de aspectos y propiedades geométricas. Estos autores también señalan, que esta manera de enseñanza, forma a excelentes calculistas de medidas, capaces de resolver problemas teóricos en el aula, pero incapaces de solventar problemas geométricos elementales de la vida cotidiana.

Otro obstáculo, que de manera habitual existe en el aprendizaje de geometría, viene causado por el uso de los libros de texto y la ausencia de otros recursos. Esto crea esquemas

mentales inadecuados para el fomento de la abstracción y de la agilidad del manejo de ideas y contenidos (Barrantes y Zapata, 2008).

Según Gaita (2014), una de las dificultades que encuentran en los estudiantes de primero de universidad, es que no logran establecer una conexión entre los resultados que obtienen con el álgebra y las que consiguen con la geometría. Esta autora también apunta, que esto se debe a la falta de conexión entre la geometría sintética o pura (sin sistema de referencia y de coordenadas) y la geometría analítica en la educación secundaria y el bachillerato.

Se hace necesario un cambio en la metodología a seguir para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria y bachillerato. En este TFM se analizan las dificultades y obstáculos debidos a la didáctica de la geometría, y se plantean nuevas metodologías activas que buscan un aprendizaje significativo del alumnado.

En segundo lugar, destacaremos la importancia que tiene el estudio de la geometría para el educando, no solo por estar presente en las múltiples facetas de la vida actual, sino, además, por favorecer el desarrollo de otras capacidades como la percepción visual, la expresión verbal, el razonamiento lógico y la aplicación a problemas concretos de otras ramas de las matemáticas y de otras disciplinas (Barrantes y Balletbo, 2012). En este sentido, Calvo et al. (2016) puntualizan las conexiones tan importantes que existen entre la geometría y el álgebra, y recuerda que el álgebra griega era puramente geométrica.

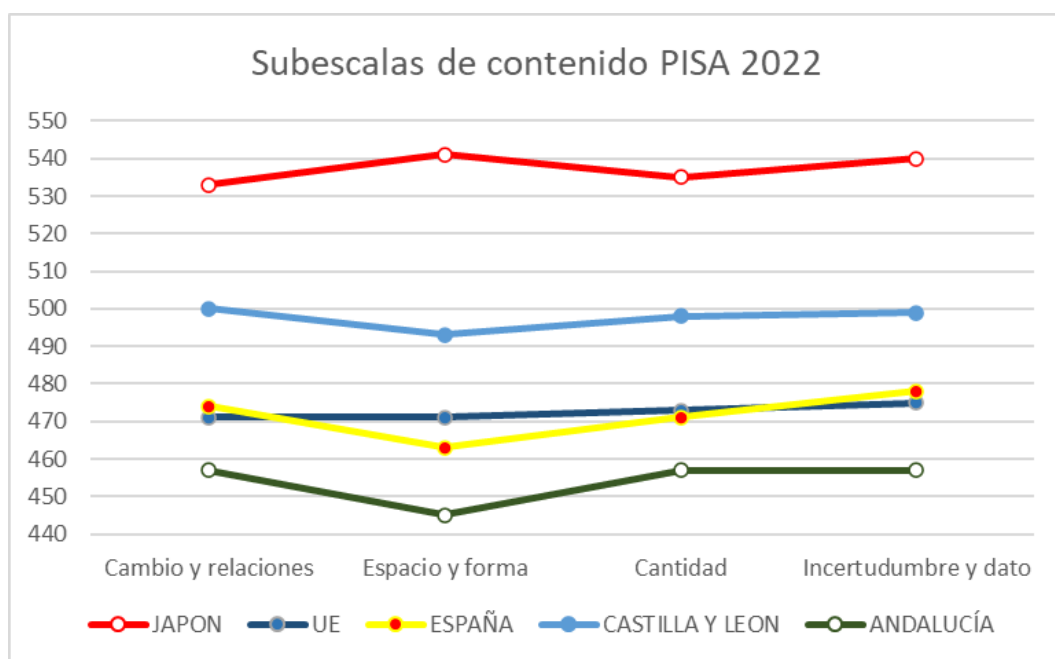
En el día a día de las personas se necesitan habilidades relacionadas con el espacio, por eso, una de las aportaciones más importantes de la geometría es el desarrollo del sentido espacial, también llamado sentido geométrico o visión espacial (Arce et al., 2019).

En el último motivo, nos centraremos en la prueba de evaluación internacional de los estudiantes PISA, entendiéndola como una oportunidad para la mejora del sistema educativo y no como una mera clasificación entre países o comunidades autónomas (Martín, 2020). De las últimas pruebas realizadas (OCDE, 2023), la región de Andalucía, contexto donde se realiza este TFM, es una de las más desfavorecidas en el área de las matemáticas. Esta comunidad autónoma obtiene una puntuación global en matemática de 457 puntos, que está muy por debajo de la primera región española (Castilla y León) y de la media nacional, con 499 y 473 puntos respectivamente. Además, se quiere destacar que, tanto en la región de Andalucía como en la media nacional las puntuaciones en la subescala de contenido de espacio y forma, que está muy relacionada con la geometría de nuestro currículo, es la más baja de todas.

Tabla 1. Subescalas de contenido PISA 2022, basada en OCDE (2023)

País / Región	Comp. Global	Subescalas de Contenido			
	Matemáticas	Cambio y relaciones	Espacio y forma	Cantidad	Incertidumbre y dato
	536	533	541	535	540
	472	470	471	472	474
	474	471	471	473	475
	473	474	463	471	478
	499	500	493	498	499
	457	457	445	457	457

Ilustración 1. Subescalas de contenido PISA 2022, basada en OCDE (2023)



Con la aportación de la unidad didáctica sobre las curvas cónicas de este TFM, se pretende ejemplarizar que hay otras formas de llevar al aula la formación de esta disciplina, que minimicen las dificultades y obstáculos en su aprendizaje, que contribuya al desarrollo de la visualización y la orientación y, donde se aprenda a razonar y solucionar problemas de la vida cotidiana.

Con la metodología empleada de aprendizaje invertido, tal y como la describen Santiago y Bergmann (2018), se realiza una división más lógica de lo que se debe realizar en el aula de manera grupal y lo que deben hacer de manera individual. El espacio grupal se utiliza para el desarrollo de actividades de mayor nivel de complejidad, donde estarán acompañados del

docente. Por otro lado, se trasladan las actividades de menor demanda cognitiva al espacio individual, donde no es tan necesaria la presencia del profesor.

En el aula se desarrollan actividades de manera colaborativa y guiadas por el profesor, utilizando otras metodologías activas, como el aprendizaje cooperativo, la resolución de problemas contextualizados y significativos para los estudiantes, etc. El verdadero reto para el docente está en la elaboración de estas actividades grupales, para poder mantener motivado a su alumnado y posibilitar un aprendizaje significativo y de calidad. Para ello, tendrá que analizar la información recibida en las sesiones individuales, y adaptar las actividades grupales del aula, de tal manera, que consigan mitigar los errores de concepto de los estudiantes. Por otro lado, deberá aprovechar las interacciones que se producen en el aula, ya sean entre los propios alumnos o entre los estudiantes y el profesor, para conseguir situaciones de aprendizaje de calidad y que se adapten a la diversidad del aula.

El principal objetivo del docente debe ser que los estudiantes comprendan los conceptos, investiguen las propiedades geométricas, realicen conjeturas, usen sus conocimientos para resolver problemas reales o realistas, según su nivel, y reflexionen sobre los aprendizajes realizados y su conexión con el resto de la materia, favoreciendo la comprensión global y la organización de lo aprendido (Arce et al., 2019).

3 OBJETIVOS

El objetivo general del trabajo es mejorar el proceso de aprendizaje y enseñanza de la geometría a nivel de primero de bachillerato, desarrollando una situación de aprendizaje sobre curvas cónicas mediante la metodología de aprendizaje invertido.

Además, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- **Profundizar en el estudio de la didáctica** de la enseñanza de la geometría, el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, las dificultades y errores que los alumnos y profesores encuentran, así como sus posibles soluciones.
- **Perfeccionar los conocimientos sobre la metodología del aprendizaje invertido**, junto con otras metodologías activas y el uso de las TIC.
- **Aumentar la motivación** de los estudiantes mediante **propuestas de resolución de problemas** realistas y significativas para ellos.
- **Ampliar las interacciones entre los discentes y el profesor y entre los propios estudiantes** trabajando de manera colaborativa, tanto dentro como fuera del aula.

- **Respetar los distintos ritmos de aprendizaje** y proporcionar distintos medios para mostrar lo aprendido según la diversidad del aula.

4 MARCO TEÓRICO

En este apartado, en un primer lugar, se expondrá el modelo de razonamiento Van Hiele sobre los niveles de razonamiento geométrico y sus fases de aprendizaje. A continuación, se analizarán las dificultades y errores que tanto alumnado como profesores pueden encontrarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Y, para finalizar este apartado, se desarrollarán los fundamentos metodológicos del aprendizaje invertido y las otras metodologías activas que se utilizarán en este TFM.

4.1 Modelo de Razonamiento de Van Hiele

Desde el punto de vista de este TFM, el modelo de Van Hiele aporta dos aspectos importante: uno **descriptivo**, en el que se definen los niveles de pensamiento por los que progresa el razonamiento de los estudiantes, y otro **prescriptivo**, en el que plantea a los docentes unas directrices didácticas o metodológicas, que ayuda al docente a poder plantear unas fases de aprendizaje con el objetivo de favorecer que los alumnos vayan subiendo de nivel de razonamiento (Jaime y Gutiérrez, 1990).

El problema, de estos modelos educativos, es que se basan en la observación de seres humanos y esto conlleva una gran cantidad de factores aleatorios difícilmente controlables (estado de ánimo, cansancio físico o mental, motivación, etc.). Debido a esto, Jaime y Gutiérrez (1990, p. 302), enfatizan que:

..., ningún profesor debería caer en el error de esperar que aplicando fielmente un determinado modelo educativo (el de Van Hiele o cualquier otro) se resolverán todos sus problemas y que todos sus alumnos comprenderán y aprenderán las matemáticas sin esfuerzo. Hay que esperar que, aunque el modelo no produzca resultados perfectos, si da mejores resultados que otras formas de trabajo.

4.1.1 Hipótesis del Modelo de Van Hiele

Corberán et al. (1994) resume las hipótesis de este modelo de razonamiento en las siguientes afirmaciones:

- 1) Es posible encontrar diferentes niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes de Geometría (y, en general, de Matemáticas).
- 2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las Matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.

- 3) Si unos conceptos, relaciones o propiedades no pueden ser expresadas de forma comprensible para el nivel de razonamiento actual de los estudiantes, es necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
- 4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma; sólo se aprende a razonar mediante la propia experiencia. Pero sí se puede ayudar a esa persona, por medio de una enseñanza adecuada de las Matemáticas, a que adquiera lo antes posible la experiencia necesaria para que llegue a razonar de esa manera.

Estas hipótesis señalan la necesidad de conocer en el nivel donde se encuentra cada estudiante para diseñar las actividades apropiadas. Y, por otro lado, que los docentes tienen la necesidad de favorecer el razonamiento y la comprensión del alumnado, frente a la memorización de definiciones o algoritmos. En este mismo sentido, Corberán et al. (1994), señalan que la palabra "enseñar" de la cuarta hipótesis, no hay que confundirla con enseñar una serie de definiciones y propiedades matemáticas de esos conceptos. Sino que, se debe entender, como un aprendizaje donde se crean nuevas estructuras mentales, más complejas que las anteriores, a partir de su experiencia. En otras palabras, más acordes a las ideas constructivistas de enseñanza y aprendizaje.

4.1.2 Los niveles de Razonamiento de Van Hiele

Aunque, actualmente se suelen definir 5 niveles en el modelo, el último de ellos no tiene mucha utilidad práctica. Esto se debe a que, en la educación secundaria e incluso en la superior, los niveles que podemos esperar son hasta el nivel 4. A continuación se resumen las características fundamentales de cada nivel, según Fouz (2005), aunque también se apoyan con ejemplos de Jaime y Gutiérrez (1990) y Corberán et al. (1994).

Nivel 1. Visualización o Reconocimiento.

- 1) Los objetos se perciben de forma global, como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
- 2) La descripción que pueden hacer de los objetos es meramente visual y con un lenguaje natural basándose en la semejanza de elementos familiares de su entorno: "... se parece a ...", "... tiene la forma de ...", "... es como ...", etc. (Corberán et al., 1994). No tienen un lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
- 3) No son capaces aún de reconocer, de forma explícita, los componentes y las propiedades de los objetos geométricos.

Referente a este último punto, cuando se refiere a “de forma explícita”, Jaime y Gutiérrez (1990, p. 308), presenta el siguiente ejemplo:

Si le damos a un niño pequeño que se encuentra en el nivel 1 de Van Hiele un círculo, un triángulo y un cuadrado y le preguntamos en qué se diferencian estas figuras, seguramente su respuesta se referirá a redondez, figuras más o menos puntiagudas, etc., pero no hablará de número de vértices ni de amplitud de ángulos. Es evidente que el niño reconoce los vértices (o su ausencia) como característica diferenciadora entre las figuras, pero no es consciente de ello y, por lo tanto, no los usa directamente.

Nivel 2. Análisis.

- 1) Ya pueden percibir los componentes y las propiedades de los objetos y figuras. Para llegar a esto, lo hacen tanto por observación como por experimentación.
- 2) Pueden describir de manera informal algunos objetos geométricos por sus propiedades, pero aún no son capaces de relacionar diferentes propiedades o figuras, unas con otras. Tampoco son capaces de elaborar la mayoría de las definiciones, debido a que estas suelen basarse en las propiedades de los objetos.
- 3) Pueden establecer nuevas propiedades experimentando con figuras u objetos. Sin embargo, no pueden realizar clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

El nivel 2 es el primero que ofrece un razonamiento que podemos llamar "matemático", pues es el primero en el que los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar propiedades que todavía no conocían, aunque solo por medio de la observación y la manipulación. Además, esta capacidad de razonamiento es limitada, pues solo puede observar estas propiedades aisladas de la figura o el objeto. Esto hace que no puedan clasificar adecuadamente las diferentes familias de figuras y que tenga más peso la existencia de algunas propiedades diferenciadoras que la existencia de otras propiedades comunes, “en términos piagetianos, podríamos decir que no tienen la habilidad de hacer inclusiones de clases” (Jaime y Gutiérrez 1990, p. 309).

Nivel 3. Ordenación o Clasificación.

- 1) En este nivel ya pueden describir las figuras de manera formal, gracias a que pueden señalar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante

pues ya pueden entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que requieren.

- 2) Son capaces de realizar clasificaciones lógicas de manera formal porque, su razonamiento matemático, ya está iniciado. Esto los lleva a poder reconocer cómo unas propiedades derivan de otras, establecer relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.
- 3) Pueden seguir una demostración, pero en la mayoría de los casos no las entienden en su estructura. Esto es debido a que su nivel de razonamiento lógico les permite seguir pasos individuales de un razonamiento, pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide entender la naturaleza axiomática de la Geometría.

Sobre este último punto, Jaime y Gutiérrez (1990) añaden que, esta incapacidad para comprender las demostraciones viene acompañada de un sentimiento de que no son necesarias. Para este alumnado, es suficiente con la comprobación en un razonable número de casos concretos. Un reproche típico de un alumno de este nivel o inferior, ante la petición del profesor de que demuestre alguna propiedad, es la de “¿por qué tenemos que demostrarla, si ya sabemos que es verdad?” (P. 310).

Nivel 4. Deducción Formal.

- 1) En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.
- 2) Comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas.
- 3) Comprenden cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Los estudiantes que alcanzan este cuarto nivel ya tienen un razonamiento lógico matemático y, además, una visión globalizadora del área de las matemáticas que se esté estudiando.

3.5 Nivel 5. Rigor.

- 1) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
- 2) Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

4.1.3 Principales características de los niveles de Van Hiele

La primera característica, según Corberán et al. (1994), es que los cinco niveles tienen una **organización jerárquica y secuencial**, es decir, cada nivel se apoya en el anterior. En cada uno de los niveles hay habilidades **explícitas** que el estudiante puede realizar y, existen otras herramientas mentales **implícitas**, que aún no sabe que puede utilizar. El paso de un nivel de razonamiento a otro se realiza, precisamente, cuando estas habilidades se utilizan de manera voluntaria y consciente.

Esta característica tiene una gran implicación didáctica, ya que, para pasar de un nivel a otro superior de razonamiento, habrá que hacer reflexionar a los alumnos sobre estas habilidades implícitas, para que puedan exteriorizarlas. Corberán et al. (1994, p. 22) matizan que “Junto al aprendizaje de conocimientos geométricos propiamente dichos, la explicitación y aprendizaje de estos elementos de razonamiento deberían ser los objetivos centrales de la enseñanza de las Matemáticas”. La siguiente tabla muestra estos elementos explícitos e implícitos en función del nivel de razonamiento.

Tabla 2. Niveles del modelo de Van Hiele basada en Jaime y Gutiérrez (1990)

Niveles	Elementos Explícitos	Elementos Implícitos
Nivel 1: Visualización	Elementos básicos del estudio: figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
Nivel 2: Análisis	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades
Nivel 3: Ordenación	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas (demostraciones)
Nivel 4: Deducción Formal	Deducción formal de teoremas (demostraciones)	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

La siguiente característica destacada es que **el proceso de paso de un nivel a otro se realiza de manera continua** y no de golpe. La experiencia que el alumnado va acumulando con la realización de actividades y la resolución de problemas, hace que poco a poco vaya adquiriendo las destrezas necesarias.

La última característica importante es que cada nivel tiene asociada un **tipo de lenguaje específico**, que es el que el estudiante utiliza para comunicarse con el resto de las personas matemáticamente. Si dos personas están en niveles distintos, comunicarán de manera diferentes sus argumentos matemáticos y, por tanto, tendrán dificultades para entenderse (sobre todo si

las personas no son conscientes de este hecho). Corberán et al. (1994, p. 24), nos indica que esto tiene una repercusión didáctica directa, “Los profesores deben adaptarse al nivel de razonamiento de sus alumnos, ya que éstos no pueden adaptarse al de sus profesores, por mucho que lo deseen.”

Esta misma autora, pone un ejemplo con la palabra “**Demostrar**”: en el primer nivel, los alumnos no sabrán usar esta palabra en un contexto matemático, aunque si conocen el significado de la palabra; Los alumnos del nivel 2, la entenderán como encontrar algunos ejemplos y comprobar experimentando, por ejemplo midiendo; En el nivel 3, ya reconocen que es un razonamiento lógico, aunque ellos solo son capaces de realizar demostraciones informales, basadas en la experimentación de casos concretos; y, por último, una persona en el nivel 4, tendrá un concepto similar al del resto de matemáticos.

4.1.4 Las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele

Tal y como se comentó en la cuarta hipótesis del modelo, no se puede enseñar a razonar a una persona de una determinada forma, pero sí se puede ayudar a esta persona, mediante una enseñanza o metodología adecuada, a que adquiriera la experiencia necesaria que le permita alcanzar un nivel superior de razonamiento. Es por eso que, el matrimonio Van Hiele, le daba mucha importancia a la organización del proceso de enseñanza y aprendizaje, a las actividades y los recursos utilizados (Fouz, 2005).

Fase 1. Indagación

Esta fase es una toma de contacto con un doble objetivo: por un lado, **informar** a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, como los conceptos, las actividades, los recursos, la metodología, etc.; y por otro, que el profesor intente descifrar los **conocimientos previos** de los estudiantes y, sobre todo, el **nivel de razonamiento** en el que se encuentra cada alumno en esa materia concreta que se va a abordar (Corberán et al., 1994). Tal y como dijera Ausbel (1978; citado en Fouz, 2005, p. 72): “Si tuviera que reducir toda la Psicología Educativa a un solo principio diría lo siguiente: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno/a sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia”.

Fase 2. Orientación dirigida

Tal y como describen Corberán et al. (1994), en esta fase el profesor debe conseguir que los estudiantes entren en contacto con los métodos de razonamiento del nivel superior que se quiere alcanzar. Mediante actividades bien diseñadas y secuenciadas, el docente debe lograr que los alumnos descubran, comprendan y aprendan estos conceptos, propiedades, etc.

motivo de estudio. Pero, estas actividades todavía, no podrán ser problemas abiertos y complejos, sino otros que les hagan descubrir y demostrar según el nivel de razonamiento de cada alumnado. La misión de los profesores es ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades, aunque evitando, en la medida de lo posible, dar el mismo la solución.

Fase 3. Explicitación

Esta fase es, principalmente, de interacción entre los propios alumnos y entre el docente y los discentes, con el objetivo de intercambio de ideas y experiencias. No hay un aumento de contenido nuevo a enseñar y, el papel del profesor se reduce a corregir el lenguaje de los alumnos, siempre teniendo en cuenta el nivel de razonamiento del alumnado (Fouz, 2005). Pero, no hay que entender esta fase como una actividad a realizar después de la segunda fase y antes de la cuarta, sino que debe ser una actitud continua de diálogo después de cada actividad, durante todas las fases de aprendizaje (Corberán et al., 1994).

Fase 4. Orientación libre

En esta fase ya se pueden introducir actividades más complejas, con el objetivo de aplicar los conocimientos adquiridos en las fases anteriores, tanto de contenido como de lenguaje matemático (Fouz, 2005). Esto se consigue planteando problemas abiertos, que puedan desarrollarse de diversas formas y que admitan diferentes soluciones.

Como bien señalan Corberán et al. (1994), estos no deben ser los típicos ejercicios que, para su solución, solo hace falta recordar (memorizar) algún concepto o método y utilizarlo directamente. Los problemas adecuados, contendrán varios conceptos y/o propiedades que los estudiantes deberán combinar de forma adecuada y, además, fomentarán la justificación de sus ideas y la utilización de un vocabulario adecuado. “La misión del profesor es dar a los estudiantes indicios sobre la vía de solución de los problemas y fomentar la discusión sobre diferentes alternativas cuando las haya.” (Corberán et al., 1994, p. 27)

Fase 5. Integración

En esta fase ya no se trabajarán contenidos nuevos, se trata de adquirir una visión general de todo lo aprendido y conectarla con otros conocimientos anteriores, incluso multidisciplinarios. En Palabras de Fouz (2005, p. 73), “Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía”. Este mismo autor, nos sugiere que, en esta fase se pueden incluir actividades de recuperación para alumnos que presenten algún retraso en la adquisición de conocimiento de la materia de estudio y, con una

configuración grupal adecuada, profundizar en la materia con los estudiantes de mejor rendimiento.

Completado el ciclo de las cinco fases y, en el caso de que hayamos conseguido que el alumnado alcance un nuevo nivel de conocimiento, se deberá comenzar de nuevo el proceso, iniciando por la primera fase. Podemos concluir por tanto que, el Modelo de Van Hiele sugiere un currículo en espiral, tal y como actualmente asume el sistema educativo español. Es decir, que las distintas partes de la Geometría (o, en general, de las Matemáticas) se van tratando de manera repetida en los distintos cursos, utilizando formas de razonamiento cada vez más sofisticadas (Corberán et al., 1994).

4.2 Errores, Obstáculos y Dificultades en el Aprendizaje de la Geometría

En los enfoques constructivistas de la educación, donde el alumnado es el eje central de la educación, el error es un elemento más de aprendizaje. Estos han pasado de ser un elemento sancionable e intrascendente, a ser una línea de trabajo muy importante donde se pretende conocer las concepciones erróneas, sus causas y su evolución. Según las investigaciones de Barrantes y Zapatas (2008), los estudiantes con errores persistentes y que no han evolucionado con el tiempo, presentan una gran resistencia al cambio, incluso después de comprobar su falsedad. Cuando esto ocurre, los propios docentes, pueden llegar a transmitir estos errores a su alumnado. Estos autores consideran primordial hacer surgir y conocer los errores para poder captar sus concepciones y saber las dificultades que se encuentran en la realización de las tareas.

A continuación, se presentan en dos bloques: por un lado, los errores debidos a “malas” costumbres en la enseñanza de la geometría y, por otro, las dificultades propias de este campo de las matemáticas. Además, se irán proponiendo recomendaciones que facilitan los distintos autores para solventar dichos errores y obstáculos.

4.2.1 Errores Debidos a Metodologías o Costumbres de Enseñanza de la Geometría

Una de las ramas, dentro de las matemáticas, donde los estudiantes encuentran más problemas en su aprendizaje es en la geometría y, al menos en parte, estas dificultades provienen por las metodologías tradicionales de enseñanza (Arce et al., 2019). Entre estas podemos mencionar las siguientes:

En la década los setenta y, con la aplicación de la matemática moderna, la geometría cayó en desgracia y pasó a un segundo plano. Esto provocó que los estudiantes para maestros, según Barrantes y Blanco (2004), llegaran con conocimientos casi nulos en geometría y, además, su formación posterior, se centró más en aspectos numéricos o algebraicos que en la

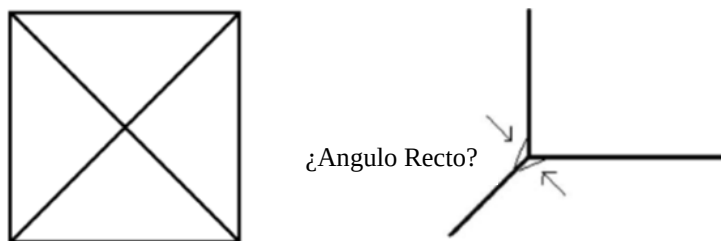
Geometría y su enseñanza y aprendizaje. Esta herencia, tal y como indican Calvo et al. (2016), hace que hoy en día, los docentes sigan **sin dar un trato equilibrado a las diferentes ramas del currículo**, siendo la Geometría junto con la estadística y la probabilidad, las tratadas más superficialmente y, por tanto, percibidas por los estudiantes como menos importante.

Otro error, que también señalan Calvo et al. (2016), viene dado por una dedicación casi exclusiva, a **aspectos puramente descriptivos y a la memorización y aplicación de fórmulas “comunicadas” y no “construidas”** por los estudiantes. Sobre todo, referidas a temas métricos de las figuras, como pueden ser áreas, volúmenes o ángulos. Esta metodología fomenta la memorización frente a la comprensión, lo que no es compatible con las hipótesis del modelo de Van Hiele para subir de nivel de razonamiento (Arece et al., 2019).

Otro motivo que habitualmente provoca graves obstáculo es **el uso, casi exclusivo, del libro de texto como recurso didáctico en el aula**. En este sentido Barrantes y Zapatas (2008) apuntan que la falta de recursos y materiales provoca en los estudiantes esquemas conceptuales pobres o erróneos. Es decir, que no tengan la capacidad de comprender los conceptos, propiedades, etc. Esto obstaculiza los procesos de abstracción y el pensamiento abierto y divergente de los estudiantes. Estos autores detectan los siguientes errores debido al uso excesivo de los libros de textos:

- a) La representación de los objetos geométricos por **un solo dibujo o un número reducido de ellos**, por parte de los libros de textos, construyen esquemas conceptuales que suelen alejarse de la definición verdadera del concepto. Esto es más acuciado, cuando no se atiende a la **simbología del lenguaje visual** correctamente, ya que el alumnado y el docente pueden interpretar cosas distintas sobre un mismo dibujo.

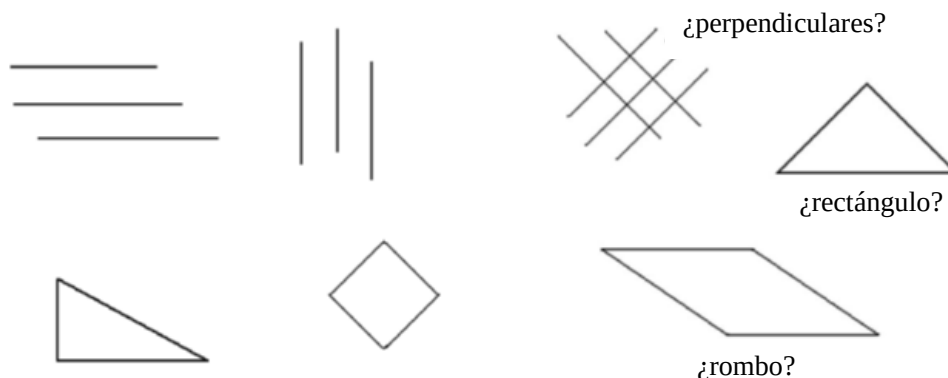
Ilustración 2. Ejemplo de simbología visual, tomado de Barrantes y Zapata (2008)



En la ilustración 2, ejemplos expuestos por Barrantes y Zapata (2008), en la figura de la izquierda se puede interpretar un cuadrado con sus diagonales o una pirámide cuadrada vista en planta y, en la figura de la derecha, ángulos que no son rectos, si el estudiante no conoce la representación isométrica.

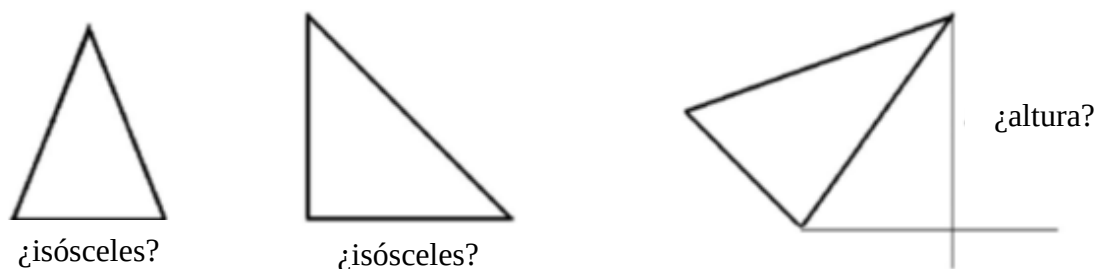
- b) Los estudiantes inician la configuración de sus esquemas mentales con conceptos amplios, que irán mejorando con la experiencia, donde podrá obtener ejemplos más críticos y analíticos. Sin embargo, pueden existir ciertos atributos irrelevantes con fuertes características visuales, que pueden actuar como distractores. Entre estos encontramos los **distractores de orientación**, propiedades visuales distintas a la definición del concepto.

Ilustración 3. Ejemplos de distractores de orientación, tomado de Barrantes y Zapata (2008)



Y también podemos tratar con **distractores de estructuración**, que hacen referencia a que algunos elementos o propiedades quedan excluidos sin intención.

Ilustración 4. Ejemplo de distractores de estructuración, tomado de Barrantes y Zapata (2008)



- c) Otro error importante se encuentra en **las definiciones de los conceptos**, cuando se pone el acento más en la propia definición que en los ejemplos que son los “que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo” (Gutiérrez y Jaime, 1996; citado en Barrantes y Zapata, 2008, p. 64). Esta forma de actuar, forma alumnos que memorizan la teoría, pero que son incapaces de aplicar estos conceptos para la resolución de problemas de la vida cotidiana. Además, los libros pueden tener **diferentes definiciones para un mismo objeto geométrico**, que pueden llevar a los estudiantes a crear esquemas conceptuales contradictorios. Los errores también pueden ser ocasionados por las interpretaciones distintas **a una misma expresión gramatical** que los estudiantes puedan realizar.

Barrantes y Zapata (2008) no se quedan en la presentación de los errores cometidos habitualmente, sino que presentan las siguientes recomendaciones. En un primer lugar, proponen el uso dos metodologías, la resolución de problemas y de laboratorio. Barrantes et al. (2013), cuando hablan de **resolución de problemas**, no se refiere a los problemas métricos prototípicos de los libros de textos, sino a problemas contextualizados, adecuados a su nivel y donde se fomente una metodología flexible, la interacción entre iguales y la actitud positiva del profesor hacia la geometría. En cuanto a la **metodología de laboratorio**, proponen la formación de conceptos a través de actividades, es decir “aprender haciendo” (P. 28). Las investigaciones se realizan en grupos y se componen de una serie de actividades graduadas que se presentan de la siguiente manera: trabajo a realizar, material a utilizar, exploración de lo que ha hecho y descubrimientos realizados.

Estos autores dan también importancia a las actividades y recursos para aplicar estas metodologías y, entre otras, proponen realizar actividades multidisciplinares y el uso de geometría dinámica (**modelos físicos o con SGD**). En palabras de Barrantes et al. (2013, p. 29):

... la finalidad de los modelos es construir esquemas mentales abstractos aplicables a una variedad más amplia de problemas. Los modelos permiten prevenir, diagnosticar y superar errores o desconocimientos y aumentar el uso del lenguaje y la motivación de los alumnos.

La geometría dinámica ofrece a los alumnos el poder probar nuevas ideas, examinarlas e interiorizarlas. Con el uso de GeoGebra, como ejemplo de SGD, se presenta una ocasión ideal para discutir con los estudiantes, sobre la **diferencia entre dibujar y construir**, ya que cuando construyen deben tener en cuenta las propiedades y sus relaciones (Calvo et al., 2016).

Por último, estos autores, recomiendan prestar una atención especial a las definiciones, propiedades, imágenes visuales y reales de los conceptos que se trabajan con el alumnado. Recuerdan que los diferentes lenguajes utilizados (verbal, gráfico, algebraico, etc.) pueden provocar una falta de entendimiento entre lo que quiere transmitir el profesor y lo que entiende del alumno. Los docentes deben indagar si los esquemas conceptuales de su alumnado son erróneos o están incompletos, con el objetivo de poder modificarlos y completarlos.

4.2.2 Dificultades Propias del Campo de la Geometría

Arce et al. (2016) enumera las siguientes dificultades relacionadas con el propio campo de la geometría:

- a) **Dificultades asociadas a la identificación de los conceptos geométricos con sus representaciones:** Las representaciones geométricas no siempre son totalmente fieles al concepto geométrico. Por ejemplo, un segmento dibujado en un papel, en la mayoría de los casos, representa una línea recta que no tiene limitación en sus extremos. Además, nos señala lo positivo de usar SGD como GeoGebra, para la mejora de esta dificultad.
- b) **Dificultades asociadas a la tridimensionalidad:** Esta puede venir por los modelos físicos que se utilicen o por la representación bidimensional que se realicen de estas figuras tridimensionales. En este sentido, recomiendan el uso de modelos físicos diferentes para tratar un mismo concepto.
- c) **Dificultades asociadas a la orientación y el posicionamiento:** En secundaria y bachillerato, esta orientación y posicionamiento se realiza mediante sistemas de coordenadas (cartesianas, terrestres o polares) y con la geometría analítica. Hay que tener presente la comprensión de estos nuevos lenguajes y sus transformaciones. También habrá que tener presente el paso de una geometría Euclídea a una geometría no Euclídea (geometría esférica, por ejemplo)
- d) **Dificultades asociadas entre la geometría sintética a la geometría analítica:** aquí se unen dos dificultades, por un lado, las propias del **uso del lenguaje algebraico** como: la doble naturaleza de las expresiones como procesos y como objetos, la interpretación de las letras, la nueva interpretación del signo igual y del signos aritméticos y diferenciación en la resolución de problemas.

Por otro lado, está la **transición de una geometría sintética**, unida a la construcción con regla y compás y a un razonamiento más intuitivo, **a una geometría analítica**, unida a las coordenadas cartesianas y a los métodos algebraicos. Cada uno tiene sus ventajas e inconvenientes y ambos son positivos para el aprendizaje integral del estudiante. Pero los alumnos tienen dificultad para diferenciar estas dos geometrías y la utilidad de esta última para la resolución de problemas más complejos de forma más eficiente.

Para eliminar esta ruptura, Gascón (2002) nos proporcionan recomendaciones muy útiles, para mostrar como la geometría sintética nos lleva al uso de la geometría analítica. Por otro lado, Gaita (2014), nos sugiere desarrollar el concepto histórico de lugar geométrico para evidenciar la necesidad del uso de la geometría analítica y, para ello propone la resolución de problemas por ambos métodos.

4.3 Flipped Learning o Aprendizaje Invertido

Con la llegada del siglo XXI y sus cambios a nivel social, económico y educativo, además, de la propia legislación educativa, proponen que los estudiantes sean ahora los actores principales de sus actividades de aprendizaje, mientras que los profesores pasan a ser concebidos como planificadores y guías del proceso. Pero, aunque estas corrientes no son nuevas, aún no están asentadas en las aulas españolas. Según un estudio realizado entre 2019 y 2023, por investigadores de Universidad a Distancia de Madrid, concluyen que, “las metodologías activas se encuentran en una fase inicial o de implementación en las aulas de matemáticas” (Díaz et al., 2023, p. 243). Además, estos mismos autores, apuntan que la metodología centrada en el docente y la impartición de contenidos sigue siendo la predominante en las aulas.

El presente TFM se fundamenta, principalmente, en el libro Aprender al revés: flipped learning 3.0 y metodologías activas en el aula, cuyos autores son Santiago y Bergmann (2018).

4.3.1 ¿Qué es el Flipped Learning o Aprendizaje Invertido?

Podemos definir Flipped Learning como un enfoque pedagógico en el que la instrucción directa pasa del espacio grupal al individual y, donde el espacio grupal (el aula) se transforma en un entorno dinámico e interactivo (FLN, 2014). De la anterior definición, en primer lugar, será necesario aclarar que consiste el **espacio individual** y el **espacio grupal**. El primero se refiere al trabajo que el estudiante realiza en solitario y normalmente en su casa. El espacio grupal, por el contrario, se refiere al trabajo que se realiza en el aula, donde, además, contará con la presencia del profesor.

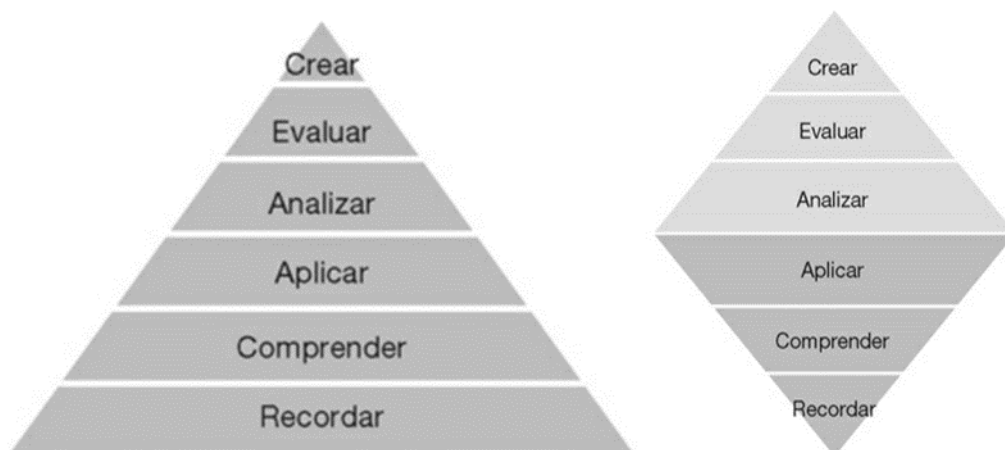
Por otro lado, de la definición se destacan dos puntos importantes: el primero, que **la instrucción se traslada al espacio individual** y se realiza en casa de manera habitual; el segundo es la importancia de convertir el **espacio grupal en un lugar de aprendizaje activo**. En este sentido, hay que recalcar que, aunque el material audiovisual que se prepara para la instrucción en casa (espacio individual) es importante, lo es aún más, lo que se produce en el aula (espacio grupal), donde los estudiantes pueden interactuar, involucrarse con lo que están aprendiendo, aplicar, crear, etc. Santiago y Bergmann (2018) aconsejan no centrarse tanto en la realización y búsqueda de vídeos y más en invertir tiempo y esfuerzo en diseñar actividades de mayor nivel cognitivo.

4.3.2 La Taxonomía de Bloom Revisada

Para poder tener claro, qué actividades se deben realizar en casa y cuáles en el aula, es necesario conocer la **taxonomía de Bloom revisada**, que consiste en una clasificación de las

habilidades del pensamiento. En la parte inferior de esta clasificación se encuentran los de menor nivel de complejidad cognitiva (recordar o comprender) y, en la parte superior los de mayor complejidad (crea, evaluar, etc.). En una clase tradicional, el profesor utiliza el mayor tiempo en la instrucción, es decir a recordar y comprender, según la Taxonomía de Bloom. Las tareas de mayor complejidad, aplicar y analizar, las realizan en su casa de manera individual y sin que esté el profesor para ayudarlos. Un esquema clásico en forma piramidal se muestra a continuación.

Ilustración 5. La taxonomía de Bloom revisada (derecha) y la distribución con flipped learning (izquierda). Tomado de Santiago y Bergmann (2018)



La metodología Flipped Learning lo que propone es darle la vuelta a la manera tradicional de enseñanza. La instrucción, al encontrarse en los niveles más bajos de la pirámide, la puede realizar el estudiante individualmente en su casa, eso sí, con unos materiales de calidad y cuidadosamente diseñados por los docentes. Por el contrario, las tareas más complejas se realizarán en el aula junto a profesor. De esta forma los tiempos invertidos en el aula serán más eficientes para el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, la forma más realista y práctica de representar la distribución del tiempo en el aula, sería como se muestra a continuación.

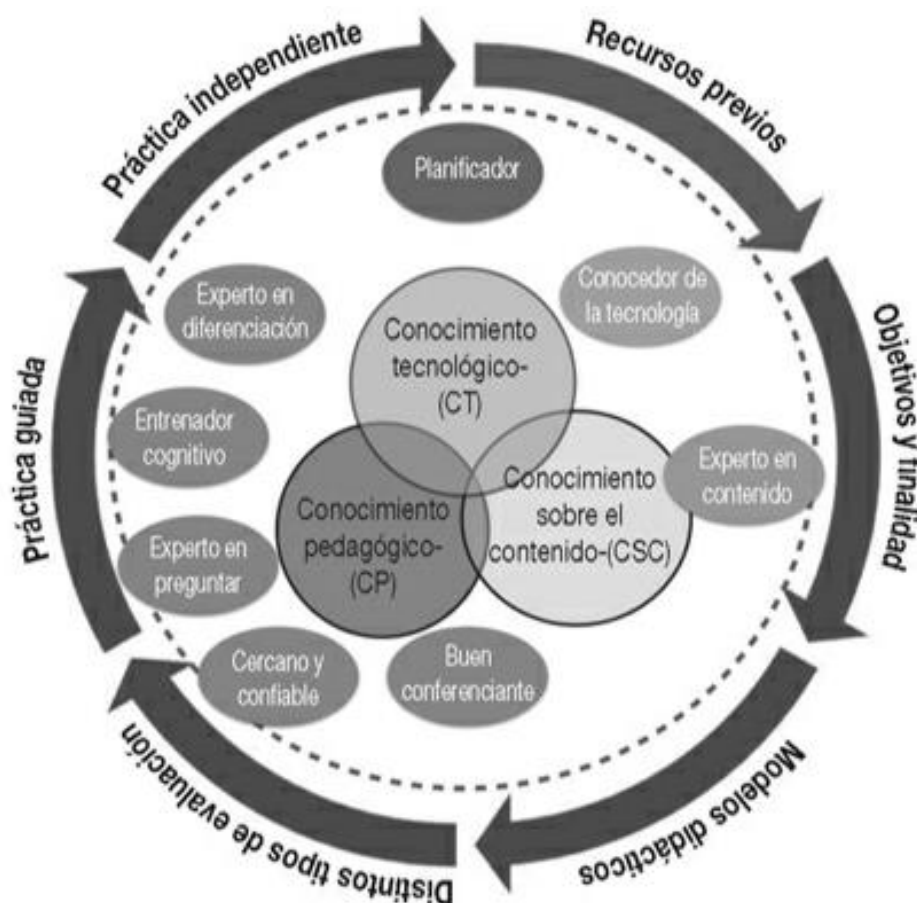
4.3.3 Roles del Profesor y el Modelo TPACK

Para poder llevar a cabo esta inversión en las aulas es necesario unos cambios en los roles del profesor y de los alumnos. Según Santiago y Bergmann (2018), las habilidades y características de un buen profesor, deberán aproximarse lo máximo posible a: experto en contenido, planificador, buen conferenciante cuando hace falta, cercano y confiable, entrenador cognitivo, experto en diferenciación, experto en preguntar, experto en aprendizaje activo, conocedor de la tecnología y creativo. Para ello, el docente debe cuidar su formación continua, olvidar su faceta calificadora y centrar su esfuerzo en una evaluación individualizada y adaptada al potencial de alumno.

En el siguiente gráfico se unifican los roles de los profesores y el modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge), que incluye los tres ámbitos de conocimiento pedagógico, del contenido y tecnológico (Mishra y Koehler, 2006), que un profesor debe poseer.

Ilustración 6. Los roles del profesor y el modelo TPACK.

Nota: Tomado de Santiago y Bergmann (2018).



4.3.4 Roles de los Estudiantes

Empezaremos hablando sobre las actividades individuales que los estudiantes deben realizar en casa, las famosas “tareas”. En el modelo tradicional, los alumnos las temen, los profesores las ven necesarias y los padres tienen una relación de amor-odio con ellas. El mayor problema es que, en un alto porcentaje, los estudiantes no son capaces de realizarlas. Las razones son variadas: su complejidad, la falta de tiempo o su mala distribución con el resto de las actividades extraescolares, el ambiente de casa no es el más propicio, etc.

Analizando de nuevo estos problemas según la taxonomía de Bloom en el modelo tradicional: Los profesores trabajan la instrucción en las horas de clase, es decir, los niveles más bajos de la taxonomía (conocer y comprender); luego se les pide que en casa y en solitario,

realicen las tareas de mayor demanda cognitiva (analizar, evaluar, crear y aplicar), es decir, lo que se considera más difícil. Es normal que les suponga un gran esfuerzo y que le produzca rechazo, de hecho, los que tienen éxito, suele ser debido a que tienen un fuerte sistema de apoyo en casa.

La propuesta del modelo flipped learning es que en casa visionen vídeos cortos e interactivos, que además podrán verse tantas veces como sea necesario, adaptándose al ritmo de cada estudiante y, las tareas más complejas, se realizarán en clase con la guía y la ayuda del docente. Pero este cambio no es sencillo y habrá que preparar y enseñar al alumnado al nuevo proceso de trabajo, muy diferente al que han llevado hasta ahora. Habrá que dar pautas concretas para el visionado de los vídeos, para tomar notas mientras los ven, como mejorar la participación en las clases, etc.

Por último, y siguiendo un estudio realizado por Santiago y Bergmann (2018), se expondrán la opinión de estudiantes de magisterio que han seguido una metodología de flipped learning en sus clases, con respecto al cambio del rol del estudiante.

Tabla 3. Roles de los estudiantes según las respuestas dadas al formulario

Nota: elaboración propia, basada en Santiago y Bergmann (2018)

Respuestas de los estudiantes	Roles del estudiante según la respuesta ofrecida
“me obliga a ser más organizado”	autorregulación, organización y planificación
“no puedo decepcionar a los miembros de mi grupo”	cooperación y compromiso
“tengo que ser consciente de como otras personas aprenden”	conocimiento personal del propio estilo de aprendizaje
“da un poco de vértigo”	asumir riesgos, nuevas responsabilidades y conectar con el profesor y con los compañeros

4.3.5 Ventajas de la Utilización del Flipped Learning

Podemos concluir que utilizando esta metodología se consiguen varios beneficios, como son: **aumentar el tiempo en el aula** para actividades de mayor demanda cognitiva, **hacer responsable al alumnado** en su propio aprendizaje, **adaptación a los distintos ritmos de aprendizaje** del alumnado que puede ver, tantas veces necesite, los recursos formativos, o que los docentes puedan saber, con antelación, **los conocimientos previos y los errores de sus estudiantes**, para después poder trabajarlos en el aula.

4.4 Aprendizaje Cooperativo (CA/AC)

Esta metodología se entenderá según el prisma del programa cooperar para aprender y aprender cooperando (CA/AC) desarrollado por el grupo de investigación sobre la atención de la diversidad (GRAD) y liderado por Pujolàs (2009). Según este autor, el programa CA/AC, se basa en tres pilares: la enseñanza personalizada, la autonomía de los estudiantes para su propio aprendizaje y la estructura cooperativa de los estudiantes (que sepan ayudarse mutuamente para aprender). En este contexto, se puede definir el aprendizaje cooperativo como:

... el aprendizaje cooperativo es el uso didáctico de equipos reducidos de alumnos, generalmente de composición heterogénea en rendimiento y capacidad aunque ocasionalmente pueden ser más homogéneos, utilizando una estructura de la actividad tal que asegure al máximo la **participación equitativa** (para que todos los miembros del equipo tengan las mismas oportunidades de participar) y potencie al máximo la **interacción simultánea** entre ellos, con la finalidad de que todos los miembros del equipo aprendan los contenidos propuestos, cada uno hasta el máximo de sus posibilidades, y aprendan, además, a trabajar en equipo (Lago et al., 2015, p. 75).

De lo anterior, y siguiendo a Pujolàs (2009), podemos concluir que los estudiantes que trabajan de manera cooperativa tienen una **doble responsabilidad**: aprender ellos mismos y contribuir a que el resto de los compañeros del equipo también aprendan. Pero, además, esta forma de trabajar tiene una **doble finalidad**: aprender los contenidos escolares y aprender a trabajar en equipo, es decir, cooperar para aprender y aprender a cooperar.

Pero ¿Cómo implantar esta nueva forma de trabajar en las aulas? El programa CA/AC propone tres ámbitos de intervención, para introducir esta metodología de manera progresiva en el aula (Pujolàs, 2009):

Ámbito de intervención A. Cohesión de Grupo

Para poder iniciar un aprendizaje cooperativo será una condición sine qua non crear una “pequeña comunidad de aprendizaje” (Lago et al., 2011, p. 93), para ello será necesario realizar dinámicas de grupo, juegos cooperativos o actividades.

Ámbito de intervención B. Trabajo en equipo como recurso para aprender

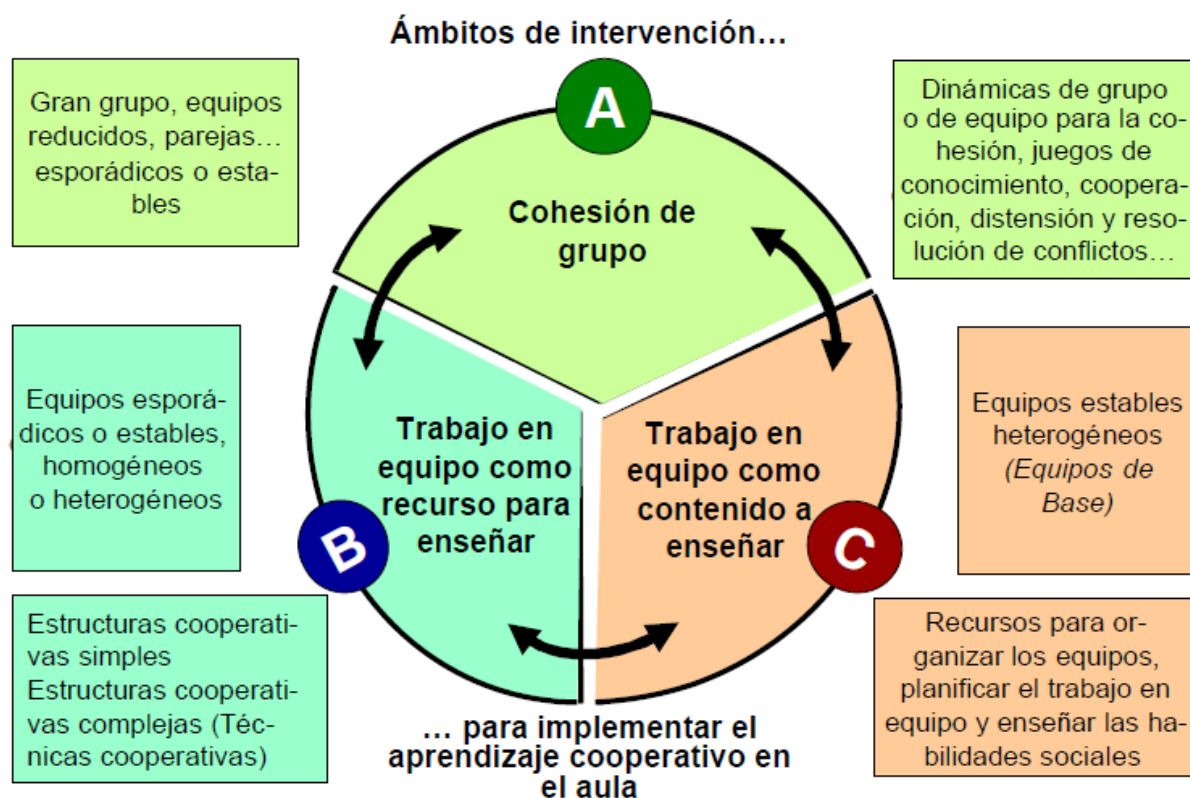
En este ámbito se utilizan estructuras de actividades cooperativas (simples y complejas) para tratar de, de manera paulatina, conseguir normalizar este tipo de metodología en el aula.

Ámbito de intervención C. Trabajo en equipo como contenido a enseñar

En este último ámbito, se trata, por un lado, de enseñar a los alumnos de una forma explícita y sistemática a trabajar equipo y, por otro, utilizar de forma regular esta manera de organización cooperativa. El objetivo es que puedan desarrollar otras competencias básicas, sobre todo comunicativas.

Ilustración 7. Áreas de intervención para implementar el aprendizaje cooperativo en el aula.

Nota: tomado de Pujolàs (2009)

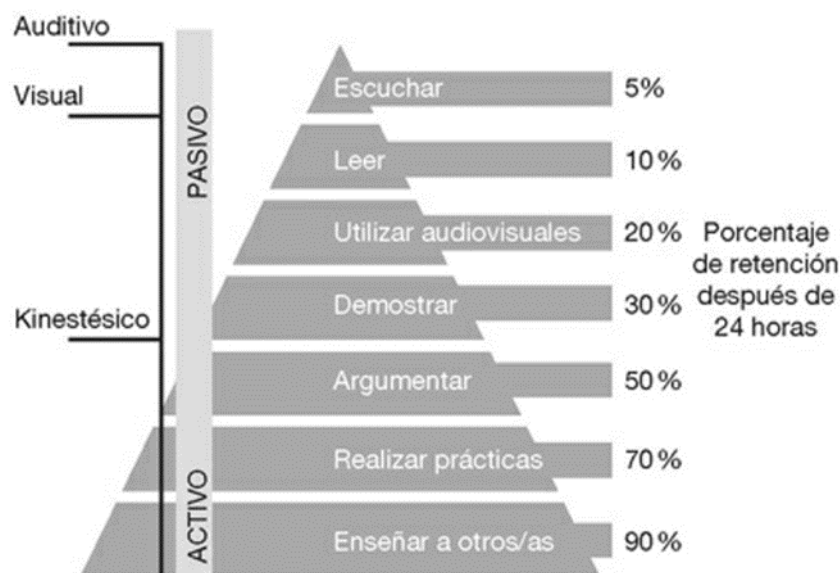


Hay que tener en cuenta que **no son fases secuenciales**, sino que hay que trabajar los tres ámbitos de manera continuada y simultáneas, ya que un aprendizaje cooperativo no se consigue de una vez y de golpe, sino que es un proceso en el que hay que ir mejorando poco a poco. Hay que ir regulando las actuaciones de los tres ámbitos en función de las necesidades del grupo.

Un tema importante y, que puede ser un conflicto con los padres y madres de los estudiantes, es la **distinta velocidad de aprendizaje** y, si algunos alumnos, se puede ver perjudicados por este motivo. En este sentido, Santiago y Bergmann (2018), señalan que los alumnos más aventajados, si están dispuestos, pueden mejorar su propio aprendizaje ayudando al resto de su compañero de grupo. Estos mismos autores informan de que hay que tener

precaución y, asegurarse, de que estos estudiantes no tienen conceptos erróneos o insuficientes, ya que esto, puede repercutir negativamente en el aprendizaje de los otros estudiantes.

Ilustración 8. La pirámide del aprendizaje (Santiago y Bergmann, 2018)



4.5 Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

Díaz (2005) escribe una frase, que nos parece esclarecedora de esta metodología: “El profesor se convierte en un "entrenador cognitivo" cuando enfrenta a sus alumnos con problemas o casos motivantes y auténticos, que les representan desafíos abordables.” (p. 61)

Esta misma autora, define esta metodología educativa como “... una experiencia pedagógica de tipo práctico organizada para investigar y resolver problemas de la vida real, la cual fomenta el aprendizaje activo y la integración del aprendizaje con la vida real, por lo general desde una mirada multidisciplinar.” (P. 62). Por lo tanto, necesita de **situaciones reales** o realistas, pero lo más auténticas posible, que estén relacionadas con los conocimientos, práctica o ejercicio profesional, que queremos enseñar.

Morales y Landa (2004, p. 154) exponen 8 pasos básicos a seguir para el diseño del ABP, aunque advierten que no hay una receta única:

1. **Leer y Analizar el escenario del problema:** Se busca con esto que el alumno verifique su comprensión del escenario mediante la discusión de este, dentro de su equipo de trabajo.
2. **Realizar una lluvia de ideas:** Los alumnos usualmente tienen teorías o hipótesis. Estas deben de enlistarse y serán aceptadas o rechazadas, según se avance en la investigación.
3. **Hacer una lista de aquello que se conoce.**

4. **Hacer una lista de aquello que se desconoce:** Todo aquello que el equipo cree se debe de saber para resolver el problema.
5. **Hacer una lista de aquello que necesita hacerse para resolver el problema:** Planear las estrategias de investigación y ordenar las acciones que deben realizarse.
6. **Definir el problema:** Consiste en un par de declaraciones que expliquen claramente lo que el equipo desea resolver, producir, responder, probar o demostrar.
7. **Obtener información:** El equipo localizará, acopiará, organizará, analizará e interpretará la información de diversas fuentes.
8. **Presentar resultados:** El equipo presentará sus trabajos o, realizará una presentación de este, en la cual se muestren las recomendaciones, predicciones, inferencias, etc. que ha encontrado en el transcurso de la resolución del problema.

5 PROYECTO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE SOBRE CURVAS CÓNICAS

La geometría está presente en todo lo que nos rodea, en la arquitectura, el arte, en los diseños industriales, en muchas aplicaciones científicas de uso cotidiano, etc. Los polígonos y las curvas cónicas son, en mayor medida, las más representativas, siendo estas últimas el centro de este TFM. En una primera fase se tratará de reconocer las curvas cónicas, definirlas con lenguaje matemático y clasificarlas según sus características, todo ello desde una geometría sintética. En una segunda fase, se introducirá la geometría analítica observando su necesidad y sus ventajas respecto a la geometría con regla y compás, aunque sin olvidarnos de su valor educativo. En el diseño de las distintas actividades, secuenciación, agrupamientos y en la selección del espacio individual y grupal, estarán siempre guiados por el modelo de razonamiento de Van Hiele (niveles y fases de aprendizaje), la taxonomía de Bloom revisada, así como los principios de las distintas metodologías activas que se irán utilizando.

Por último, se tendrá siempre presente las dificultades y errores analizados en el marco teórico de este TFM. Además, durante la puesta en práctica de la situación de aprendizaje, se le dará una gran importancia al análisis de los esquemas conceptuales que los estudiantes tienen o están formado. El objetivo siempre será detectar si estos son incompletos o erróneos para poder completarlos o corregirlos con la mayor antelación posible.

5.1 Contextualización

A continuación, se describe el contexto donde se desarrollará la unidad didáctica, con la que se pretende ejemplarizar que hay otras maneras más activas y significativas de enseñar matemáticas.

Aunque no se ha elegido un instituto o colegio real, si se ha decidido que se encuentre en la región de Andalucía y en un núcleo urbano como es la **capital de Cádiz**. Esta ciudad no tiene una población muy numerosa y, el centro escolar, se considera situado en una zona con cierto grado de **heterogeneidad socioeconómica**. Aunque, sin llegar a extremos de pobreza o analfabetismo, hay que hacer constar que las tasas de desempleos en la zona son más altas que la media nacional. Además, al menos la mitad de las familias, tienen una formación inferior a la educación postobligatoria. Por otro lado, aunque se considera la presencia de diversidad en el aula respecto a distintos ritmos de aprendizaje, no se consideran las adaptaciones curriculares del alumnado con necesidades educativas especiales o con altas capacidades intelectuales.

El nivel educativo al que va dirigido nuestra situación de aprendizaje es el primer curso de bachillerato, específicamente a la asignatura obligatoria de matemáticas I, en la modalidad de ciencias y tecnología. El contenido de este curso de matemáticas I se ha diseñado siguiendo la Orden de 30 de mayo (2023) de la Junta de Andalucía, donde se desarrolla el currículo de la etapa de bachillerato de la Comunidad Autónoma de Andalucía.

La programación que se va a considerar está basada en el libro digital de Matemáticas I realizado por **Apuntes Marea Verde** (Álvarez, 2022), que es un grupo de trabajo colaborativo de profesores de la escuela pública, que comparten materiales didácticos de manera gratuita. La unidad didáctica que vamos a desarrollar es una parte del **capítulo 5 de Geometría**. Con anterioridad a este contenido, se habrán impartido los capítulos de álgebra y trigonometría. Además, dentro del capítulo de Geometría, también se habrán estudiados los apartados de vectores y rectas y problemas métricos. A continuación, se resume el contenido de la programación didáctica de la asignatura de Matemáticas I, para tener una visión global del curso.

Capítulo 1. Números reales y complejos

- 1) **Números reales:** números racionales e irracionales, la recta real, valor absoluto, desigualdades, distancia en la recta real, intervalos y entornos, aproximaciones y errores, notación científica.
- 2) **Números complejos:** necesidad de los números complejos, números complejos en forma binómica, forma trigonométrica de los números complejos, fórmula de Moivre.
- 3) **Logaritmos:** definición, propiedades de los logaritmos.

Capítulo 2. Algebra

- 1) **Polinomios:** definición, términos, grado, valor numérico, operaciones con polinomios, regla de Ruffini, teorema del resto, raíces de un polinomio, factorización de polinomios, fracciones algebraicas.
- 2) **Ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado:** resolución de ecuaciones de primer grado, resolución de ecuaciones de segundo grado, resolución de inecuaciones de primer grado y su interpretación gráfica, resolución de inecuaciones de segundo grado.
- 3) **Sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales:** resolución de sistemas lineales confeccionando una hoja de cálculo, resolución por el método de gauss, discusión de sistemas aplicando el método de gauss, problemas de ecuaciones lineales, sistemas de inecuaciones lineales y su interpretación gráfica.

Capítulo 3. Sucesiones

- 1) **Sucesiones de números reales:** definiciones, formas de definir una sucesión, progresiones aritméticas y geométricas, tipos de sucesiones, suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, monotonía y acotación, aplicaciones de las progresiones geométricas.
- 2) **Límite de una sucesión:** reflexiones sobre el infinito, cálculo de algunos límites de sucesiones el número e , función exponencial y función logaritmo.

Capítulo 4. Trigonometría

- 1) **Razones trigonométricas:** unidades de medida de ángulos, razones trigonométricas de ángulos agudos, razones trigonométricas de ángulos arbitrarios.
- 2) **Cálculo de razones de unos ángulos a partir de otros:** suma de ángulos, resta de ángulos, ángulo doble, ángulo mitad, transformaciones de suma de razones trigonométricas en productos.
- 3) **Identidades y ecuaciones trigonométricas:** ecuaciones y sistemas
- 4) **Resolución general de triángulos:** teorema del coseno, teorema del seno, resolución de triángulos, problemas de trigonometría con medidas simples y dobles.

Capítulo 5. Geometría

- 1) **Vectores:** el plano cartesiano, los vectores en el plano, operaciones con puntos y vectores, el producto escalar. cálculo de distancias y ángulos, bases ortogonales y ortonormales

- 2) **Rectas y problemas métricos:** lugares geométricos, rectas, definición y ecuaciones, posiciones relativas de rectas, distancia de un punto a una recta, traslaciones, mediatriz y bisectriz
- 3) **Curvas Cónicas:** circunferencias y elipses, hipérbolas, parábolas, la hipérbola equilátera y cónicas generales.

Capítulo 6. Funciones

- 1) **Tipos de funciones y gráficas:** funciones racionales, función raíz, funciones exponenciales y logarítmicas, funciones trigonométricas, funciones definidas a trozos, función valor absoluto, funciones de oferta y demanda.
- 2) **Operaciones con funciones:** operaciones básicas, composición de funciones, función inversa o recíproca.
- 3) **Características de las funciones y sus gráficas:** dominio, recorrido o imagen, simetrías, periodicidad, puntos de intersección con los ejes, signo.

Capítulo 7. Límites y Continuidad

- 1) **Concepto de límite:** definición, límites laterales, tipos de límites, asíntotas.
- 2) **Cálculo de límites:** operaciones con ∞ y 0, propiedades de los límites, proceso de cálculo de límites, indeterminaciones.
- 3) **Continuidad de funciones:** continuidad de una función en un punto, propiedades de las funciones continuas, tipos de discontinuidad.

Capítulo 8. Derivadas

- 1) **Concepto de derivada:** tasa de variación media e instantánea de una función, definición de derivada de una función en un punto, derivada a la derecha y derivada a la izquierda, función derivada.
- 2) **Reglas de derivación.**
- 3) **Aplicaciones de la derivada:** interpretación geométrica de la derivada. recta tangente, interpretación física de la derivada, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

Capítulo 9. Probabilidad

Álgebra de sucesos, experimentos simples y compuestos, asignación de probabilidades, definición axiomática de probabilidad debida a Kolmogorov, diagramas de árbol y tablas de contingencia, teoremas de la probabilidad total y teorema de Bayes.

5.2 Concreción Curricular

En este apartado se especifican, para esta unidad didáctica, los saberes básicos implicados, las competencias específicas y sus descriptores operativos asociados, así como los criterios de evaluación que se seguirán. Todo ello siguiendo el desarrollo del currículo que marca la Orden de 30 de mayo (2023) de la Junta de Andalucía.

5.2.1 Saberes Básicos

A. SENTIDO NUMÉRICO

MATE.1.A.1. Sentido de las operaciones.

- MATE.1.A.1.1 Adición y producto escalar de vectores: propiedades y representaciones.
- MATE.1.A.1.2 Estrategias para operar (suma, producto, cociente, potencia, radicación y logaritmo) con números reales y complejos: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.

MATE.1.A.2. Relaciones.

- MATE.1.A.2.2 Conjunto de vectores: estructura, comprensión y propiedades. Módulo de un vector, coordenada de un vector con respecto a una base, ángulo entre dos vectores y proyección ortogonal.

B. SENTIDO DE LA MEDIDA

MATE.1.B.1. Medición.

- MATE.1.B.1.1 Cálculo de longitudes y medidas angulares: uso de la trigonometría. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera medido en grados o en radianes. Demostración de las identidades trigonométricas. Razones trigonométricas del ángulo suma, el ángulo diferencia, el ángulo doble y el ángulo mitad. Cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera empleando las principales fórmulas trigonométricas. Aplicación de las razones trigonométricas, el teorema de los senos y el teorema del coseno en la resolución de triángulos y de problemas geométricos de contexto real. Demostración del teorema del seno y del coseno.

C. SENTIDO ESPACIAL

MATE.1.C.1. Formas geométricas de dos dimensiones.

- MATE.1.C.1.1 Objetos geométricos de dos dimensiones: análisis de las propiedades y determinación de sus atributos. Manejo de triángulos, paralelogramos y otras figuras planas.
- MATE.1.C.1.2 Resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el plano representados con coordenadas cartesianas. Ecuaciones de la recta en el espacio bidimensional. Estudio de la posición relativa de puntos y rectas en el plano. Lugares

geométricos: ecuación de la recta mediatriz. Estudio de la simetría en el plano: punto simétrico respecto de otro punto y de una recta; recta simétrica respecto de otra recta. Aplicación de los números complejos para la construcción de polígonos regulares.

MATE.1.C.2. Localización y sistemas de representación.

- MATE.1.C.2.1 Relaciones de objetos geométricos en el plano: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales.
- MATE.1.C.2.2 Expresiones algebraicas de objetos geométricos en el plano: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.

MATE.1.C.3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica.

- MATE.1.C.3.1 Representación de objetos geométricos en el plano mediante herramientas digitales.
- MATE.1.C.3.2 Modelos matemáticos (geométricos, algebraicos, grafos...) en la resolución de problemas en el plano. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés.
- MATE.1.C.3.5 La geometría en el patrimonio cultural y artístico de Andalucía.

D. SENTIDO ALGEBRAICO

MATE.1.D.2. Modelo matemático.

- MATE.1.D.2.1 Relaciones cuantitativas en situaciones sencillas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.
- MATE.1.D.2.2 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas: modelización de situaciones en diversos contextos.

MATE.1.D.4. Relaciones y funciones.

- MATE.1.D.4.1 Análisis, representación gráfica e interpretación de relaciones mediante herramientas tecnológicas. Concepto de función real de variables real: expresión analítica y gráfica. Cálculo gráfico y analítico del dominio de una función.
- MATE.1.D.4.3 Álgebra simbólica en la representación y explicación de relaciones matemáticas de la ciencia y la tecnología.

F. SENTIDO SOCIOAFECTIVO

MATE.1.F.1. Creencias, actitudes y emociones.

- MATE.1.F.1.1 Destrezas de autoconciencia encaminadas a reconocer emociones propias, afrontando eventuales situaciones de estrés y ansiedad en el aprendizaje de las matemáticas.
- MATE.1.F.1.2 Tratamiento del error, individual y colectivo, como elemento movilizador de saberes previos adquiridos y generador de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas.

MATE.1.F.2. Trabajo en equipo y toma de decisiones.

- MATE.1.F.2.1 Reconocimiento y aceptación de diversos planteamientos en la resolución de problemas y tareas matemáticas, transformando los enfoques de las y los demás en nuevas y mejoradas estrategias propias, mostrando empatía y respeto en el proceso.
- MATE.1.F.2.2 Técnicas y estrategias de trabajo en equipo para la resolución de problemas y tareas matemáticas, en equipos heterogéneos.

MATE.1.F.3. Inclusión, respeto y diversidad.

- MATE.1.F.3.1 Destrezas para desarrollar una comunicación efectiva, la escucha activa, la formulación de preguntas o solicitud y prestación de ayuda cuando sea necesario.
- MATE.1.F.3.2 Valoración de la contribución de las matemáticas y el papel de matemáticos y matemáticas a lo largo de la historia en el avance de la ciencia y la tecnología.

5.2.2 Competencias Específicas y Descriptores Operativos

En este apartado se van a listar las competencias específicas, sus descriptores asociados y los criterios de evaluación que se tratarán en la unidad didáctica, según la Orden de 30 de mayo (2023) de la Junta de Andalucía.

1. **Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana** y de la ciencia y la tecnología aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD5, CPSAA4, CPSAA5, CE3.
2. **Verificar la validez de las posibles soluciones** de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM1, STEM2, CD3, CPSAA4, CC3, CE3.
3. **Formular o investigar conjeturas o problemas**, utilizando el razonamiento y la argumentación, **con apoyo de herramientas tecnológicas**, para generar nuevo conocimiento matemático. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD3, CD5, CE3.
5. **Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas**, estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.
6. **Descubrir los vínculos de las Matemáticas con otras áreas de conocimiento** y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en

situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM1, STEM2, CD2, CPSAA5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.

7. **Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos, seleccionando diferentes tecnologías**, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.1, CCEC4.2.
8. **Comunicar las ideas matemáticas**, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD3, CCEC3.2.
9. **Utilizar destrezas personales y sociales**, identificando y gestionando las propias emociones y respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las Matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores: CP3, STEM5, CPSAA1.1, CPSAA1.2, CPSAA3.1, CPSA3.2, CC2, CC3, CE2.

5.2.3 Criterios de Evaluación

En la tabla 4 se especifican los criterios de evaluación de la unidad didáctica y, además, se relacionan con las competencias específicas (CE) y los saberes básicos.

Tabla 4. Tabla de criterios de evaluación, Competencias Específicas (CE) y Saberes Básicos.

Nota: elaboración propia, basada en la orden de 30 de Mayo (2023)

CE	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	Saberes Básicos
1	1.1. Manejar algunas estrategias y herramientas, incluidas las digitales, en la modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología, evaluando su eficiencia en cada caso.	A.1.1. C.2.2.; C.3.2. D.2.2.
	1.2. Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología, utilizando la estrategia de resolución más apropiada y describiendo el procedimiento utilizado.	A.1.2.; A.2.2. C.1.2.
2	2.1. Comprobar la validez matemática de las posibles soluciones de un problema e interpretarlas, utilizando el razonamiento y la argumentación.	A.1.2.; A.2.2. B.1.1.
3	3.2. Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la formulación o investigación de conjeturas o problemas.	C.2.1; C.3.1. D.4.1.

5	5.2. Resolver problemas en contextos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas y usando enfoques diferentes.	C.1.2. D.2.1.
6	6.1. Resolver problemas en situaciones diversas utilizando procesos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real, otras áreas de conocimiento y las matemáticas.	B.1.1. C.3.2. D.2.1.
	6.2. Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad, reflexionando sobre su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas: consumo responsable, medio ambiente, sostenibilidad, etc., y a los retos científicos y tecnológicos que se plantean en la sociedad.	C.3.2.; C.3.5. F.3.2.
7	7.1. Representar ideas matemáticas, estructurando diferentes razonamientos matemáticos y seleccionando las tecnologías más adecuadas.	A.2.2. C.1.1.; C.3.1.
	7.2. Seleccionar y utilizar diversas formas de representación, valorando su utilidad para compartir información.	D.4.3. F.3.1
8	8.1. Mostrar organización al comunicar las ideas matemáticas, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados.	C.2.1 D.4.1.; D.4.3.
	8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.	C.3.5 D.4.3.
9	9.1. Afrontar las situaciones de incertidumbre, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas.	F.1.1. F.1.2.
	9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	F.2.1. F.3.1.
	9.3. Participar en tareas matemáticas de forma activa en equipos heterogéneos, respetando las emociones y experiencias de las y los demás y escuchando su razonamiento, identificando las habilidades sociales más propicias y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables.	F.1.2. F.2.2. F.3.1.

5.3 Objetivos Didácticos de la Situación de Aprendizaje

1. **Manipulación, visualización y construcción de curvas cónicas** utilizando diferentes recursos, tanto físicos (regla y compás, papel, plastilina, lámparas, etc.) como digitales (SGD y Sketchup).
2. Profundizar en el **concepto de lugar geométrico** y saber aplicarlo para la representación de curvas cónicas tanto de forma **sintética** (regla y compás) como desde la **geometría analítica**, por medio de las coordenadas cartesianas y el álgebra.
3. Conocer, interpretar y aplicar las distintas **ecuaciones de las curvas cónicas**, sabiendo utilizar la más adecuada, según el problema que se quiera modelizar o resolver.
4. Utilizar el SGD **GeoGebra** para la construcción de curvas cónicas, investigar sus ecuaciones y explorar sus parámetros y propiedades.

5. **Resolver problemas** en el plano utilizando modelos matemáticos, tanto gráficos como algebraicos, en situaciones matemáticas, de la vida real y conectando con otras disciplinas y con el patrimonio cultural y artístico de Andalucía.
6. **Fomentar la comunicación con lenguaje matemático**, adaptado a la edad y a los niveles de razonamiento, las descripciones de las curvas cónica, sus propiedades y sus aplicaciones prácticas.
7. **Aprender a cooperar** fomentando la empatía, la ayuda mutua, la participación, la asunción de responsabilidades, la conciencia sobre los propios errores y la autorregulación del aprendizaje.
8. **Desarrollar habilidades sociales, la inclusividad y la atención a la diversidad.**

5.4 Atención a la Diversidad

Además de las características favorables de las metodologías activas que se utilizan en este TFM, la situación de aprendizaje se diseñará siguiendo los principios del diseño universal para el aprendizaje, a partir de ahora DUA. En la tabla 5 se presentan los principios y pautas del DUA y, posteriormente, se expone un mapa conceptual donde se resume sus fundamentos.

Además, en el [anexo I](#), se evalúa el cumplimiento del DUA en el diseño de la unidad didáctica, mediante una lista de comprobación editada por el CAST (2018).

Tabla 5. Síntesis del modelo DUA: principios y pautas

Nota: elaboración propia, basado en Alba (2019)

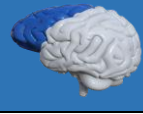
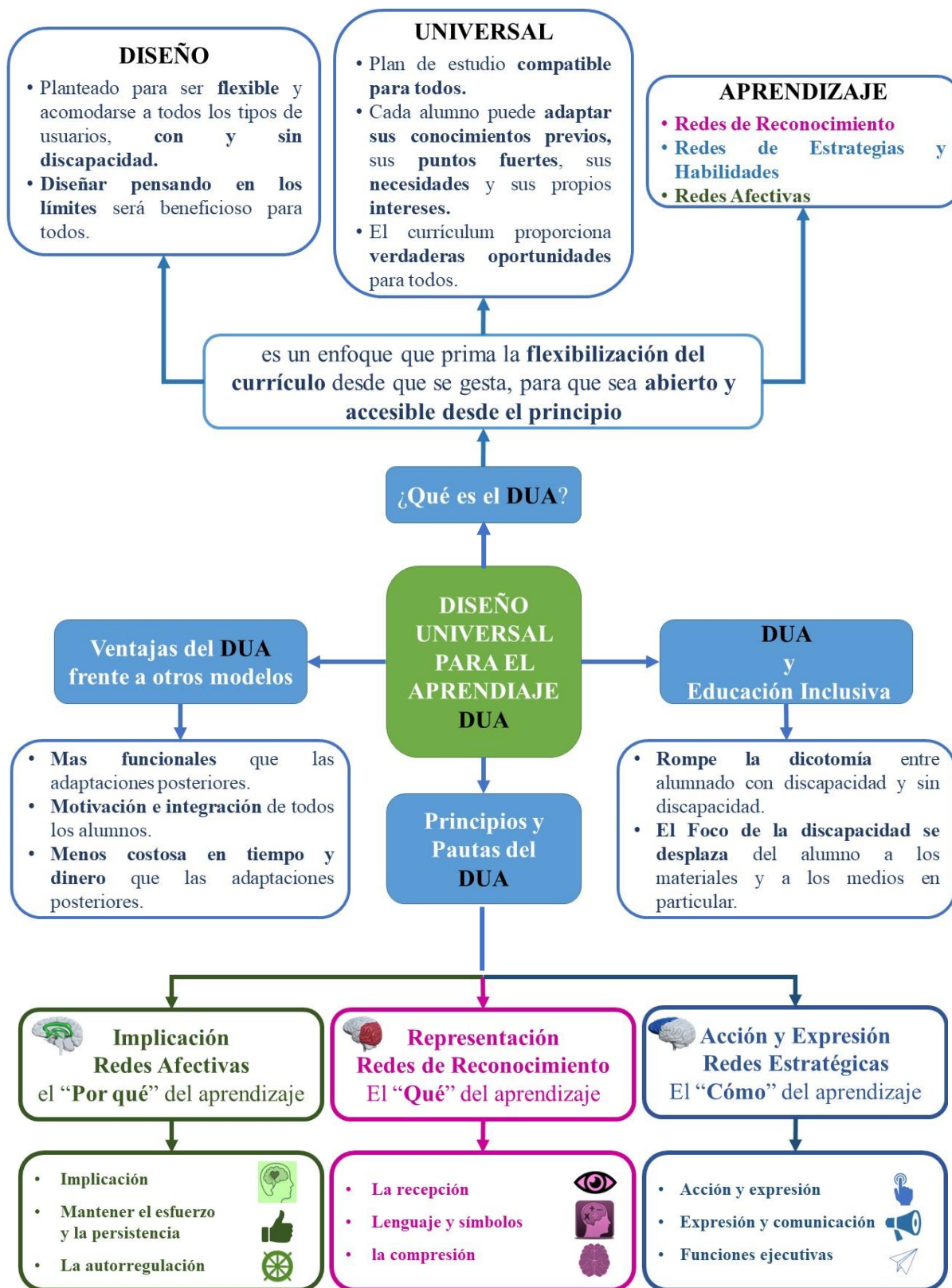
PRINCIPIOS		
Proporcionar múltiples formas de implicación 	Proporcionar múltiples formas de representación 	proporcionar múltiples formas de acción y expresión 
PAUTAS		
Proporcionar opciones para captar el interés	Proporcionar opciones para la percepción	Proporcionar opciones para la interacción física
Proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia	Proporcionar opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y los símbolos	Proporcionar opciones para la expresión y comunicación
Proporcionar opciones para la autorregulación	Proporcionar opciones para la comprensión	Proporcionar opciones para las funciones ejecutivas

Ilustración 9. Mapa conceptual sobre el DUA

Nota. Elaboración propia basada en CAST (2018)



5.5 Metodología

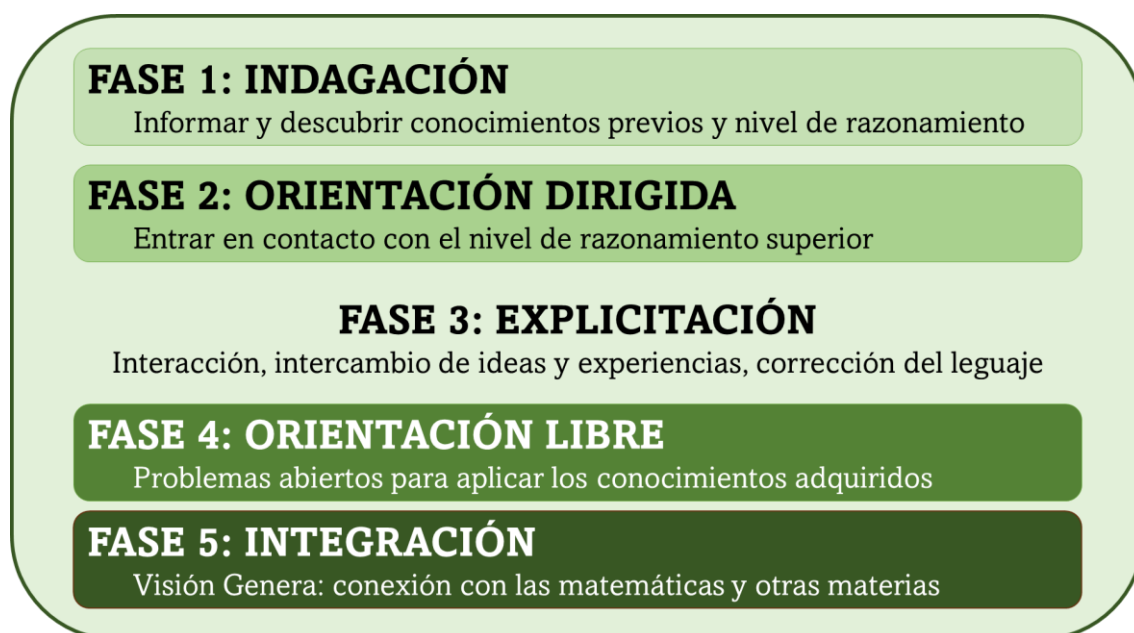
Como ya se ha ido exponiendo a lo largo del trabajo, la metodología que se utilizará durante la situación de aprendizaje será: una combinación de aprendizaje invertido, estructuras de aprendizaje cooperativo y de problemas contextualizados y significativos para el alumnado.

5.6 Secuencia, Actividades, Agrupamientos y Recursos

La secuencia de las actividades seguirá el mismo formato que las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y que se describió en el marco teórico. Contará con cuatro fases: indagación, orientación dirigida, orientación libre e integración. La fase 3, explicitación, estará presente durante todo el desarrollo de la unidad didáctica, ya que consiste en la interacción entre los propios alumnos y entre el docente y los discentes, con el objetivo de intercambio de ideas y experiencias (Fouz, 2005).

Ilustración 10 Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele

Nota. Elaboración propia basada en Fouz (2005)



5.6.1 Fase 1. Indagación

Esta fase tiene **dos objetivos**, tal y como ya se vio en el modelo Van Hiele. El primer objetivo consiste en **informar** de manera estructural y motivante el contenido y los objetivos de aprendizaje. El segundo objetivo, tratará de **descubrir** los conocimientos previos que tiene el alumnado y su nivel de razonamiento, según el modelo de Van Hiele.

Se inicia esta fase con la elección de un nombre atractivo para los estudiantes y, que además, se utiliza como primera forma de implicación y motivación para el estudio de las curvas cónicas. Se ha elegido el siguiente:

CURVAS PARA ENCESTAR UN TRIPLE O USAR TU MÓVIL

Ilustración 11. Situación de aprendizaje: Curvas para encestar un triple o usar tu móvil

Nota. Adaptado de cancha de baloncesto con suelo de madera, por Jian Fan, 2020, iStock



Por medio del sistema de gestión de aprendizaje o LMS (Learning Management System), que se esté utilizando (Moodle, Google Classroom, Microsoft Teams, etc.), se irán enviado todos los recursos de la situación de aprendizaje: vídeos, cuestionarios, etc. Todos los contenidos de esta situación de aprendizaje irán precedidos por su nombre y la ilustración 12.

En la tabla 6 se presenta un resumen de las sesiones (S), tiempo estimado (T), tipo de agrupación (**Agrup.**), actividad o recurso audiovisual utilizado y, en su caso, el tipo de estructura cooperativa (**EC**) que se utiliza.

Tabla 6. Tabla de actividades de la fase de Indagación, elaboración propia.

S	T	Agrup.	Actividad / Recurso audiovisual
1	5'	Espacio Individual	Presentación UD , objetivos y conocimientos previos.
	15'		Vídeo: " Cónicas: del baloncesto a los cometas "
	15'		Cuestionario conocimientos previos.
1	10'	Grupo clase	Pequeña presentación y consultas.
	40'	Grupo base	Act. 1 Construcción de secciones cónicas. EC: Números iguales juntos
2	10'	Grupo base	Act. 1 Construcción de secciones cónicas. EC: Números iguales juntos
	40'	Grupo clase	Act. 1 Presentación de los artilugios y respuestas de las preguntas a la clase. Debate sobre los ángulos de corte y el ángulo del cono.

Espacio individual sesión 1 (antes de la clase):

La presentación de la situación de aprendizaje se realizará por medio del visionado de un vídeo llamado "[Cónicas: del baloncesto a los cometas](#)" de un programa llamado "más por

menos” de la Radio Televisión Española. Este vídeo a pesar de ser del año 1996, es muy ilustrativo y hace una presentación desde un punto de vista de la Geometría sintética, incluyendo aplicaciones prácticas y, definiendo, de manera implícita, los lugares geométricos de cada una de las curvas. Al final del vídeo se dejan dos preguntas, que incitan a la reflexión: “¿Qué llevó hace más de 2.000 años a Apolonio de Pérgamo, Arquímedes y a otros sabios griegos a dedicar, una parte tan importante de sus vidas, al estudio de las curvas cónicas? ¿fue solo por placer intelectual o por otra razón que desconocemos?”.

Además, se les envía en forma de **presentación PowerPoint**, un esquema de la unidad didáctica que se va a desarrollar en las distintas sesiones, los objetivos didácticos que se pretenden conseguir y por último los conocimientos previos necesarios más importantes. Todo este material está desarrollado en el [anexo II](#) de este trabajo.

El segundo objetivo, se conseguirá con la elaboración de un **cuestionario**, donde se realizarán las preguntas pertinentes para poder indagar sobre el nivel de razonamiento de cada estudiante, sus conocimientos previos y las posibles estructuras conceptuales inacabadas o erróneas. En el [Anexo III](#) se encuentra desarrollado este cuestionario.

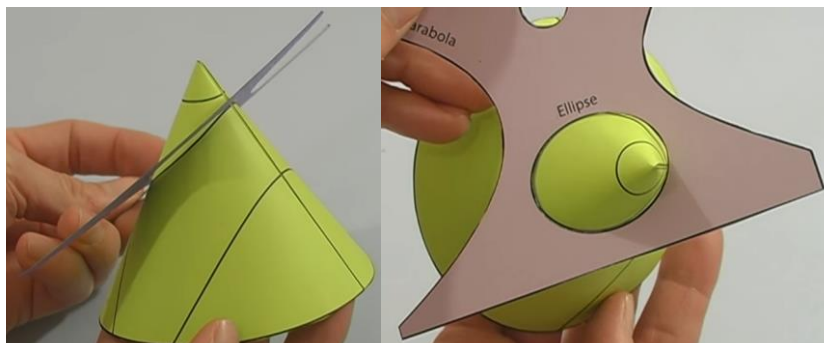
Espacio Grupal Sesiones 1 y 2:

En estas sesiones, se realizará una breve introducción de la situación de aprendizaje y se les preguntará a los estudiantes si tienen alguna duda al respecto. A continuación, se dispondrá el aula en pequeños grupos (grupos de base). Estos grupos los formarán entre 3 y 5 integrantes, seleccionados heterogéneamente en capacidades cognitivas y actitudinales. Estos grupos se mantendrán estables durante todas las actividades grupales. Cada uno de los miembros de un grupo, tendrá un cargo asignado y cierta independencia para su organización interna, normas, etc. (Esto se trabajará en las horas de tutorías).

La **actividad 1** consiste en construir curvas cónicas mediante la sección del cono. Se podrán utilizar distintos materiales manipulativo como cartulina, plastilina, zanahorias u otras verduras cónicas. Igualmente, se podrá utilizar un SGD, como GeoGebra, o programas de diseño 3D, como Sketchup. Los grupos podrán decidir cuantas y cuáles de estas actividades quieren realizar, incluso cada miembro de un grupo puede realizar una actividad diferente, aunque todos deberán saber cómo se han construido, para poder realizar la presentación posterior. En el [anexo IV](#), de actividades, se describen todas las maneras de construcción de curvas que se les ofrece a los estudiantes.

Ilustración 12. Construcción de curvas cónicas con cartulina

Nota. Adaptado de How to visualize conic sections with a paper model (vídeo), cutoutfoldup, 2018, https://www.youtube.com/watch?v=_zCWzPS-i4I



El objetivo final de esta actividad es presentar uno o varios de estos artefactos y responder a las siguientes preguntas:

- a) Que influye en el corte entre el plano y el doble cono infinito para la creación de las distintas curvas cónicas: círculo, elipse, parábola e hipérbola equilátera.
- b) Que dos ángulos son importantes conocer para la construcción de cónicas.
- c) Clasifica las curvas en función de los dos ángulos definidos anteriormente.

Para llevar a cabo esta actividad se utilizará la estructura cooperativa simple el “**número iguales juntos**” (Pujolàs et al., 2011), que consiste que solo uno de los integrantes de cada grupo tendrá que realizar la presentación en nombre de todo el equipo y, de ella, dependerá la calificación de todo el grupo.

Durante la primera sesión se realizará la actividad en los grupos base y, en la segunda sesión, se terminarán y se realizarán las presentaciones a todo el grupo clase. Además, tras cada presentación, se realizará un debate donde todos podrán intercambiar ideas, interactuar, conjeturar, etc.

5.6.2 Fase 2. Orientación dirigida

En esta segunda fase, se iniciará el nuevo conocimiento sobre curvas cónicas y se realizarán actividades guiadas para que los estudiantes puedan asimilar los conceptos, propiedades, etc. Se transitará entre la geometría sintética, con las definiciones de las curvas por medio de lugares geométricos, a la geometría analítica, donde, por medio del plano cartesiano, se utilizarán los lenguajes gráficos y algebraicos. Esta introducción de la geometría analítica se realizará observando su necesidad, sus ventajas e inconvenientes respecto a la geometría con regla y compás (sintética).

En la tabla 7 se presenta un resumen de las sesiones (**S**), tiempo estimado (**T**), tipo de agrupación (**Agrup.**), actividad o recurso audiovisual utilizado y, en su caso, el tipo de estructura cooperativa (**EC**) que se utiliza.

Tabla 7. Tabla de actividades de la fase de Orientación Guiada, elaboración propia.

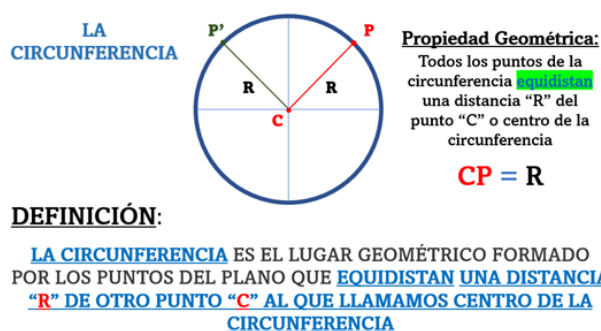
S	T	Agrup.	Actividad / Recurso
3	5'	Espacio	Vídeo: “ Lugares geométricos y curvas planas ”
	20'	Individual	Entrega: definición de una elipse como lugar geométrico
3	10'	Grupo clase	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados
	40'	Grupo base	Act. 2 Dibujar las curvas cónicas con regla y compás. EC: Lápices al centro
4	5'	Espacio	Vídeo: “ La Circunferencia ”
	10'	Individual	Cuestionario de comprobación del visionado del vídeo
4	10'	Grupo clase	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados
	40'	Grupo base	Act. 3 Ejercicios sobre circunferencias EC: El Número
5	5'	Espacio	Vídeo: “ La Elipse ”
	10'	Individual	Cuestionario de comprobación del visionado del vídeo
5	10'	Grupo clase	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados
	40'	Grupo base	Act. 4 Ejercicios sobre elipses EC: El Número
6	30'	Grupo base	Act. 5 Excentricidad y relación entre los parámetros a, b y c de la elipse, con GeoGebra. EC: 1-2-4
	20'	Grupo clase	Act. 5 Debate sobre la excentricidad y la relación entre los parámetros a (semieje mayor), b (semieje menor) y c (semidistancia focal).
7	5'	Espacio	Vídeo: “ La Hipérbola ”
	10'	Individual	Cuestionario de comprobación del visionado del vídeo
7	10'	Grupo clase	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados
	40'	Grupo base	Act. 6 Ejercicios sobre Hipérbolas EC: El Número
8	25'	Grupo base	Act. 7 Excentricidad y Asíntotas, con GeoGebra EC: 1-2-4
	25'	Grupo base	Act. 8 Construir con GeoGebra, Excentricidad y Asíntotas, pero con hipérbola no centrada y vertical, en vez de horizontal. EC: 1-2-4
9	5'	Espacio	Vídeo: “ La Parábola ”
	10'	Individual	Cuestionario de comprobación del visionado del vídeo
9	10'	Grupo clase	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados

	20'	Grupo base	Act. 9 Ejercicios sobre Parábolas EC: El Número
	20'	Grupo base	Act. 10 Ecuación cuadrática y factores A, B y C, con GeoGebra EC: 1-2-3
10	20'	Grupo base	Act. 11 Experimentar con el parámetro P, con GeoGebra. EC: 1-2-3
	30'	Grupo base	Act. 12 Construir con GeoGebra, parábola no centrada y horizontal, con todos sus elementos. EC: 1-2-4
11	5'	Espacio Individual	Vídeo: “ Cónicas Generales ”
	10'	Individual	Cuestionario de comprobación del visionado del vídeo
11	10'	Grupo clase	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados
	40'	Grupo base	Act. 13 Ejercicios sobre curvas cónicas en general EC: Lápices al centro
12	25'	Grupo base	Act. 14 Jugaremos con la ecuación general, con GeoGebra. EC: El Número
	25'	Grupo base	Act. 15 Construir con GeoGebra, curvas cónicas inclinadas y observar las ecuaciones que calcula el programa. EC: El Número

Espacio individual de las sesiones sesión 3, 4, 5, 7, 9 y 11 (antes de la clase):

La instrucción de las diferentes partes de la unidad didáctica se realizará con el visionado de vídeos cortos de elaboración propia. A continuación, los estudiantes tendrán que responder a preguntas de un cuestionario, que acompañarán a los recursos visuales. Estas repuestas serán enviadas, de manera individual, por medio del LMS utilizado. El docente, analizando los cuestionarios, podrá descubrir las dificultades y los conceptos erróneos o inacabados. Esta información será utilizada en el espacio grupal para ayudar a la correcta comprensión de los distintos conceptos. Todos los vídeos y los cuestionarios de comprobación de estas sesiones individuales se encuentran en el [anexo V](#).

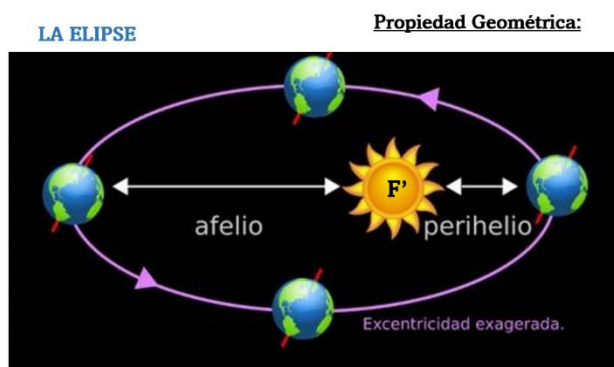
Ilustración 13. Imagen del vídeo de lugar geométrico, la circunferencia, elaboración propia.



En la **sesión 3**, por medio del vídeo titulado “[Lugares geométricos y curvas planas](#)”, se presentará a los estudiantes el siguiente contenido: el concepto de lugar geométrico, con la

explicación de la mediatriz, la bisectriz y de la circunferencia. La pregunta o reto, que deben responder, es la definición de la elipse como lugar geométrico.

Ilustración 14. Imagen vídeo lugar geométrico, pregunta sobre la elipse, elaboración propia.



En la **sesión 4**, por medio del vídeo titulado “[La Circunferencia](#)”, se presentará a los estudiantes el siguiente contenido: elementos de una circunferencia, la ecuación canónica y general a partir de su definición como lugar geométrico, como distinguir estas curvas dada la ecuación general y, por último, las propiedades principales.

En la **sesión 5**, por medio del vídeo titulado “[La Elipse](#)”, se presentará a los estudiantes el siguiente contenido: descripción de los elementos de la elipse, la ecuación canónica y general a partir de su definición como lugar geométrico, como distinguir estas curvas dada la ecuación general y, por último, el concepto de excentricidad y la relación entre la semidistancia focal (c), el semieje mayor (a) y semieje menor (b).

En la **sesión 7**, por medio del vídeo titulado “[La Hipérbola](#)”, se presentará a los estudiantes el siguiente contenido: descripción de los elementos de la Hipérbola, la ecuación canónica y general a partir de su definición como lugar geométrico, como distinguir estas curvas dada la ecuación general, las asíntotas y, por último, el concepto de excentricidad y la relación entre la semidistancia focal (c), el semieje mayor (a) y semieje menor (b).

En la **sesión 9**, por medio del vídeo titulado “[La Parábola](#)”, se presentará a los estudiantes el siguiente contenido: descripción de los elementos de la Parábola, definición y la ecuación canónica y general a partir de su definición como lugar geométrico, como distinguir estas curvas dada la ecuación general, ecuación cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) y sus coeficientes (a , b y c) y, por último, el concepto de excentricidad de la parábola.

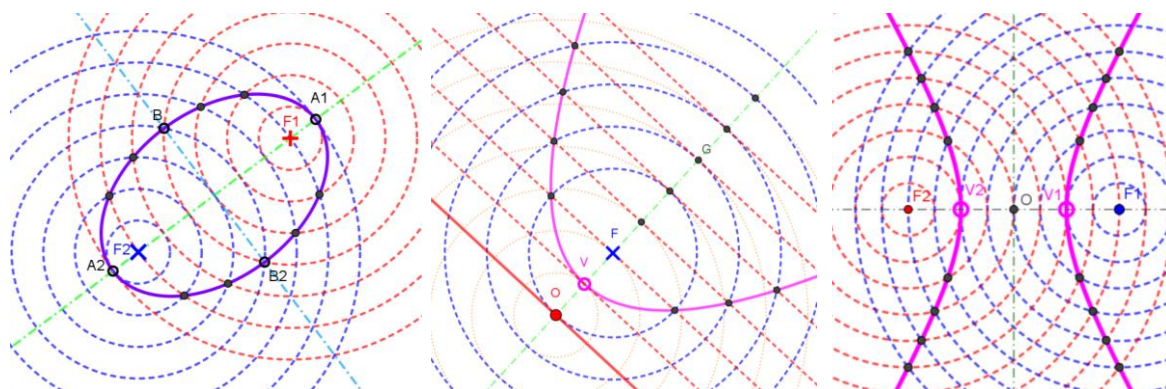
En la **sesión 11**, por medio del vídeo titulado “[Cónicas Generales](#)”, se presentará a los estudiantes el siguiente contenido: Ecuación General y el término xy , las cónicas degeneradas e identificación de cónicas según los coeficientes de la ecuación general.

Espacio Grupal de las sesiones 3 a la 12

Todas las sesiones de clase se comenzarán resolviendo las preguntas que los estudiantes puedan tener sobre los contenidos vistos. Además, el docente, con el análisis realizado de los cuestionarios, intentará que se resuelvan todos los conceptos erróneos o incompletos. Estos últimos se clasificarán según puedan ser resueltos por los propios alumnos o con intervención directa del profesor. Tras esta introducción de consultas, se iniciarán las actividades según los grupos base ya formados desde el principio. Todas las actividades de esta fase están desarrolladas en el [anexo IV](#) de este documento. A continuación, se realiza un resumen de las distintas actividades que se llevarán a cabo en esta fase de orientación dirigida.

La **actividad 2** se realizará con la estructura cooperativa de “**lápices al centro**” (Pujolàs et al., 2011), y, consistirá en: dibujar las gráficas de la elipse, la parábola y la hipérbola sin el uso de los ejes coordenados (geometría sintética). Podrán utilizar tanto la regla y el compás, como el programa de GeoGebra, aunque este último, sin el uso de la vista algebraica y los ejes cartesianos. A estos gráficos habrá que incorporar todos sus elementos: Focos, directriz, vértices, ejes de simetría, semiejes, asíntotas, etc.

Ilustración 15. Dibujos de cónicas con regla y compás. GeoGebra.



Para esta actividad, se entregará a cada grupo una guía en formato papel y digital mediante el LMS. Junto con las gráficas, deberán responder de manera individual a las siguientes preguntas abiertas: ¿Te parece una tarea sencilla realizar estas curvas con la unión de puntos?, ¿crees que es muy preciso el uso del compás y la regla? ¿Qué utilizan los SGD, como GeoGebra, para obtener más precisión? Los grupos deberán entregar las gráficas y las respuestas a las preguntas, mediante el sistema de gestión de aprendizaje.

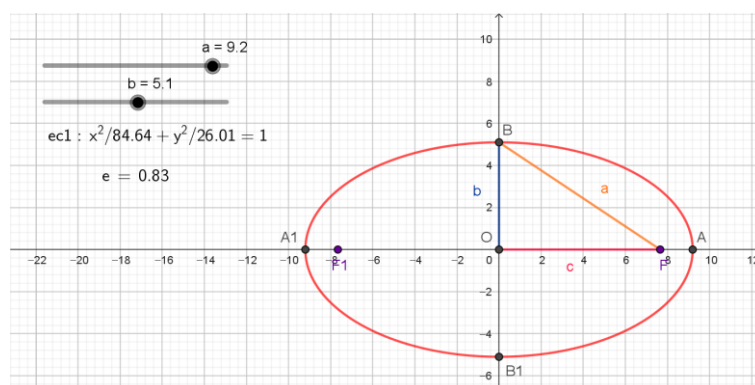
En la **actividad 3** se utiliza la estructura cooperativa de “**El número**” (Pujolàs et al., 2011) y consiste en: resolver ejercicios sobre las ecuaciones canónicas y general de la **circunferencia**, utilizando un lenguaje algebraico y geométrico y, ayudados, por el lenguaje

natural. Los ejercicios serán resueltos por distintos alumnos elegidos al azar (El número) en la pizarra. Tendrán que explicar con detalle los pasos que realizan y los razonamientos realizados por el grupo. El profesor deberá fomentar el debate, dejando que los estudiantes realicen sus propias conjeturas y reflexiones. Por otro lado, el docente deberá observar el lenguaje utilizado por el alumnado para ir mejorándolo o corrigiendo, en los casos que sea necesario.

La **actividad 4** también utiliza la estructura cooperativa de “**El Número**” (Pujolàs et al., 2011) y, consiste, al igual que la anterior, en resolver ejercicios sobre las ecuaciones canónicas y general, utilizando un lenguaje algebraico y geométrico ayudados por el lenguaje natural. El profesor deberá fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias conjeturas y reflexiones.

Para la **actividad 5** se utilizará la estructura cooperativa de “**1-2-4**” (Pujolàs et al., 2011). En la primera mitad de la sesión, la actividad consiste en construir con GeoGebra una elipse genérica, donde se jugará con la excentricidad y, también, se mostrará la relación entre los parámetros a , b y c . En la segunda mitad, se realizará un debate sobre las conclusiones a las que han llegado los distintos grupos, sobre la excentricidad y la relación de los parámetros de las elipses. El profesor, como en los casos anteriores, debe fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias conjeturas y reflexiones. El docente también vigilará el lenguaje utilizado, corrigiendo al alumnado cuando sea necesario.

Ilustración 16. Excentricidad de la elipse con GeoGebra, elaboración propia.



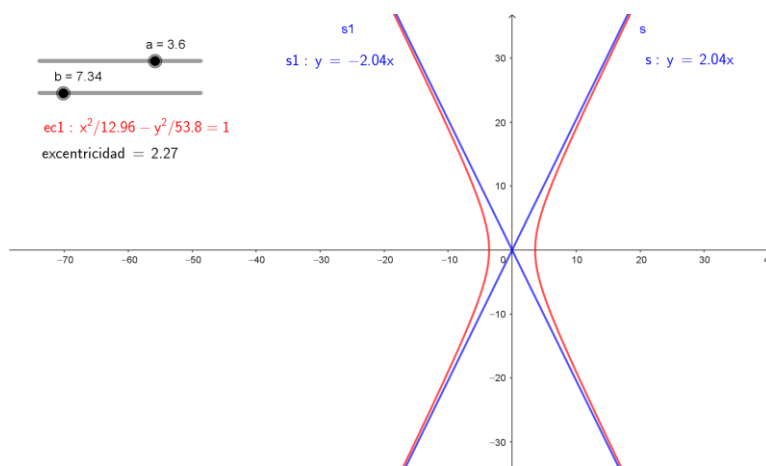
En la **actividad 6** de nuevo se utiliza la estructura cooperativa de “**El Número**” (Pujolàs et al., 2011). La actividad consiste en resolver ejercicios sobre las ecuaciones canónicas y general de hipérbolas. Se seguirán los mismos criterios que en las actividades 3 y 4.

La **actividad 7**, que utiliza la estructura cooperativa de “**1-2-4**” (Pujolàs et al., 2011), consiste en: construir, con ayuda de una guía, un modelo de hipérbola horizontal, centrada en

los ejes coordenados y con sus asíntotas, con el programa GeoGebra. Esta curva dependerá de dos variables (deslizadores) los parámetros “a” (semieje mayor) y el parámetro “b” (semieje menor). A partir de estas variables, se calculan “c” (semidistancia focal), la excentricidad y las asíntotas. Hay que jugar con los parámetros y ver cómo se comporta la hipérbola.

En la **actividad 8**, se les pedirá que realicen una construcción similar a la de la actividad 7, pero que sea vertical y no centrada en el eje de coordenadas. En este caso también se seguirá la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al, 2011). Como en el caso anterior, se les preguntará cómo se comporta la curva cuando jugamos con los distintos valores de a y b, así como la influencia de la excentricidad.

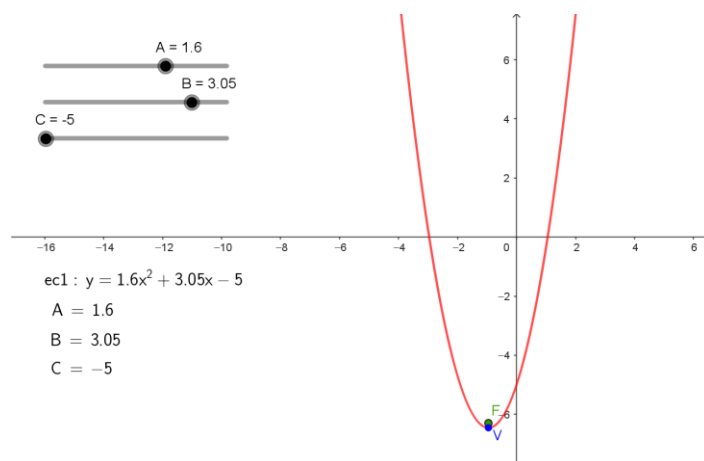
Ilustración 17. Excentricidad y Asíntotas de hipérbolas con GeoGebra, elaboración propia.



En la **actividad 9** de nuevo se utiliza la estructura cooperativa de “**El Número**” (Pujolàs et al., 2011). La actividad consiste en resolver ejercicios sobre las ecuaciones canónicas y general de la parábola, además de la ecuación cuadrática, más conocida por los estudiantes. Se seguirán los mismos criterios que en las actividades 3 y 4.

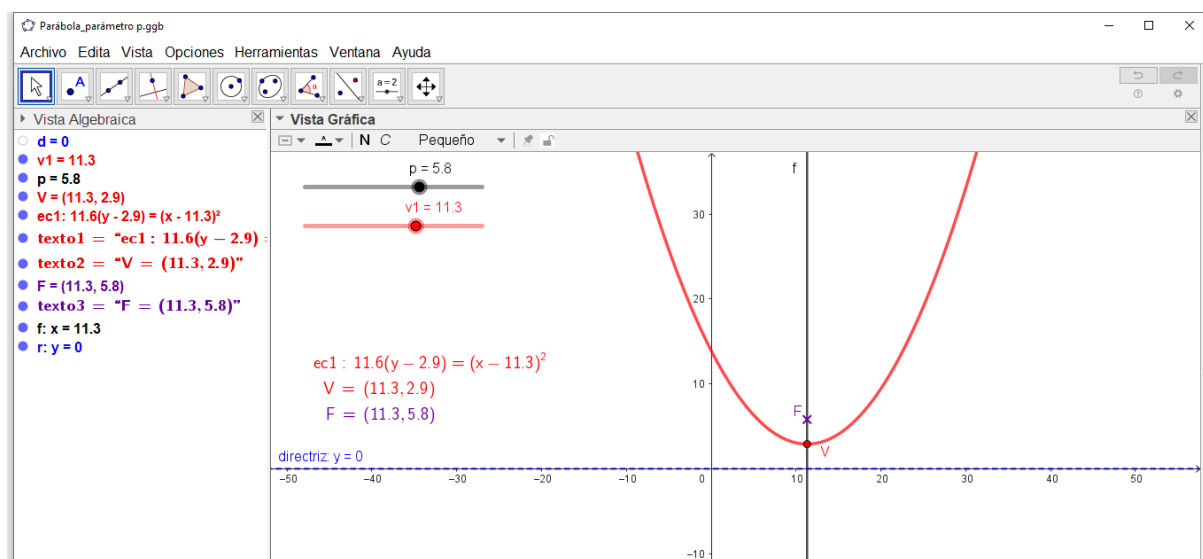
La **actividad 10**, que utiliza la estructura cooperativa de “**1-2-4**” (Pujolàs et al., 2011), consiste en: construir una parábola con la ecuación cuadrática ($y = Ax^2 + Bx + C$), siendo variable (deslizadores) sus tres factores (A, B y C). Hay que jugar con estos factores y ver cómo influyen en la parábola. Se fomentará que se realicen preguntas como ¿Qué pasa cuando $A=0$? ¿qué ocurre cuando variamos C ?, etc.

Ilustración 18. Ecuación cuadrática de la parábola con GeoGebra, elaboración propia.



Con la **actividad 11** también se usará la estructura cooperativa “1-2-4” (Pujolàs et al., 2011), pero en este caso, se les pedirá a los alumnos que construyan una hipérbola en GeoGebra a partir de la ecuación canónica. La parábola será horizontal y con el vértice centrado en el origen de coordenadas. El parámetro p (distancia de la directriz al foco) será variable en forma de deslizador. Se pide observar cómo influye el parámetro p , sobre todo cuando cambia de signo.

Ilustración 19. Parábola no centrada en el origen con GeoGebra, elaboración propia.

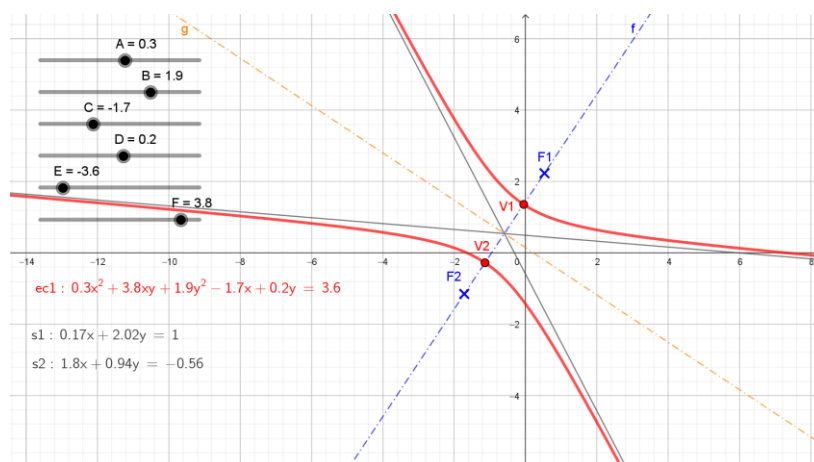


En la **actividad 12** se les pide a los alumnos que realicen una construcción similar a la de la actividad 11 pero, en este caso, la parábola debe ser vertical y con el vértice no centrado en el eje de coordenadas. Es decir, la coordenada “ x ” del vértice será otro deslizador variable. En este caso también se seguirá la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al, 2011). Como en el caso anterior, se les preguntará cómo se comporta la curva cuando jugamos con las dos variables, la “ p ” y la “ Vx ”.

En la **actividad 13** se utiliza la estructura cooperativa de “**El Número**” (Pujolàs et al., 2011). La actividad consiste en resolver ejercicios sobre la ecuación general de las curvas cónicas general. Se seguirán los mismos criterios que en las actividades 3 y 4.

La **actividad 14**, que utiliza la estructura cooperativa de “**1-2-4**” (Pujolàs et al., 2011), consiste en: construir una curva cónica con la ecuación general ($Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E + Fxy = 0$), siendo variable (deslizadores) todos sus factores (A, B, C, D, E y F). Se comenzará dejando el factor F (xy) nulo y, variando el resto. Después se incluirá un valor distinto de cero a F y así, se irá investigando que les pasa a las distintas curvas. Hay que jugar con estos factores y ver cómo influyen en la parábola. Se fomentará que se realicen preguntas como ¿Si ha A y B son nulos? ¿Cuándo se consiguen las curvas degeneradas (punto, una recta o dos rectas)?, etc.

Ilustración 20. Curvas cónicas con la ecuación general. GeoGebra. Elaboración propia.



Con la **actividad 15** también se usará la estructura cooperativa “**1-2-4**” (Pujolàs et al., 2011), pero en este caso, se les pedirá a los alumnos que construyan con GeoGebra distintas curvas cónicas que no sean ni horizontales ni verticales. Se pedirá que vayan observando la ecuación general que el programa calcula para cada una de ellas. Se fomentará que se realicen preguntas como ¿siempre está término “xy”? ¿qué le ocurre al término “ $F^2 - 4AB$ ”? , etc.

5.6.3 Fase 4. Orientación libre

En esta fase ya se pueden introducir actividades más complejas, con el objetivo de aplicar los conocimientos adquiridos en las fases anteriores, tanto de contenido como de lenguaje matemático (Fouz, 2005). Esto se consigue planteando problemas abiertos, que puedan desarrollarse de diversas formas y que admitan diferentes soluciones. Como bien señalan Corberán et al. (1994), estos no deben ser los típicos ejercicios que, para su solución, solo hace falta recordar (memorizar) algún concepto o método y utilizarlo directamente. Los problemas adecuados, contendrán varios conceptos y/o propiedades que los estudiantes deberán combinar

de forma adecuada y, además, fomentarán la justificación de sus ideas y la utilización de un vocabulario adecuado. “La misión del profesor es dar a los estudiantes indicios sobre la vía de solución de los problemas y fomentar la discusión sobre diferentes alternativas cuando las haya.” (Corberán et al., 1994, p. 27)

En la tabla 8 se presenta un resumen de las sesiones (**S**), tiempo estimado (**T**), tipo de agrupación (**Agrup.**), actividad o recurso audiovisual utilizado y, en su caso, el tipo de estructura cooperativa (**EC**) que se utiliza.

Tabla 8. Tabla de actividades de la fase de Orientación Libre. Elaboración propia.

S	T	Agrup.	Actividad / Recurso
13	5'	Espacio Individual	Vídeo: “ Historia y Aplicaciones de las Secciones Cónicas ”
	10'		Cuestionario de comprobación del visionado del vídeo
13	10'	Grupo clase	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados
	40'	Grupo base	Act. 16 Problemas abiertos y contextualizados. Aplicaciones de las curvas cónicas. EC: Números iguales juntos
14	5'	Espacio Individual	Vídeo 1: “ Reflexión de las cónicas ”
	10'		Vídeo 2: “ Whispering Gallery ”
14	10'	Grupo clase	Cuestionario de comprobación del visionado del vídeo
	40'	Grupo base	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados
15	5'	Espacio Individual	Act. 17 Problemas abiertos y contextualizados. Reflexión
	10'		EC: Números iguales juntos
15	5'	Espacio Individual	Vídeo: “ Las leyes de Kepler ”
	10'		Cuestionario de comprobación del visionado del vídeo
15	10'	Grupo clase	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados
	40'	Grupo base	Act. 18 Problemas abiertos y contextualizados. Orbitas cónicas
15	10'	Espacio Individual	EC: Números iguales juntos
	40'		

Espacio individual de las sesiones sesión 13, 14 y 15 (antes de la clase):

En esta fase la instrucción consistirá en exponer las aplicaciones que estas curvas tienen en nuestras vidas, el arte, la arquitectura, la ingeniería, la física, la música, etc. Tras el visionado de los vídeos, se les presenta a los estudiantes un cuestionario con preguntas que deben responder, para comprobar la asimilación de los conceptos. Las respuestas al formulario serán enviadas, de manera individual, por medio del LMS utilizado, como viene siendo la dinámica habitual. El docente, analizando las respuestas, podrá descubrir las dificultades y los conceptos erróneos o inacabados. Esta información será utilizada en el espacio grupal para ayudar a la correcta comprensión de los distintos conceptos.

En la **sesión 13**, tendrán que visionar el vídeo titulado “ [Historia y aplicaciones de las curvas cónicas en la vida cotidiana](#)” (Paganerius, 2020). En este vídeo, de unos 9 minutos, se hace una revisión histórica muy interesante que culmina con un pequeño extracto de aplicaciones en los que se utilizan este tipo de secciones. La revisión histórica parte de los matemáticos y geómetras griegos, para finalizar con Johannes Kepler, en el siglo XVII. En cuanto a las aplicaciones, menciona entre otras: la medicina, el transporte, los deportes, una cocina ecológica, la astronomía y la transmisión de señales. El fenómeno de la flexión y las órbitas de los astros, se tratarán en sesiones posteriores, debido a su importancia y, a que suelen ser, de gran interés por el alumnado.

En la **sesión 14**, de manera particular, se propone el visionado de dos vídeos de corta duración. El primero, de tan solo 3 minutos, se titula “ [Reflexión de las Cónicas](#)”. En este vídeo, la autora ha sido capaz de resumir y explicar claramente en que consiste este fenómeno. La exposición se inicia con la explicación del concepto de reflexión, así como sus ángulos de incidencia y reflejado. A continuación, desarrolla como se lleva a cabo este fenómeno en las superficies curvas, por medio de la tangente. Por último, enseña que ocurre con la parábola, la elipse y la hipérbola.

El segundo vídeo se titula “[Whispering Gallery](#)” y nos muestra una curiosa zona de la **estación central de Nueva York**, denominada Galería de los secretos o **Whispering gallery** en inglés. Esta zona tiene una bóveda elíptica y en las esquinas están los focos. A pesar del ruido existente en este edificio, que siempre está muy concurrido, se puede escuchar con suficiente nitidez la canción que un cantante está interpretando en la otra esquina de la galería abovedada.

En la **sesión 15**, tendrá que visionar el vídeo titulado “[Las leyes de Kepler](#)”, extraído del canal de YouTube **Ciencias Para Todos**. En este vídeo, de unos 11 minutos, se hace una revisión del contexto histórico de la astronomía, sobre todo de la época de Johannes Kepler; a continuación, realiza una descripción de las tres leyes de Kepler; y, para finalizar, hace una mención a la teoría de la relatividad de Einstein.

Los detalles de los vídeos utilizados y los cuestionarios de comprobación del visionado de los mismos se encuentran en el [anexo V](#).

Espacio Grupal de las sesiones 13 a la 15

Al igual que en la fase anterior, todas las sesiones de clase comenzarán resolviendo las preguntas que los estudiantes puedan tener sobre los contenidos vistos. Además, el docente, con

el análisis realizado de los cuestionarios, intentará que se resuelvan todos los conceptos erróneos o incompletos. Estos últimos, se clasificarán según puedan ser resueltos por los propios alumnos o con intervención directa del profesor. Tras esta introducción de consultas, se iniciarán las actividades según los grupos base ya formados desde el principio. A continuación, se describen las distintas actividades que se llevarán a cabo en esta fase de orientación libre.

Las **actividades 16, 17 y 18** se realizan con la estructura cooperativa “**El Número**” (Pujolàs et al., 2011) y, consistirá en la realización de problemas abiertos y contextualizados sobre aplicaciones de las curvas cónicas. Los grupos tendrán que resolver el problema y, después, un estudiante en representación de su grupo expondrá el problema para toda la clase. El resto alumnos podrán intervenir y discutir los puntos en los que no estén de acuerdo. Cada grupo, siguiendo los criterios de la rúbrica del [anexo IX](#), realizarán una autoevaluación de sus trabajos. Todos los problemas contextualizados de esta fase se encuentran desarrollados en el [anexo VI](#). A continuación, se realiza un breve resumen de estos problemas.

En la **actividad 16** los problemas tratarán sobre: el primero, cálculo de un punto en el plano de Cádiz que sea equidistante a otros tres dados, para encontrar la mejor ubicación de una nueva casa; el segundo, versa sobre el cálculo de la ecuación de la hipérbola que tiene la estructura metálica de las torres de electricidad de la Bahía de Cádiz.

En la **actividad 17** los problemas tratarán sobre: El primero, encontrar la elipse de la Galería de los secretos, que se encuentra en la National Statuary Hall del Capitolio en Washington D.C.; el segundo, se trata de diseñar antenas parabólicas comerciales para las señales de la televisión digital.

En la **actividad 18** los problemas tratarán sobre: en el primero, calcular la órbita elíptica del cometa Halley, conocido perihelio y la excentricidad de la curva; En el segundo, hay que calcular la órbita de la tierra conocido el perihelio y el afelio.

5.6.4 Fase 5. Integración

En esta fase ya no se trabajarán contenidos nuevos, se trata de adquirir una visión general de todo lo aprendido y conectarla con otros conocimientos anteriores, incluso multidisciplinarios. En la tabla 9 se presenta un resumen de las sesiones (**S**), tiempo estimado (**T**), tipo de agrupación (**Agrup.**), actividad o recurso audiovisual utilizado y, en su caso, el tipo de estructura cooperativa (**EC**) que se utiliza.

Tabla 9. Tabla de actividades de la fase V. Integración. Elaboración propia.

S	T	Agrup.	Actividad / Recurso
16	10'	Grupo clase	Aclaración de dudas y posibles errores de conceptos detectados
	40'	Grupo base	Act. 19 (inicio). Curvas cónica en tu provincia. EC: Grupo de Investigación
17	50'	Grupo clase	Act. 20 Preparación evaluación final de la unidad. EC: El saco de dudas
18	50'	Grupo base	Act. 19 (finalización). Presentación de la investigación a la clase Debate y Coevaluación por medio de rúbrica.
19	50'	Individual	Act. 21 Realización de la evaluación final

Espacio Grupal de las sesiones 16 a la 19

Al igual que en la fase anterior, todas las sesiones de clase comenzarán resolviendo las preguntas que los estudiantes puedan tener, sobre todo lo visto o sobre los trabajos que están realizando. Tras esta introducción de consultas, se iniciarán las actividades según los grupos base ya formados desde el principio. A continuación, se describen las distintas actividades que se llevarán a cabo en esta fase de integración.

La **actividad 19** se realiza con la estructura cooperativa compleja denominada “**Grupos de investigación**” (Pujolàs et al., 2011). La investigación, que se ha llamado “**Curvas cónicas en tu provincia**”, consiste en la búsqueda de las cuatro curvas en el entorno de la provincia de Cádiz. Pueden estar en la arquitectura urbana (plazas, puentes, fuentes), edificios singulares, logotipos de empresas, alumbrado público, arte, etc. Se les solicita que las descubran y que calculen sus ecuaciones y todos sus elementos. Los equipos deben realizar todas las fases de una investigación: planificación, desarrollo, análisis y síntesis, presentación al resto de la clase y evaluación. En este caso se plantea una coevaluación entre los estudiantes y el docente. El desarrollo de esta actividad se encuentra en el [anexo VII](#) y la rúbrica en el [anexo IX](#).

Esta actividad se realiza parte en clase y parte fuera de ella, pero siempre en pequeños grupos y de manera cooperativa. Se utilizarán dos sesiones de clase, la 16 y la 18, para su desarrollo. En la **sesión 16**, se iniciará el trabajo y el docente ayudará a los grupos a organizarse y a planificar, posiblemente lo más complicado para los estudiantes. En la **sesión 18**, se expondrán los trabajos al resto de la clase y se realizará una coevaluación entre todos los grupos y el profesor. Para la coevaluación se utilizará una rúbrica que será entregada desde el principio en las instrucciones de la investigación ([anexo VII](#)). El docente prestará ayuda en todas las fases de la investigación y vigilará que todos los miembros del equipo participen, cada uno en función de sus capacidades y preferencias (Pujolàs et al., 2011).

Para la **actividad 20** se utilizará la estructura cooperativa “**El saco de dudas**” (Pujolàs et al., 2011), que consistirá en la recopilación de todas las dudas que los estudiantes tengan. Agrupados por los equipos base, el alumnado, de manera individual, escribe las consultas o dudas que tiene en un tercio de folio. A continuación, estas dudas, la exponen al resto de su equipo, para ver si algún integrante puede resolverla. Si no es respondida, se introduce en el “saco de dudas” que tendrá el docente. En la segunda parte de la sesión, el profesor irá sacando las dudas del saco y, el resto de los estudiantes de la clase, intentarán resolverla. En última estancia, será el docente el que resuelva la duda planteada, si nadie es capaz de hacerlo o se hace de manera incorrecta. El profesor fomentará el debate y la reflexión de los estudiantes y, en todo momento, debe vigilar el lenguaje utilizado por los discentes.

La **actividad 21** consistirá en la **evaluación final** que se realizará de manera individual. El objetivo de esta última actividad es indagar los progresos que, cada uno de los estudiantes, ha alcanzado. Consistirá en la realización de ejercicios y problemas contextualizados, de distinto nivel de complejidad. Existirán preguntas cerradas y abiertas, donde se pueda detectar el nivel de razonamiento alcanzado por los distintos integrantes de la clase. Esta evaluación se puede encontrar en el [anexo VIII](#).

5.7 Evaluación

Atendiendo a la legislación vigente, principalmente lo recogido en la Orden de 30 de mayo (2023) de la Junta de Andalucía, la evaluación debe ser continua, competencial, formativa, diferenciada y objetiva. Por otro lado, deberán tener como referentes los criterios de evaluación, para poder medir el grado de consecución de las competencias específicas. Por último, es responsabilidad del docente evaluar tanto el proceso de aprendizaje como su propia práctica docente.

Siguiendo el texto de la Orden de 30 de mayo (2023), los docentes deben evaluar de manera **integradora**, porque tienen en cuenta todo el currículo, pero, a su vez, pueden evaluar de manera **diferenciada** la materia que imparten. Por otro lado, los docentes son responsables de realizar una evaluación **continua**, es decir, inmersa en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje y que tiene en cuenta el progreso del alumnado.

La **finalidad de la evaluación**, en todo caso, debe ser detectar las dificultades en el momento que se producen, averiguar sus causas y adoptar las medidas necesarias para que el alumnado adquiera las competencias clave. Para ello, será necesario que la evaluación sea **formativa** y que proporcione información de calidad, tanto al discente como al docente, con el objetivo de mejorar tanto los procesos como los resultados.

Para finalizar, la orden de 30 de mayo (2023), especifica que el alumnado tiene derecho a una evaluación **objetiva** y, añade que, el estudiante debe ser valorado y reconocido por su dedicación, esfuerzo y rendimiento y, además, que lo comprometa con la mejora de su propia educación. Para conseguir esta objetividad y **transparencia**, los estudiantes tienen el derecho de ser informados sobre los criterios de evaluación, los procedimientos de evaluación y los criterios de evaluación y calificación.

El desarrollo de la unidad didáctica propuesta en este trabajo se adapta perfectamente a estos requerimientos legislativos de evaluación. Será **integrada y diferenciada**, ya que todo el desarrollo está basado en las concreciones curriculares expuestas en el punto 5.2. de este trabajo. Se realizará una **evaluación continua** durante todo el proceso de enseñanza y aprendizaje: desde una **evaluación inicial** en la fase de indagación; una evaluación **continua y formativa**, con retroalimentaciones continuas y rápidas, durante las fases de orientación e integración. En este proceso, además, el docente analizará las dificultades, las posibles causas y tomará decisiones para su resolución; y, por último, una **evaluación sumativa final**, con la finalidad de conocer si se han alcanzado los objetivos de aprendizaje marcados y coherentes con los criterios de evaluación.

Para conseguir la **objetividad y transparencia** que nos marca la legislación vigente, se utilizarán diversos **procedimientos** de evaluación, **instrumentos** de evaluación y **criterios de calificación**, que se desarrollan en los apartados siguientes.

5.7.1 Evaluación del Alumnado

Para el desarrollo de este apartado vamos a contestar a las siguientes preguntas: ¿**qué** se va a evaluar?, ¿**cuándo** se va a evaluar?, ¿**cómo** se va a evaluar? y ¿**quién** evalúa? Con esto quedará especificado el sistema de evaluación seguido en la unidad didáctica de este TFM.

La primera pregunta, ¿**Qué se va a evaluar?**, tiene como respuesta: se van a evaluar los **criterios de evaluación** desarrollados en el [punto 5.2.3.](#) de este trabajo, y que son coherentes con los **objetivos didácticos** propuestos en el [punto 5.3.](#)

Para responder a la segunda pregunta, tendremos que marcar los distintos **momentos de la evaluación**. Se iniciará en la fase de indagación con una **evaluación inicial**, con el objetivo de indagar sobre los conocimientos previos y el nivel de razonamiento, según el nivel de Van Hiele, de los distintos estudiantes. Esta evaluación inicial no contará para la calificación oficial de los estudiantes. Durante las siguientes fases (orientación dirigida, orientación libre e integración) se realizará una **evaluación continua y formativa**, tanto de los visionados de los

vídeos (espacio individual en casa), como de las distintas actividades que se realizan en el espacio grupal, tanto en clase como fuera de ella. Y, por último, en la última actividad de la fase de integración, se realizará una **evaluación final**.

La tercera pregunta, **¿cómo se va a evaluar?**, se va a resolver describiendo los procedimientos y los instrumentos de evaluación durante todo el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Tabla 10. Procedimientos, instrumentos y agente evaluador. Elaboración propia.

Tipo de Actividad	Procedimiento de Evaluación	Instrumento de Evaluación	Agente Evaluador
Vídeos Instruccionales	Prueba específica evaluación	Diana de evaluación	Autoevaluación
Act. 2. Graficar las cónicas	Análisis de las producciones	Rúbrica	Docente
	Observación Sistemática	Escala de observación	Docente
Act. 3, 4, 6, 9 y 13 Ejercicios	Análisis de las producciones	Rúbrica	Coevaluación
	Observación Sistemática	Escala de Observación	Docente
Act. 5, 7, 8, 10, 11, 12, 14 y 15 GeoGebra	Análisis de las producciones	Rúbrica	Docente
	Debates	Escala de observación	Docente
	Observación Sistemática	Escala de observación	Docente
Act. 16, 17 y 18 Problemas abiertos	Análisis de producciones	Rúbrica	Coevaluación
	Observación Sistemática	Escala de observación	Docente
Act. 19 Trabajo de Investigación	Análisis de las producciones	Rúbrica	Docente
	Presentación Oral y Debate	Escala de observación	Coevaluación
	Observación Sistemática	Escala de observación	Docente
Act. 20 Saco de dudas	Observación Sistemática	Escala de observación	Docente
Act. 21 Evaluación final	Prueba específica	Rúbrica	Docente

Atendiendo a la Orden de 30 mayo (2023) de la Junta de Andalucía, los instrumentos de evaluación deben ser **variados y coherentes con los criterios de evaluación y adaptados a la diversidad** del aula. Para el cumplimiento de esto, en todos los instrumentos de evaluación vendrán especificados, como mínimo, los siguientes ítems: los criterios de evaluación, los indicadores de logro y una calificación numérica del 0 al 10. En la tabla 11 se exponen los criterios de evaluación para cada instrumento de evaluación y actividad realizada.

Por último, trataremos la pregunta **¿quién va a evaluar?** Siguiendo la legislación vigente, se fomentará la **coevaluación y evaluación entre iguales**. Se utilizará la técnica de la **autoevaluación** en las actividades con estructuras cooperativas “El número”, para la resolución de ejercicios y problemas contextualizados. En las presentaciones orales de la actividad 19 de investigación, se utilizará la técnica de la **evaluación entre iguales**. Cada grupo base evaluará, mediante una escala de observación entregada antes, al resto de grupos. En ambos casos, además, estas producciones y las presentaciones las valorará el docente, por lo que, en la tabla 11, se describe como coevaluación.

Tabla 11. Criterios de evaluación por actividad. Elaboración propia.

Nota: Inst. Eva.: instrumento de evaluación, Crit. Eva.: criterio de evaluación, Act.: actividad.

Competencia Específica	1		2	3	5	6		7		8		9		
Inst. Eva. ↓ Crit. Eva. →	1.1	1.2	2.1	3.2	5.2	6.1	6.2	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	9.3
Diana de evaluación Vídeos instruccionales			X		X		X		X		X			
Rúbrica Act. 2. Graficar curvas cónicas				X	X			X			X			
Rúbrica Act. 3, 4, 6, 9 y 13. Resolver ejercicios					X				X		X			
Rúbrica Act. 5, 8, 7, ..., 15. Trabajar con GeoGebra				X	X			X	X		X			
Rúbrica Act. 16, 17, 18 y 19. Problemas abiertos e Investigación	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
Rúbrica Act. 21 Evaluación Final	X	X	X		X	X		X	X	X	X			
Escala observación EC Estructuras Cooperativas										X	X	X	X	X
Escala observación PO Presentaciones Orales	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

5.7.2 Evaluación del Proceso de Enseñanza y la Práctica Docente

Normalmente, se centra la atención en la evaluación y calificación del alumnado, pero, la legislación también recuerda la necesidad de evaluar la propia práctica docente. La finalidad, al igual que en el caso de la evaluación del aprendizaje del alumnado, es **la mejora continua** de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para esta evaluación se utilizarán dos fuentes de retroalimentación: por un lado, la del alumnado y, por otra, las reflexiones del propio docente o grupo de docentes encargados del diseño y la planificación de la unidad didáctica.

Para la obtención de información de los estudiantes, se utilizará un **cuestionario** que tiene tres partes diferenciadas, y, cada una de ellas, evalúa: a) las **habilidades del docente**

según el [modelo TPACK y los roles del profesor](#), descritos en Santiago y Bergmann (2018); b) El grado de **motivación del alumnado**; c) Las **metodologías y evaluación** seguidas en la unidad didáctica. Este cuestionario se trasladará a 3 tres **dianas de evaluación** que ayudarán a visualizar los indicadores de logro de los aspectos analizados.

Para la segunda fuente de información, **el docente**, además de una reflexión continua durante todo el proceso de enseñanza y aprendizaje, al finalizar la unidad didáctica, evaluará, por medio de un cuestionario, con escala de valoración, si se han cumplido los siguientes ítems: **objetivos** didácticos, la **planificación y temporización**, **metodologías y agrupamientos**, **recursos** y materiales didácticos y, por último, la **evaluación**. Los cuestionarios y las dianas de evaluación están desarrollados en el [anexo X](#).

Ilustración 21. Ejemplo de diana de evaluación habilidades del profesor. Elaboración propia.



6 CONCLUSIONES Y VALORACIÓN CRÍTICA

Dentro del área de las matemáticas, la geometría es una de las ramas donde más dificultades encuentran los alumnos, en parte, debido al modelo tradicional de enseñanza (Arce et al., 2019). Por otro lado, el aprendizaje de esta materia es de gran importancia, tanto por ser parte de nuestra cultura, como por su carácter instrumental (Barrantes y Balletbo, 2012). Además, como se ha indicado, la comunidad autónoma de Andalucía se encuentra a un nivel inferior de competencia matemática, con respecto a otras comunidades y de otros países de nuestro entorno, como se desprende del último informe PISA (OCDE, 2023).

Por todo lo anterior, este trabajo pretende mejorar el proceso de aprendizaje y enseñanza de la geometría, desarrollando una situación de aprendizaje en la que se utilizan estrategias didácticas activas y significativas para el alumnado. La metodología central utilizada es el aprendizaje invertido que, principalmente, proporciona una mejor eficiencia y calidad de los tiempos empleados. Los pilares de esta técnica didáctica son que **la instrucción se traslada al espacio individual** y la importancia de convertir el **espacio grupal en un lugar de aprendizaje activo**. En este sentido, hay que recalcar que, aunque el material audiovisual que se prepara para la instrucción en casa (espacio individual) es importante, lo es aún más, lo que se produce en el aula (espacio grupal), donde los estudiantes pueden interactuar, involucrarse con lo que están aprendiendo, aplicar, crear, etc.

Para diseñar un proceso de aprendizaje y enseñanza, es necesario basarse en alguna teoría didáctica que structure y oriente el desarrollo de esta. Para este trabajo, se ha seguido el modelo de razonamiento de Van Hiele. Este modelo aporta dos aspectos importantes: uno **descriptivo**, donde se definen los niveles de razonamiento por los que transitan los estudiantes, y otro **prescriptivo**, en el que describe unas fases de aprendizaje para favorecer que los alumnos puedan acceder a niveles superiores de razonamiento (Jaime y Gutiérrez, 1990). Otro aspecto importante por destacar es el análisis y seguimiento continuo del progreso del alumnado. Se parte de una fase de indagación, donde se realiza una evaluación inicial para intentar indagar sobre el nivel de razonamiento de los estudiantes. A partir de aquí, se realizan evaluaciones continuas, tanto del trabajo realizado en casa, como de los trabajos grupales en el aula.

Es sorprendente la similitud que estas fases de aprendizaje y consejos tienen con las recomendaciones de la mayoría de las metodologías activas e innovadoras. Incluso, se puede afirmar que, siguiendo las pautas del modelo de Van Hiele y del Flipped Learning 3.0 expuesto por Santiago y Bergmann (2018), se consiguen la mayoría de los principios y pautas del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA).

Los objetivos específicos del trabajo se consideran superados, ya que se ha profundizado en la didáctica, perfeccionado los conocimientos sobre el Flipped Learning, se han presentado problemas contextualizados y significativos, se ha incentivado las interacciones en el aula y se han respetado los diferentes ritmos de aprendizaje. Este último punto, se ve muy favorecido con el uso del aprendizaje invertido, ya que este ayuda a que cada estudiante pueda seguir las instrucciones a su ritmo. Además, el trabajo cooperativo, aumenta las interacciones y ofrece la ventaja de poder atender las diferentes velocidades de aprendizaje.

Pero, también es necesario puntualizar los problemas o dificultades de la aplicación de las metodologías propuestas. Por un lado, los docentes: deben planificarse con mucha antelación; deben realizar un trabajo adicional de búsqueda de información, confección de materiales y preparación de las actividades; y, además, necesitan mayores conocimientos y habilidades profesionales y personales. Por otro lado, a los estudiantes, se les pide que sean más autónomo y responsable, que se planifiquen, que sean más activos en clase, entre otros requisitos.

El punto más flojo del trabajo, según el autor de este TFM, es que todo el diseño se ha realizado desde una perspectiva teórica, siguiendo las investigaciones y las recomendaciones de los diferentes autores consultados. Se entiende, que es absolutamente necesario, contrastar todo este trabajo con la realidad de las aulas. Es por ello, por lo que, como futura línea de trabajo, será necesario realizar una investigación de la puesta en práctica de todo lo descrito en la unidad didáctica. En esta exploración, no solo se deberá valorar la mejora cognitiva de los estudiantes, sino también, otros factores tan importantes como la motivación, la atención a la diversidad, la equidad e igualdad de todos los estudiantes.

Para finalizar, se debe resaltar, que diseñar un proceso de aprendizaje y enseñanza no es una tarea fácil y requiere de un proceso de investigación, reflexión y dedicación de tiempo muy importante. ¿Están todos los docentes comprometidos y motivados para seguir este ritmo tan intenso de trabajo? En opinión, del autor de este TFM, el éxito dependerá, por un lado, del nivel de conocimientos y confianza que el docente tenga de las metodologías que utilice y, por otro, de la motivación y dedicación que le dedique para llevarlas a buen fin. Se espera, que este trabajo, pueda ayudar a esos educadores que quieren mejorar y actualizar sus prácticas docentes.

7 REFERENCIAS

- Alba, C. (2019). Diseño Universal para el Aprendizaje: un modelo teórico-práctico. *Participación educativa*, 9, 55-66. <https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:c8e7d35c-c3aa-483d-ba2e-68c22fad7e42/pe-n9-art04-carmen-alba.pdf>
- Álvarez, A. (2022). *Matemáticas I. 1º de bachillerato LOMLOE*. Textos Marea Verde. https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/LOMLOE/Bachillerato/Matematicas_I.pdf
- Arce, M., Conejo, L., y Muñoz, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Síntesis.
- Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, 8(1), 25-42.
- Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71.
- Barrantes, M., Balletbo, I. y Fernández, M. A. (2013). Enseñar Geometría en Secundaria. *Revista de Ciencias de la Educación Academicus*, 1(3), 26-33
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127.
- Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J. y Morera, L.(2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Síntesis.
- CAST (2018). Universal Design for Learning Guidelines. Wakefield, MA, EEUU: CAST. Versión traducida al español. Recuperado de https://www.educadua.es/doc/dua/CAST-Pautas-Traduccio%CC%81n-Versio%CC%81n-2018_Rev2023.pdf
- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele*. M.E.C.
- Díaz, F. (2005). *Enseñanza situada: Vínculo entre la escuela y la vida*. McGraw Hill. Recuperado de <http://observatoriomexiquense.edomex.gob.mx/node/288>

- Díaz, J. L., Sánchez, A. y Roa, J. (2023). Estado de Uso de Metodologías Activas en las Aulas de Matemáticas Secundarias. *Journal of Research in Mathematics Education*, 12(3), 229-245.
- Fernández, F. (coord.) (2003). *Sociología de la educación*. Pearson Educación.
- Flipped Learning Network (FLN). (2014). The Four Pillars of F-L-I-PTM. <https://thejournal.com/articles/2014/03/12/fln-announces-formal-definition-and-four-pillars.aspx>.
- Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. *Un paseo por la geometría*, 2004/2005, 67-82.
- Gaita, R. C. (2014). *El paso de la geometría sintética a la geometría analítica* [tesis doctoral, Universidad de Valladolid]. Repositorio de la Universidad de Valladolid. <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/10135>
- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA*, 39, 13-25.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Alfar. www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf.
- Lago, J. R., Pujolàs, P. y Naranjo, M. (2011). Aprender cooperando para enseñar a cooperar: procesos de formación/asesoramiento para el desarrollo del programa CA/AC. *Aula*, 17, 89-106.
- Lago, J. R., Pujolàs, P., Riera, G. y Vilarrasa, A. (2015). El aprendizaje cooperativo y cómo introducirlo en los centros escolares. *Revista Latinoamericana de Educacion Inclusiva*, 9(2), 73-90.
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, 340, de 30 de diciembre de 2020, pp. 122868-122953.
- Martín, D., Chacón, T., Curbera, G., Marcellán, F. y Siles, M. (coords.) (2020). *Libro blanco de las matemáticas*. Fundación Ramón Areces y Real Sociedad Matemática Española.

- Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1.017-1.054.
- Morales, P. y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*, 13(1), 145-157.
- OCDE (2023). Informe para la evaluación internacional de los estudiantes. Informe Español. Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes.
- Orden de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y a las diferencias individuales y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 104, de 2 de junio de 2023, pp. 9728/1-9728/578.
- Pujolàs, P. (2009). Aprendizaje Cooperativo y Educación Inclusiva: Una forma práctica de aprender juntos alumnos diferentes. VI Jornadas de cooperación educativa con Iberoamérica sobre educación especial e inclusión educativa, 15-93. <https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:f6f4805e-4e37-4e53-bfea-cdd34361bde2/2009-ponencia-20-pere-pujolas-pdf.pdf>
- Pujolàs, P., Lago, J. R. (coords.), Naranjo, M., Pedragosa, O., Riera, G., Soldevila, J., Olmos, G., Torner, A. y Rodrigo, C. (2011). El programa CA/AC (“cooperar para aprender/aprender a cooperar”) para enseñar a aprender en equipo. Implementación del aprendizaje cooperativo en el aula. Universidad de Vic.
- Santiago, R. y Bergmann, J. (2018). *Aprender al revés. Flipped learning 3.0 y metodologías activas en el aula*. Paidós Educación.

8 ANEXOS

ANEXO I Lista De Comprobación del DUA (CAST, 2018)

Tabla 12. Lista comprobación del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA).

Nota: Elaboración propia basada en CAST (2018).

I. Proporcionar múltiples formas de representación	Tus notas
1. Proporcionar diferentes opciones para la percepción	
1.1 Opciones que permitan la personalización en la presentación de la información	OK
1.2 Ofrecer alternativas para la información auditiva	OK (visual)
1.3 Ofrecer alternativas para la información visual	OK (auditiva)
2. Proporcionar múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y los símbolos	
2.1 Clarificar el vocabulario y los símbolos	OK
2.2 Clarificar la sintaxis y la estructura	OK
2.3 Facilitar la decodificación de textos, notaciones matemáticas y símbolos	OK
2.4 Promover la comprensión entre diferentes idiomas	No Aplica (inglés)
2.5 Ilustrar a través de múltiples medios	OK
3. Proporcionar opciones para la comprensión	
3.1 Activar o sustituir los conocimientos previos	OK
3.2 Destacar patrones, características fundamentales, ideas principales y relaciones	OK
3.3 Guiar el procesamiento de la información, la visualización y la manipulación	OK
3.4 Maximizar la transferencia y la generalización	OK
II. Proporcionar múltiples formas de acción y expresión:	Tus notas
4. Proporcionar opciones para la interacción física	
4.1 Variar los métodos para la respuesta y la navegación	OK
4.2 Optimizar el acceso a las herramientas y los productos y tecnologías de apoyo	OK
5. Proporcionar opciones para la expresión y la comunicación	
5.1 Usar múltiples medios de comunicación	OK
5.2 Usar múltiples herramientas para la construcción y la composición	OK

5.3 Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y la ejecución	OK
6. Proporcionar opciones para las funciones ejecutivas	
6.1 Guiar el establecimiento adecuado metas	OK
6.2 Apoyar la planificación y el desarrollo de estrategias	OK
6.3 Facilitar la gestión de información y de recursos	OK
6.4 Aumentar la capacidad para hacer un seguimiento de los avances	OK
III. Proporcionar múltiples formas de implicación	Tus notas
7. Proporcionar opciones para captar el interés	
7.1 Optimizar la elección individual y la autonomía	OK
7.2 Optimizar la relevancia, el valor y la autenticidad	OK
7.3 Minimizar la sensación de inseguridad y las distracciones	OK
8. Proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia	
8.1 Resaltar la relevancia de metas y objetivos	OK
8.2 Variar las exigencias y los recursos para optimizar los desafíos	OK
8.3 Fomentar la colaboración y la comunidad	OK
8.4 Utilizar el feedback orientado hacia la maestría en una tarea	OK
9. Proporcionar opciones para la autorregulación	
9.1 Promover expectativas y creencias que optimicen la motivación	OK
9.2 Facilitar estrategias y habilidades personales para afrontar los problemas de la vida cotidiana	OK
9.3 Desarrollar la autoevaluación y la reflexión	OK

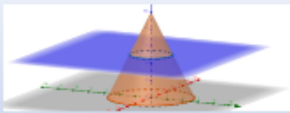
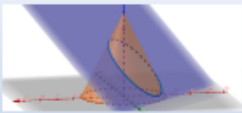
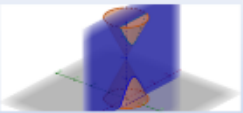
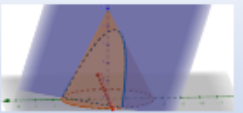
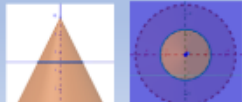
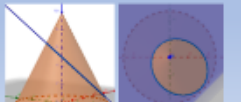
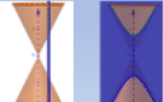
ANEXO II Presentación de la Unidad Didáctica

Enlace: [Presentación de la UD Curvas Cónicas](#)

Ilustración 22. Presentación de la unidad, objetivos, conocimientos previos y evaluación.

Nota: Elaboración propia

CURVAS CÓNICAS

CIRCUNFERENCIA	ELIPSE	HIPÉRBOLA	PARÁBOLA
			
Elementos	Elementos	Elementos	Elementos
Definición L. G.	Definición L. G.	Definición L. G.	Definición L. G.
Ecuaciones	Ecuaciones	Ecuaciones	Ecuaciones
Propiedades	Excentricidad	Excentricidad y Asintotas	Ec. Cuadrática
			

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Vectores en el plano Cartesiano:

- Cálculo de distancias $d(P, Q)$ (módulo)
- ángulos (producto escalar)

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ es $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

Ecuaciones de la recta: vector director y $d(P, r)$

Continua	Punto-pendiente	General	Explícita
$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$	$y - y_0 = m(x - x_0)$	$Ax + By + C = 0$	$y = mx + n$

Lugar Geométrico: Mediatriz y Bisectriz

Completar cuadrados perfectos

$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Traslación de ejes de referencias

Nuevo centro (x_0, y_0)

$y' = x - x_0$

$y' = y - y_0$

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

- Manipulación y construcción de curvas cónicas utilizando recursos físicos y digitales.
- Profundizar en el concepto de lugar geométrico y saber aplicarlo en la representación de curvas. Conocer, interpretar y aplicar las distintas ecuaciones de las curvas cónicas.
- Utilizar GeoGebra para la construcción de curvas cónicas, investigar sus ecuaciones y explorar sus parámetros y propiedades.
- Resolver problemas en situaciones matemáticas, de la vida real y conectando con otras disciplinas y con el patrimonio cultural y artístico de tu ciudad y de Andalucía.
- Saber comunicar con lenguaje matemático los conceptos, propiedades y aplicaciones prácticas de las curvas cónicas.
- Aprender a cooperar fomentando la empatía, la ayuda mutua, la participación, la asunción de responsabilidades, la conciencia sobre los propios errores y la autorregulación del aprendizaje.
- Desarrollar habilidades sociales, la inclusividad y la atención a la diversidad.

EJEMPLO DE RUBRICA PARA LAS ACTIVIDADES

Cr. Ev.	Indicador de Logro	IN (0-4)	S (5)	B (6)	N (7-8)	SB (9-10)
2.1	Comprueba la validez de los resultados de los ejercicios y sabe interpretarlos razonando y argumentando					
5.2	Resuelve los ejercicios estableciendo y aplicando conexiones con los diferentes conceptos adquiridos sobre curvas cónicas.					
7.2	Selecciona y utiliza las diferentes formas de representación de las curvas cónicas (gráfica y ecuaciones algebraicas) y lo utiliza para comunicar los resultados de los ejercicios.					
8.2	Reconoce y emplea un lenguaje matemático, adecuado a su nivel de razonamiento, en la resolución de los ejercicios					

Nota: Todas las rúbricas utilizadas están publicadas en la Moodle (LMS) en la unidad didáctica

EJEMPLO DE ESCALA DE OBSERVACIÓN

Equipo:	Actividad:	Sesión nº:	NOMBRE CARGO				NOMBRE CARGO				NOMBRE CARGO				NOMBRE CARGO				
			IN	S	B	N	IN	S	B	N	IN	S	B	N	IN	S	B	N	
2.1	Comprueba la validez de los posibles resultados y los interpreta utilizando el razonamiento y la argumentación.																		
8.1	Muestra organización al comunicar los datos matemáticos, empleando la terminología y rigor acorde a su nivel de razonamiento.																		
8.2	Reconoce y emplea el lenguaje matemático en diferentes contextos, conectando la información con precisión y rigor (según su nivel de razonamiento).																		
9.1	Muestra las situaciones de incertidumbre, identificando y justificando conexiones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas.																		
9.2	Muestra una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje.																		
9.3	Participa de forma activa en los equipos base, respetando las conexiones y exponiendo de los datos y escuchando su razonamiento, identificando las habilidades sociales más propias y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables.																		

Nota: Todas las escalas de observación están publicadas en la Moodle (LMS) en la unidad didáctica

ANEXO III Cuestionario Conocimientos Previos y Razonamiento de Van Hiele**1. ¿Cuál de las siguientes opciones define mejor a un sistema de coordenadas cartesiano?**

- a) Es un plano dividido en cuatro cuadrantes donde, el punto de intersección entre ellos, se denomina origen de coordenadas.
- b) Son dos rectas secantes, a las que denominamos normalmente por y y x , donde su punto de corte es llamado origen de coordenadas.
- c) Un sistema de referencia cartesiano consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas ejes coordenados. El punto en el que se cortan los ejes, O, es el origen de coordenadas.
- d) Hay muchos sistemas de coordenadas cartesianos: sistemas polares en el plano y sistemas esféricos en tres dimensiones.

2. ¿Cuál de las siguientes respuesta es la correcta?

- a) Primer cuadrante: Zona superior derecha ($x > 0$ e $y > 0$)
- b) Segundo cuadrante: Zona superior izquierda ($x < 0$ e $y > 0$)
- c) Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha ($x > 0$ e $y < 0$)
- d) Todas las anteriores son correctas

3. Dado los puntos: P (1,-2) y Q (3,1) ¿Cuál es el vector con inicio en P y final en Q?

- a) $\vec{v} = (4, -1)$
- b) $\vec{v} = (2, 3)$
- c) $\vec{v} = (-2, 3)$
- d) $\vec{v} = (4, 3)$

4. Cuál es la distancia que hay entre los puntos P (1, 2) y Q (3, 1)

- a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$
- b) $\|\vec{v}\| = 1$
- c) $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$
- d) $\|\vec{v}\| = 2$

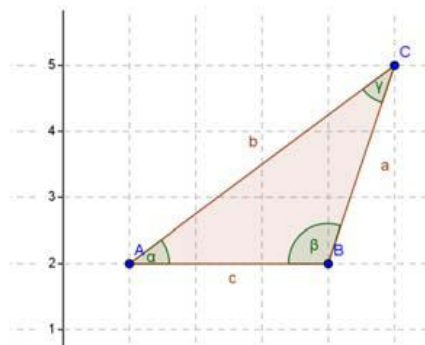
5. Cuál es producto escalar de $\vec{v} = (3, 4)$ y $\vec{w} = (-4, 3)$

- a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$
- b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = -2$
- c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 24$
- d) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

6. Calcula el ángulo α entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$;

los puntos son: A (1, 2), B (4, 2) y C (5, 5)

- a) $\alpha \approx 108,44^\circ$
- b) $\alpha \approx 36,87^\circ$
- c) $\alpha \approx 34,70^\circ$
- d) Todas las anteriores son incorrectas



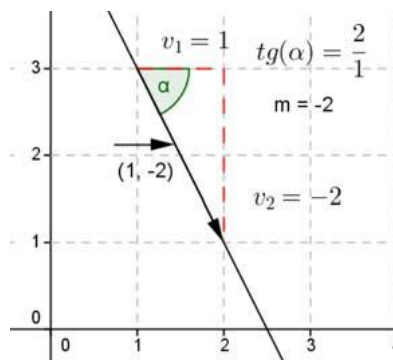
7.Cuál es la pendiente de la recta r que pasa por los puntos A (1, 3) y B (4, 0).

- a) $m = 1$
- b) $m = -1$
- c) $m = 45$
- d) $m = 135$

8.Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

P(1, 3) y Q (2, 1)

- a) $(y - 3) = 2(x - 1)$
- b) $(y - 1) = 2(x - 2)$
- c) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2}$
- d) Todas las anteriores son correctas



9. Consideremos la recta $5x + 2y - 7 = 0$. Calcula un vector director y la pendiente.

- a) $\vec{v} = (2, -5)$; $m = - (5/2)$
- b) $\vec{v} = (2, 5)$; $m = (5/2)$
- c) $\vec{v} = (-5, 2)$; $m = - (2/5)$
- d) $\vec{v} = (5, 2)$; $m = (2/5)$

10. ¿Cuántos focos, vértices y ejes de simetría tiene una elipse?

- a) Ningún foco, 4 vértices y 2 ejes de simetría
- b) 1 foco, un vértice y 1 eje de simetría
- c) 2 focos, 4 vértices y 2 ejes de simetría
- d) Ninguna de las anteriores es correcta

11. ¿Una circunferencia se puede considerar un caso especial de elipse?

- a) Si, cuando sus dos focos están muy cerca.
- b) No, porque la elipse tiene dos focos y la circunferencia solo uno.
- c) Si, cuando la posición de los focos es la misma y su excentricidad es nula ($e = 0$)
- d) Ninguna de las anteriores es correcta

12. Define, utilizando el concepto de lugar geométrico, una circunferencia.

13. Define, utilizando el concepto de lugar geométrico, una elipse.

14. ¿Por qué se llaman curvas cónicas a la circunferencia y a la elipse? Razona tu respuesta.

15. ¿Cuántas curvas cónicas conoces? nómbralas e intenta describirlas.

ANEXO IV Actividades de las Fases de Indagación y Orientación Dirigida

Actividad 1. Construcción de Secciones Cónicas

Para llevar a cabo esta actividad se utilizará la estructura cooperativa simple el “**número iguales juntos**” (Pujolàs et al., 2011), que consiste que solo uno de los integrantes de cada grupo tendrá que realizar la presentación en nombre de todo el equipo.

Durante la primera sesión se realizará la actividad en los grupos base y en la segunda sesión, se terminarán y se realizarán las presentaciones a todo el grupo clase que, además, irán acompañadas por discusiones grupales donde todos podrán intercambiar ideas, interactuar, conjeturar, etc.

El objetivo final de esta actividad es presentar uno o varios de estos artefactos y responder a las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué influye en el corte entre el plano y el doble cono infinito para la creación de las distintas curvas cónicas?
- b) ¿Qué dos ángulos son importantes conocer para la construcción de cónicas?
- c) Clasifica las curvas en función de los dos ángulos definidos anteriormente.

A continuación, se desarrollan las guías que tendrán los estudiantes para la realización de las distintas construcciones.

1. CONSTRUCCIÓN DE SECCIONES CÓNICAS CON CARTULINA

A. Recursos: Cartulinas de diferentes colores, rotuladores o bolígrafo, cúter y pegamento.

B. Guía para poder realizar la actividad:

a) **Ver del vídeo:** “[How to visualize conic sections with a paper model](#)”

b) **Seguir las siguientes instrucciones:**

- a. Descargar las plantillas del siguiente [enlace](#) e imprimir en papel.
- b. Pegar las plantillas 1 y 2 en la cartulina y recortar sus contornos.
- c. Recortar el interior de la elipse y el círculo de la plantilla 2.
- d. Poner pegamento en la “solapa” que se encuentra en la parte inferior izquierda de la plantilla 1. Doblar la cartulina, tal y como se muestra en el vídeo, para formar del cono y pegar esta pestaña en la otra parte de la cartulina.
- e. Superponer la plantilla 2 sobre la 1 con las diferentes secciones cónicas y comprobar los distintos ángulos de corte del plano con el cono.

Ilustración 23. Plantilla 2 secciones cónicas con cartulina

Nota: imágenes recuperadas del canal de YouTube cutoutfoldup
https://www.youtube.com/watch?v=_zCWzPS-i4I

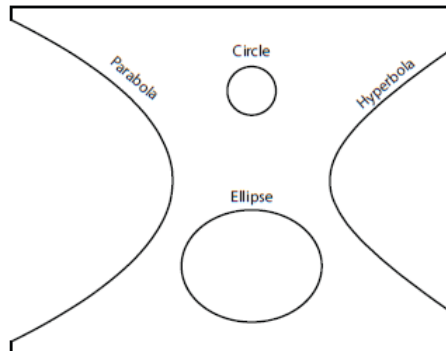


Ilustración 24. Plantilla 1 secciones cónicas con cartulina

Nota: imágenes recuperadas del canal de YouTube cutoutfoldup
https://www.youtube.com/watch?v=_zCWzPS-i4I

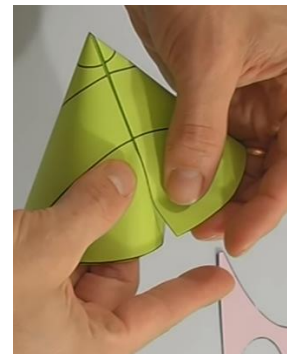
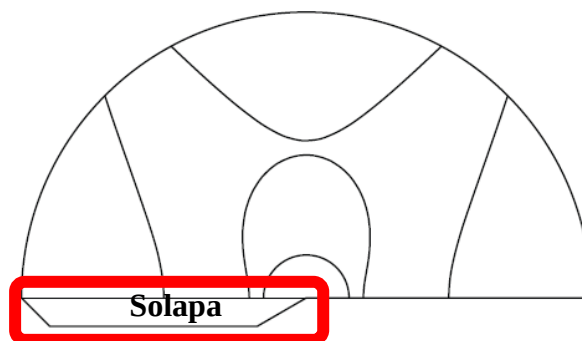
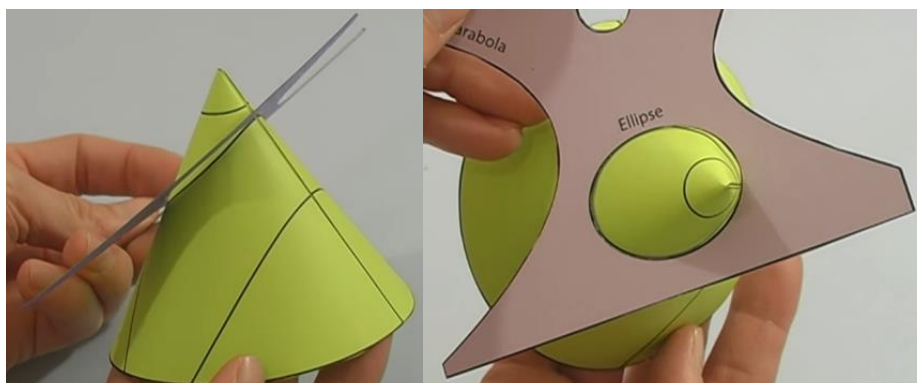


Ilustración 25. Construcción de secciones cónicas con cartulina

Nota: Elaboración propia basada en las imágenes recuperadas del canal de YouTube cutoutfoldup
https://www.youtube.com/watch?v=_zCWzPS-i4I



2. CONSTRUCCIÓN DE SECCIONES CÓNICAS CON PLASTILINA

A. Recursos: Plastilina, rotuladores o bolígrafo, cúter o cuchillo y servilletas de papel absorbentes.

B. Guía para poder realizar la actividad:

a) Ver del vídeo: “[Secciones cónicas – Experiencias con plastilina](#)”

b) Seguir las siguientes instrucciones:

- “Amasar” la plastilina y formar un cono lo más preciso posible. Se aconseja que el ángulo del cono esté comprendido entre 30 y 45 ° aproximadamente.
- Cortar el cono de plastilina, con mucho cuidado, según diferentes ángulos con respecto a su eje.
- Utilizar la sección resultante como plantilla para dibujar la curva en un papel.

Ilustración 26. Secciones cónicas con plastilina.

Nota: Recuperado del canal de YouTube NatiPo, <https://www.youtube.com/watch?v=icG7z9tUnG8>



3. CONSTRUCCIÓN DE SECCIONES CÓNICAS CON ZANAHORIAS

A. Recursos: Zanahoria, rotuladores o bolígrafo y cúter.

B. Guía para poder realizar la actividad:

a) Ver del vídeo: “[Secciones cónicas – Experiencias con plastilina](#)”

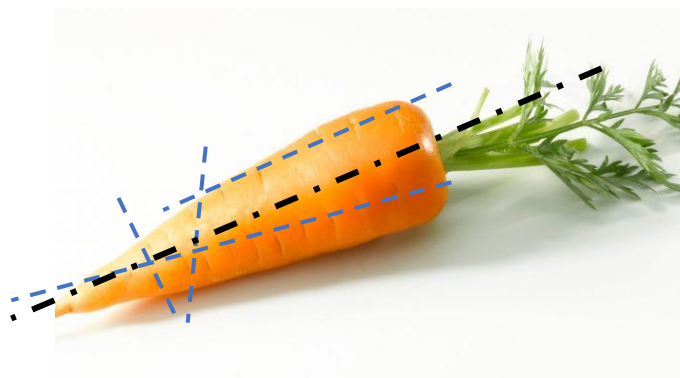
b) Seguir las siguientes instrucciones:

- Escoger una zanahoria u otra verdura con la forma más cónica posible.
- Cortar la verdura con forma cónica, con mucho cuidado, según diferentes ángulos con respecto a su eje. En la figura 28 se ha representado el eje del cono con un segmento negro con puntos y rayas y, los cortes, con segmentos azules con rayas.
- Utilizar la sección resultante como plantilla para dibujar la curva en un papel. Hay que secar con una servilleta de papel la sección de la verdura para retirar la humedad.

Ilustración 27. Secciones cónicas con Zanahoria.

Nota: Elaboración propia, con imagen recuperada de la web del Grupo de Celis.

<https://grupodecelis.com/el-verdadero-color-de-las-zanahorias/>



4. CONSTRUCCIÓN DE SECCIONES CÓNICAS CON GeoGebra

Enlace GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/zunckgys>

A. **Recursos:** Ordenador, tablet o teléfono móvil.

B. **Guía para poder realizar la actividad:**

a) **Construcción de los conos:**

- Introducimos los siguientes puntos: A, B y C

$A(0,0,0)$ Será el centro de la base del cono inferior

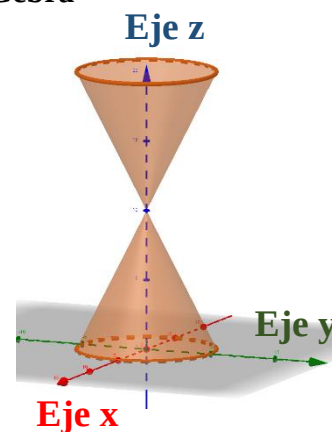
$B(0,0,10)$ Será el vértice de los dos conos

$C(0,0,20)$ Será el centro de la base del cono superior

- Construimos los conos con **Cono (Punto origen, Punto origen, radio)**

Cono (A, B, 5) Este será el cono inferior: Base A, Vértice B y radio 5

Cono (C, B, 5) Este será el cono superior: Base C, Vértice B y radio 5



b) **Construcción de los Planos de corte:**

- El planos horizontal y el plano vertical se construyen con las siguientes ecuaciones:

$z = 5$ Plano paralelo al xy. Su sección con el cono será una **circunferencia**.

$x = 2$ Plano paralelo al yz. Su sección con el cono será una **hipérbola**.

- Para la construcción de los planos inclinados utilizaremos el comando:

Plano (Punto origen, Punto origen, Punto origen), los tres puntos formarán un plano.

Puntos D, E y F para el plano que formará una **elipse** en su sección con el cono:

$D(0,0,5)$ Punto en el eje z

$E(8,0,0)$ punto en el eje x (con el punto D y E puedes calcular el ángulo del plano)

$F(8,8,0)$ Punto en el plano xy

Puntos D, H e I para el plano que formará una **parábola** en su sección con el cono:

$D(0,0,5)$ Punto en el eje z

$G(2.5,0,0)$ punto en el eje x (con el punto D y G puedes calcular el ángulo del plano)

$H(2.5,2.5,0)$ Punto en el plano xy

Construimos los planos:

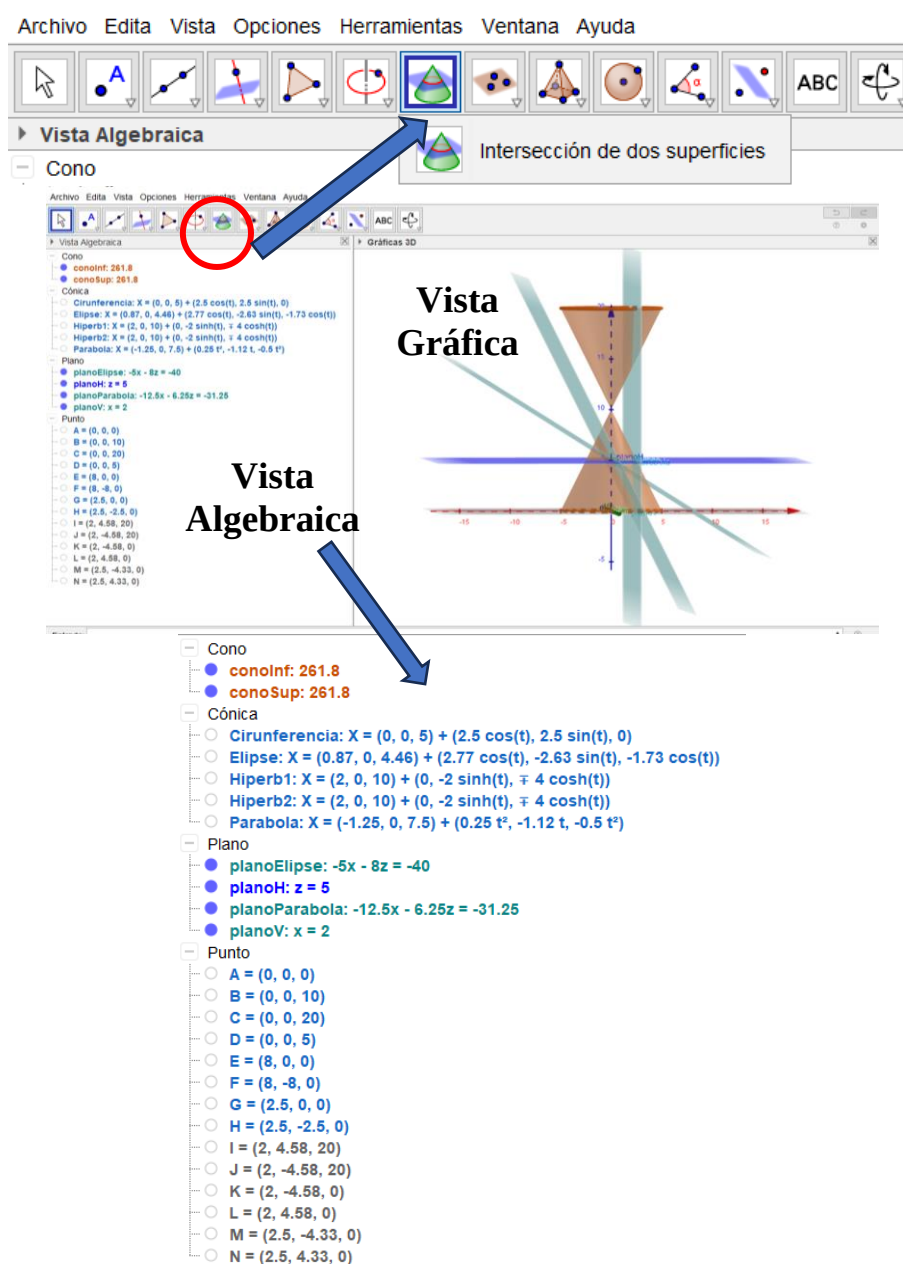
Plano (D, E, F) Plano inclinado que pasa por los puntos D, E y F

Plano (D, G, H) Plano inclinado que pasa por los puntos D, G y H

c) Intersección entre las superficies cono y plano:

Para que GeoGebra calcule las curvas cónicas utilizaremos el icono superior intersección entre dos superficies. Lo pulsamos y elegimos las dos superficies (cono + plano).

Ilustración 28. Secciones Cónicas con GeoGebra, elaboración propia

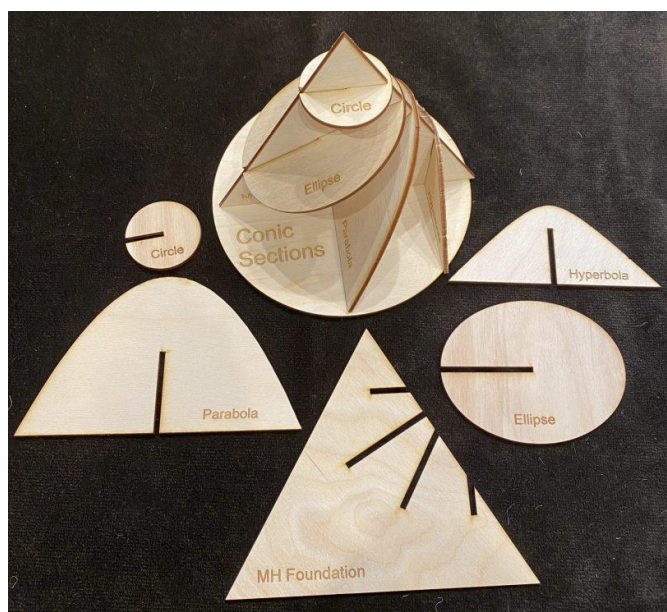


5. RECOMENDACIONES DE TRABAJOS MUY INTERESANTES

Se recomienda consultar información sobre la construcción del famoso “**Cono de Apolonio**” en madera, tal y como puedes encontrar en este [enlace](#) del MMCA (museo de matemáticas de Cataluña). Quizás, lo puedas hacer en tu casa o en otra asignatura, como tecnología, si se lo propones a tu docente.

Ilustración 29. Cono de Apolonio de madera.

*Nota: Recuperado de la web del Museo de Matemáticas de Cataluña (MMCA).
<https://mmaca.cat/es/moduls/con-apol-loni/>*



Otro trabajo, aún más tecnológico que el anterior, es la construcción de estos conos con impresoras 3D. Os dejo el siguiente [enlace](#), de la web Anticíteras y Astrolabios, la cual no tiene desperdicio y, os animo, a que le echéis un vistazo.

Ilustración 30. Cono de Apolonio impreso en 3D

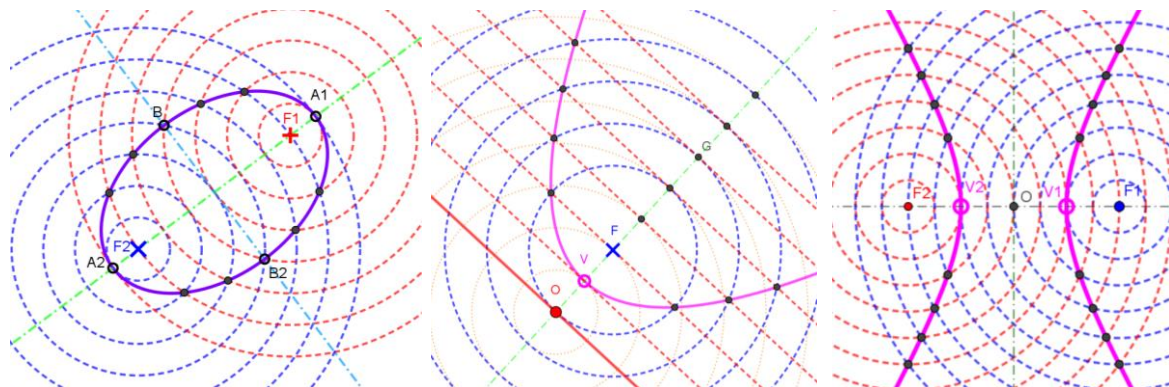
*Nota: basado en J. C. Asensi (2019), con licencia CC BY-SA-NC. Recuperado de
<https://anticiterasyastrolabios.wordpress.com/2020/02/12/cono-de-apolonio-con-focos-junior-impreso-en-3d-2019/>*



Actividad 2. Dibujar las Curvas Cónicas con Regla y Compás

La **actividad 2** se realizará con la estructura cooperativa de “**lápices al centro**” (Pujolàs et al., 2011), y, consistirá en: dibujar las gráficas de la elipse, la parábola y la hipérbola sin el uso de los ejes coordenados (geometría sintética). Podrán utilizar tanto la regla y compás, como GeoGebra con solo la vista gráfica (si el uso del álgebra). A estos gráficos habrá que incorporar todos sus elementos: Focos, directriz, vértices, ejes de simetría, semiejes, etc.

Ilustración 31. Dibujos de cónicas con regla y compás. GeoGebra.



Para la realización de esta actividad, se entregará a cada grupo una guía en formato papel y digital por medio del LMS, que se desarrolla en los apartados siguientes de este anexo.

Junto con las gráficas, deberán responder de manera individual a las siguientes **preguntas abiertas**:

- ¿Te parece una tarea sencilla realizar estas curvas con la unión de puntos?
- ¿Crees que es muy preciso el uso del compás y la regla?
- ¿Sabrías decir, qué utilizan los SGD como GeoGebra, para obtener más precisión?

1. CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE CON REGLA Y COMPAS (GeoGebra)

Enlace a GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/gh3ycntu>

A. Recursos: Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).

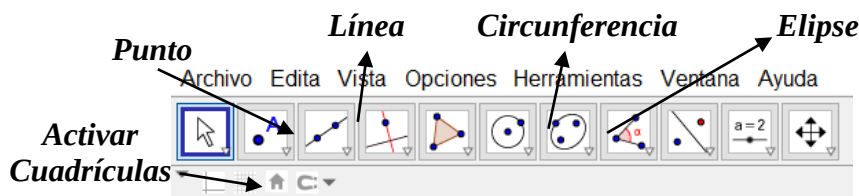
B. Guía para poder realizar la actividad: Se describe la actividad para realizar con GeoGebra, pero se siguen los mismos pasos para realizarlo con regla y compás.

Lo primero es **definir, como lugar geométrico, una elipse**: los puntos del plano que cumplen que la suma de los focos a un punto de la curva es constante y su valor es $2a$.

- Abrir GeoGebra** y, utilizando el desplegable de la derecha, elegir **Geometría**. Nos aparecerá solo la vista gráfica sin ejes coordenados ni las cuadrículas de ayuda (estas se pueden activar, opcionalmente, en la parte superior izquierda).

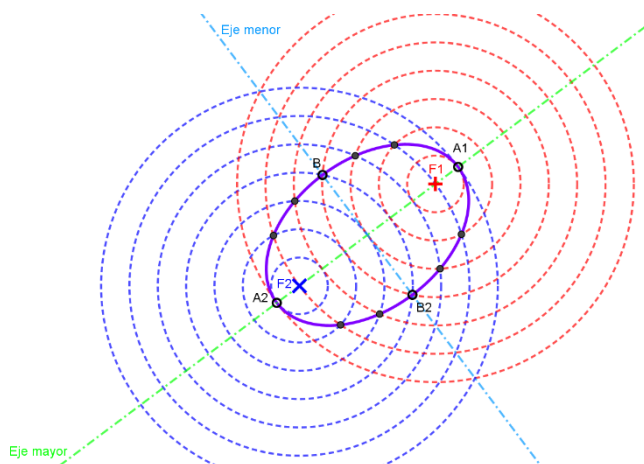
- b) **Trazar el eje mayor de la elipse:** Utilizamos los iconos de funciones que se encuentran en la parte superior izquierda. Pulsar en **línea** y pulsar en la vista gráfica dos puntos cualesquiera (procurar que esta línea recta no sea ni horizontal ni vertical).

Ilustración 32. Comandos de GeoGebra para dibujar con regla y compás



- c) **Trazar los focos de la elipse:** Elegir un punto de esta línea (eje mayor) que será uno de nuestros focos (F_1) y con el comando circunferencia (centro, radio) dibujar circunferencias con centro en F_1 y con radios: 1, 2, 3, 5, 6 y 7. Con el comando intersección, que está dentro del icono punto, macar la intersección entre la circunferencia con radio 6 y el eje mayor. Este punto será nuestro segundo foco (F_2). Desde este punto realizar circunferencias con radio de 1 a 7, como en el caso anterior. Para mejorar la visibilidad, en propiedades, podemos cambiar el color y el tipo de trazado de estas circunferencias, como se muestra en la ilustración 34.
- d) **Trazar los vértices del eje mayor (A_1 y A_2) de la elipse:** los situaremos en las intersecciones de las circunferencias de radio 7 (desde ambos focos) y el eje. La distancia entre estos vértices es 8 y esa distancia la llamamos **2a** o distancia del eje mayor (más adelante justificaremos porqué es esa distancia).
- e) **Trazar los vértices del eje menor (B_1 y B_2) de la elipse:** Los situaremos en las intersecciones de las circunferencias de radios 4 de ambos focos. Así, se cumple, que la suma de las distancias desde los focos a esos puntos es 8 (**2a**).
- f) **Trazado de puntos de la elipse:** Debemos localizar las intersecciones de las circunferencias cuyos radios sumen 8, para que se cumpla la condición de lugar geométrico. Por ejemplo, 3 y 5, 6 y 2, etc. Por supuesto, cada par de circunferencias, son de focos distintos.
- g) **Trazado de la elipse:** Para el trazado exacto de la elipse, tenemos dos opciones:
1. Con **regla y compás**, utilizar una plantilla de curvas cónicas o a mano alzada.
 2. Con **GeoGebra**, utilizaremos el comando **Cónica por cinco puntos**, que se encuentra dentro del icono marcado con una elipse. Pincha y después marca cinco puntos cualesquiera de los dibujados anteriormente.

Ilustración 33. Dibujo de elipse con regla y compás. GeoGebra. Elaboración propia.



2. CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE MÉTODO JARDINERO

A. Recursos: Papel, cartón o madera, lápiz, 2 chinchetas e hilo o cuerda fina rígida.

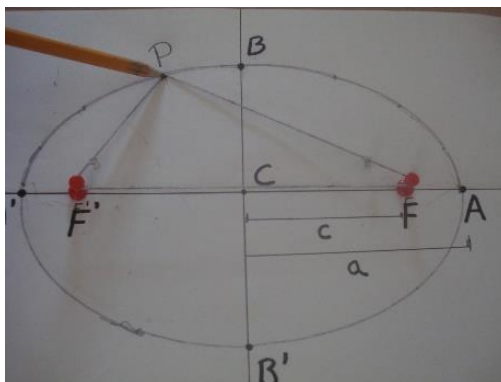
B. Guía para poder realizar la actividad:

- Poner un folio en blanco o milimetrado encima del cartón o madera (superficie algo dura y donde se puedan clavar con facilidad las chinchetas).
- Elegir dos puntos, preferiblemente, que no estén alineados ni vertical ni horizontalmente. Estos serán los focos de la elipse.
- Clavar las chinchetas encima de esos puntos, pero no del todo dejad algo de espacio para pasar el hilo.
- El hilo debe cerrarse con un nudo. Una vez anudado, la longitud del hilo debe ser mayor que la distancia entre los dos focos. Esta será la longitud constante (2a).
- Poner el hilo entre las dos chinchetas, tal y como se muestra en la ilustración 35, y tensarlo con el lápiz de manera suave. En esta postura empezar a dibujar la elipse.

Ilustración 34. Elipse por el método del jardinero.

Nota: Recuperado del blog proyecto Elipse_Circunferencia.

<https://elipci.blogspot.com/2012/11/metodo-del-jardinero-para-la.html>



Con este método aseguramos que todos los puntos de la curva cumplan con la definición de la elipse: la suma de las distancias de ambos focos a un punto de la curva se mantiene constante. En nuestro caso el hilo nos proporciona esta distancia constante, que más adelante la llamaremos **2a** (distancia del eje mayor).

3. CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA

Enlace a GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/uvyxubpx>

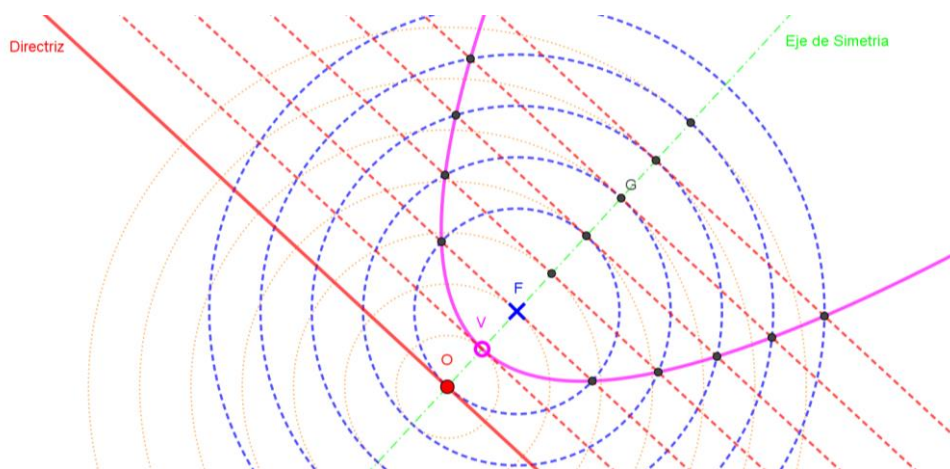
- A. Recursos:** Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).
- B. Guía para poder realizar la actividad:** Se describe la actividad para realizar con GeoGebra, pero, es válido para realizar con regla y compás.

Lo primero es **definir, como lugar geométrico, una parábola:** los puntos del plano que cumplen que la distancia del foco a punto de la curva es igual que la distancia de ese mismo punto a una recta llamada directriz.

- Abrir GeoGebra y, utilizando el desplegable de la derecha, elegir **Geometría**. Nos aparecerá solo la vista gráfica sin ejes coordenados ni las cuadrículas de ayuda (estas se pueden activar, opcionalmente, en la parte superior izquierda).
- Trazar la **directriz de la parábola:** utilizamos los iconos de funciones que se encuentran en la parte superior izquierda. Pulsar en **línea** y pulsar en la vista gráfica dos puntos cualesquiera. Evitar que esta línea sea horizontal o vertical.
- Trazar el **eje de simetría de la parábola:** utilizamos los iconos de funciones que se encuentran en la parte superior izquierda. Pulsar en **línea perpendicular** y pulsar la directriz (recta realizada anteriormente) y, a continuación, un punto de esta misma recta. Este punto será el origen (**O**) de la parábola.
- Trazar **líneas paralelas a la directriz:** En los iconos circunferencia elegir **circunferencia (centro, radio)**, el centro será el origen de la parábola (realizado anteriormente), y realizaremos 7 circunferencias con radios comprendidos entre 1 y 7. A continuación, en el menú línea, elegiremos **línea perpendicular**. Tras pulsarlo, señalaremos la directriz y, después, la intersección entre la primera circunferencia y el eje de simetría. Repetiremos esta operación con el resto de las circunferencias.
- Trazar el punto **Vértice y el Foco de la parábola:** El vértice (**V**) será el punto de intersección de la primera circunferencia (radio = 1) con el eje de simetría. El Foco (**F**) será el punto de intersección de la segunda circunferencia (radio = 2) con el eje de simetría.

- f) Trazar **circunferencias concéntricas desde el foco**: escoger del menú circunferencia el comando **circunferencia (centro, radio)**, el centro será el foco (F) de la parábola (realizado anteriormente), y realizaremos 5 circunferencias con radios comprendidos entre 2 y 6.
- g) Trazado de los **puntos de la parábola**: Recordemos que los puntos deben estar a la misma distancia del foco que de la directriz. Para conseguir esto, marcaremos las intersecciones entre las circunferencias con centro en el foco y las líneas paralelas que estén a la misma distancia que el radio.

Ilustración 35. Dibujo de la parábola con regla y compás. GeoGebra. Elaboración propia.



- f) **Trazado de la parábola**: Para el trazado de la parábola, tenemos dos opciones:
1. Con **regla y compás**, utilizar una plantilla de curvas cónicas o a mano alzada.
 2. Con **GeoGebra**, utilizaremos el comando **Cónica por cinco puntos**, que se encuentra dentro del icono marcado con una elipse. Pincha y después marca cinco puntos cualesquiera de los dibujados anteriormente.

4. CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA

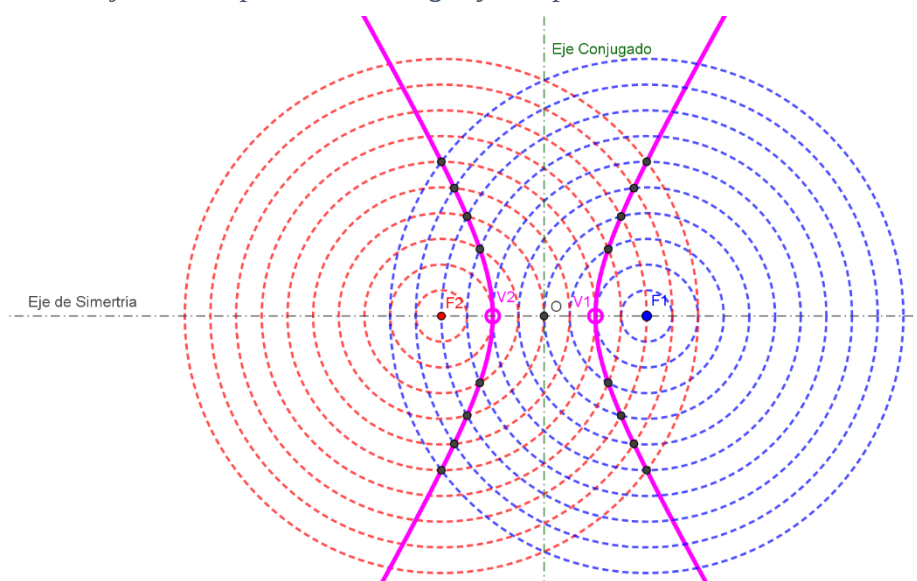
Enlace a GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/duszg25f>

- A. **Recursos:** Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).
- B. **Guía para poder realizar la actividad:** Se describe la actividad para realizar con GeoGebra, pero, es válido para realizar con regla y compás.

Lo primero es **definir, como lugar geométrico, una hipérbola**: los puntos del plano que cumplen que la diferencia entre los puntos de los focos al punto es constante y su valor es $2a$ (distancia entre los vértices de las ramas de la hipérbola).

- a) **Abrir GeoGebra** y, utilizando el desplegable de la derecha, elegir **Geometría**. Nos aparecerá solo la vista gráfica sin ejes coordenados ni las cuadrículas de ayuda (estas se pueden activar, opcionalmente, en la parte superior izquierda).
- b) **Trazar el eje de simetría de la hipérbola:** utilizamos los iconos de funciones que se encuentran en la parte superior izquierda. Pulsar en **línea** y pulsar en la vista gráfica dos puntos cualesquiera.
- c) **Trazar los focos (F), los vértices (V) y el origen (O) de la hipérbola:** elegimos un punto del eje de simetría para el primer foco (**F1**). Escogemos del menú circunferencia el comando **circunferencia (centro, radio)** y, con centro en F1, trazamos 10 circunferencias con radios comprendidos entre 1 a 10. En la intersección de la circunferencia de radio 8 y el eje de simetría situaremos el otro foco (**F2**). Desde este foco realizaremos las mismas 10 circunferencias que en el caso anterior, con radios comprendidos entre 1 a 10. En los radios de longitud 2, desde cada foco, situaremos los vértices **V1** y **V2**. Desde uno de los focos y a un radio de 5 situaremos el origen (**O**). Todos estos puntos están situados en el eje de simetría.
- d) **Trazar el eje de conjugado de la hipérbola:** utilizamos los iconos de funciones que se encuentran en la parte superior izquierda. Pulsar en **línea perpendicular** y pulsar el eje de simetría y, a continuación, el punto de origen (O).
- e) **Trazado de los puntos de la parábola:** Marcaremos las intersecciones entre las circunferencias con centro en los focos cuyas diferencias, entre los radios de uno y otro foco, sea 4 (distancia entre los vértices o $2a$).

Ilustración 36. Dibujo de la hipérbola con regla y compás. GeoGebra. Elaboración propia.



- g) **Trazado de la hipérbola:** Para el trazado de la parábola, tenemos dos opciones:
3. Con **regla y compás**, utilizar una plantilla de curvas cónicas o a mano alzada.
 4. Con **GeoGebra**, utilizaremos el comando **Cónica por cinco puntos**, que se encuentra dentro del icono marcado con una elipse. Pincha y después marca cinco puntos cualesquiera de los dibujados anteriormente.

Actividad 3. Ejercicios Sobre las Circunferencias

En la **actividad 3** se utiliza la estructura cooperativa de “**El número**” (Pujolàs et al., 2011) y consiste en: resolver ejercicios sobre las ecuaciones canónicas y general de la circunferencia, utilizando un lenguaje algebraico y geométrico y, ayudados, por el lenguaje natural. Los ejercicios serán resueltos por distintos alumnos elegidos al azar (El numero) en la pizarra. Tendrán que explicar con detalle los pasos que realizan y los razonamientos realizados por el grupo. El profesor deberá fomentar el debate, dejando que los estudiantes realicen sus propias conjeturas y reflexiones. Por otro lado, el docente deberá observar el lenguaje utilizado por el alumnado para ir mejorándolo o corrigiendo, en los casos que sea necesario. Los ejercicios planteados son los siguientes:

Ejercicio 1. Calcula la ecuación canónica y general de la circunferencia que pasa por el punto A (1, 1) y tiene por centro el punto C (-1, 3). Realiza el gráfico sobre unos ejes coordenados.

Ejercicio 2. Calcula la ecuación canónica y general de la circunferencia que pasa por los puntos: A (1, 4), B (3,6) y cuyo centro es su punto medio. Realiza el gráfico sobre unos ejes coordenados.

Ejercicio 3. Calcula la ecuación canónica de una circunferencia, que tiene como ecuación general la siguiente expresión: $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$. Dibújala e indica el punto centro y su diámetro.

Ejercicio 4. Calcula la ecuación canónica de una circunferencia, que tiene como ecuación general la siguiente expresión: $4x^2 - 8x + 4 - 4y^2 + 4 = 0$. Dibújala e indica el punto centro y su diámetro.

Actividad 4. Ejercicios Sobre las Elipses

En la **actividad 4** se utiliza la estructura cooperativa de “**El número**” (Pujolàs et al., 2011) y consiste en: resolver ejercicios sobre las ecuaciones canónicas y general de la elipse, utilizando un lenguaje algebraico y geométrico y, ayudados, por el lenguaje natural. Los ejercicios serán resueltos por distintos alumnos elegidos al azar (El numero) en la pizarra. Tendrán que explicar con detalle los pasos que realizan y los razonamientos realizados por el

grupo. El profesor deberá fomentar el debate, dejando que los estudiantes realicen sus propias conjeturas y reflexiones. Por otro lado, el docente deberá observar el lenguaje utilizado por el alumnado para ir mejorándolo o corrigiendo, en los casos que sea necesario. Los ejercicios planteados son los siguientes:

Ejercicio 1. Calcula la ecuación canónica y general de una elipse horizontal con centro $(-1, 3)$ y radios 2 y 4. ¿Cómo serían las ecuaciones si la elipse fuera vertical en vez de horizontal?

Ejercicio 2. El centro de una elipse es el punto $C(1, -1)$ y conocemos, además, dos de sus puntos $A(5, -1)$ y $B(1, 1)$. Sabiendo que su semieje mayor es 4, sabrías contestar a las siguientes preguntas:

- a) Calcula su ecuación y dibuja la elipse en un plano coordenado.
- b) Calcula sus focos y su excentricidad.

Ejercicio 3. Calcula la ecuación canónica de una circunferencia, que tiene como ecuación general la siguiente expresión: $4x^2 + 3y^2 - 8x = 0$. Dibújala e indica el punto centro, sus focos, los vértices, sus radios y su excentricidad.

Ejercicio 4. Calcula la ecuación canónica de una circunferencia, que tiene como ecuación general la siguiente expresión: $4x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$. Dibújala e indica el punto centro, sus focos, los vértices, sus radios y su excentricidad.

Actividad 5. Excentricidad y Relaciones Entre los Parámetros a , b y c de la Elipse

Enlace de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/srtk9yrc>

Para la **actividad 5** se utilizará la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al., 2011). Los miembros del equipo primero trabajan solos, después comparten su trabajo con otro compañero y, finalmente, ponen en común sus trabajos y reflexiones con todos los miembros del equipo.

En la primera mitad de la sesión, la actividad consiste en construir con GeoGebra una elipse centrada en el origen y horizontal. Los parámetros a y b serán variables según unos “**deslizadores**” que proporciona el SGD GeoGebra. A partir estos valores se “jugará” con la excentricidad y, también, se mostrará la relación entre los parámetros a , b y c . En la segunda mitad, se realizará un debate sobre las conclusiones a las que han llegado los distintos grupos, sobre la excentricidad y la relación de los parámetros de las elipses. El profesor, como en los casos anteriores, debe fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas

incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias conjeturas y reflexiones. El docente también vigilará el lenguaje utilizado, corrigiendo al alumnado cuando sea necesario.

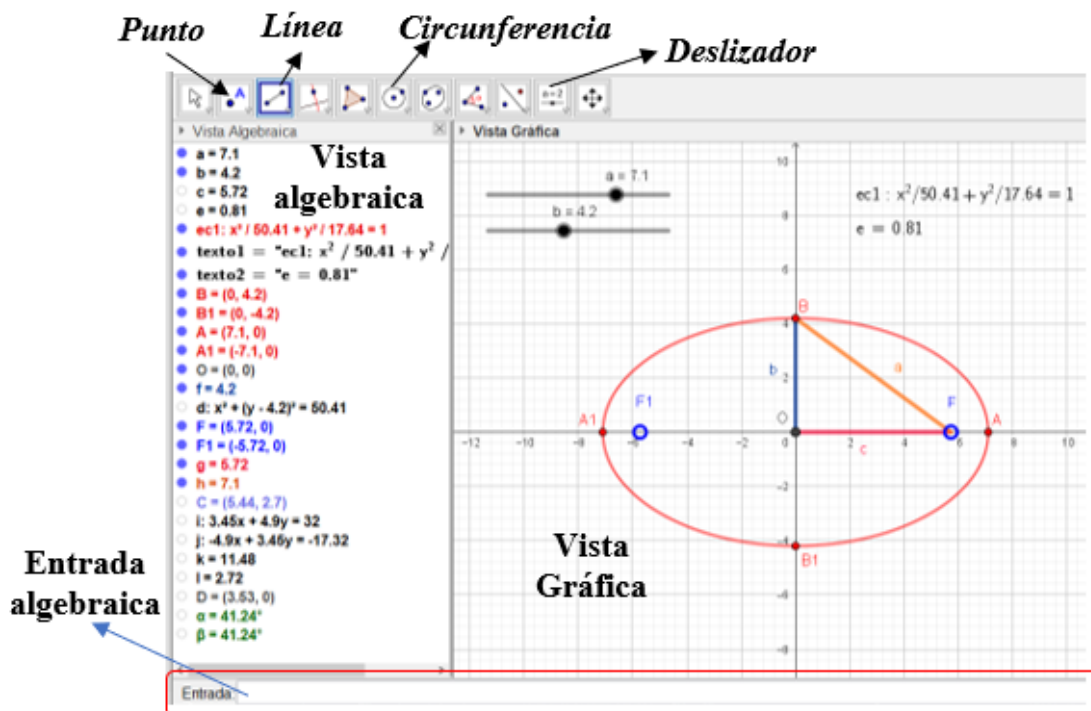
A. Recursos: Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).

B. Guía para poder realizar la actividad:

- a) Abrir GeoGebra y mantener la vista algebraica y gráfica visibles.
- b) Crear los **parámetros variables a y b**: en la ventana **entrada**, que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, introduciremos a y pulsaremos entrar. El programa nos preguntará si queremos crear el **deslizador**. Otra forma posible es utilizar el icono superior **deslizador (slider)**.
- c) Crea el **parámetro c**: en la ventana de entrada, se pone directamente la relación existente entre los parámetros a, b y c: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
- d) **Trazar la elipse**: Introducir en la ventana de entrada la ecuación canónica de la elipse centrada en centro de coordenadas y horizontal: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
- e) Trazar el **eje mayor y los vértices A y A1**: crear una recta utilizando los vértices A y A, que son los puntos de intersección entre la elipse y eje de coordenadas x.
Nota: recuerda que debes renombrar los distintos objetos matemáticos para que tengan los nombres que queremos.
- f) Trazar el **eje menor, los vértices B y B1 y el punto centro (O)**: crear una recta utilizando los vértices B y B1, que son los puntos de intersección entre la elipse y eje de coordenadas y. El punto centro (O) es la intersección entre los dos ejes de simetría.
- g) Trazar los **focos de la elipse**: Los focos se conseguirán utilizando, en el menú circunferencia, el comando de compás. Para utilizarlo, primero debemos pinchar una recta o dos puntos, que indicarán la abertura del compás y, después, marcar el punto centro de la circunferencia. En nuestro caso la distancia vendrá dada por los puntos **O** y **A** (origen y uno de los vértices del eje mayor) y el centro será el punto **B** (uno de los vértices del eje menor). Los focos se encuentran en la intersección de esta circunferencia y el eje mayor. Los renombraremos por **F** y **F1**.
- h) Trazar los segmentos a, b y c: crear **segmentos**, en el menú **línea**, con los siguientes puntos $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ y $\overline{OF} = c$.

Ilustración 37. Excentricidad y parámetros a , b y c de una elipse. GeoGebra.

Nota: Elaboración propia



Actividad 6. Ejercicios Sobre las Hipérbolas

En la **actividad 6** se utiliza la estructura cooperativa de “El número” (Pujolàs et al., 2011) y consiste en: resolver ejercicios sobre las ecuaciones canónicas y generales de la hipérbola, utilizando un lenguaje algebraico y geométrico y, ayudados, por el lenguaje natural. Los ejercicios serán resueltos por distintos alumnos elegidos al azar (El numero) en la pizarra. Tendrán que explicar con detalle los pasos que realizan y los razonamientos realizados por el grupo. El profesor deberá fomentar el debate, dejando que los estudiantes realicen sus propias conjeturas y reflexiones. Por otro lado, el docente deberá observar el lenguaje utilizado por el alumnado para ir mejorándolo o corrigiendo, en los casos que sea necesario. Los ejercicios planteados son los siguientes:

Ejercicio 1. De las siguientes ecuaciones hipérbolas, calcula sus ecuaciones, su centro (O), sus focos (F1 y F2), Vértices (V1 y V2) y también sus asíntotas:

- $4x^2 - 8y^2 = 2$
- $4x^2 - y^2 - 8x + 2x = 0$

Ejercicio 2. De la siguiente ecuación $(x + 1)^2 - \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 = 1$, calcula sus ecuaciones, su centro (O), sus focos (F1 y F2), Vértices (V1 y V2) y también sus asíntotas.

Ejercicio 3. El centro de una hipérbola horizontal es el punto O (1, 2) y su excentricidad 2. Además, conocemos que pasa por el punto A (4, 2), ¿cuál es su ecuación? Dibújala y señala todos sus elementos, incluidas sus asíntotas.

Ejercicio 4. Conocemos las asíntotas de una hipérbola, que son $y = 2x$ e $y = -2x$ y, además que pasa por el punto A (2, 0). Calcula su ecuación y todos sus elementos.

Actividad 7. Excentricidad y Asíntotas de Hipérbolas con GeoGebra I

Enlace de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/huf7xxsv>

Para la **actividad 7** se utilizará la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al., 2011). Los miembros del equipo primero trabajan solos, después comparten su trabajo con otro compañero y, finalmente, ponen en común sus trabajos y reflexiones con todos los miembros del equipo.

La actividad consiste en construir con GeoGebra una hipérbola horizontal y centrada en el origen de coordenadas. Los valores a y b serán variables por medio de unos “deslizadores” que proporciona el SGD GeoGebra. A partir de aquí se “jugará” con la excentricidad y, también, se mostrará la relación entre los parámetros a, b y c. En el gráfico también se construirán las asíntotas que irán variando con los valores que vayan tomando los diferentes parámetros y la excentricidad. El trabajo, además de la construcción de las curvas y la investigación, consiste en responder a las siguientes **preguntas**:

- a) ¿Qué ocurre cuando la excentricidad es casi 1?
- b) ¿Qué ocurre cuando la excentricidad es muy grande?
- c) ¿Qué parámetros hacen la excentricidad sea muy grande?
- d) ¿Qué utilidad tienen las asíntotas en los gráficos?

El profesor, como en los caos anteriores, debe fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias **conjeturas y reflexiones**. El docente también vigilará el lenguaje utilizado, corrigiendo al alumnado cuando sea necesario.

A. Recursos: Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).

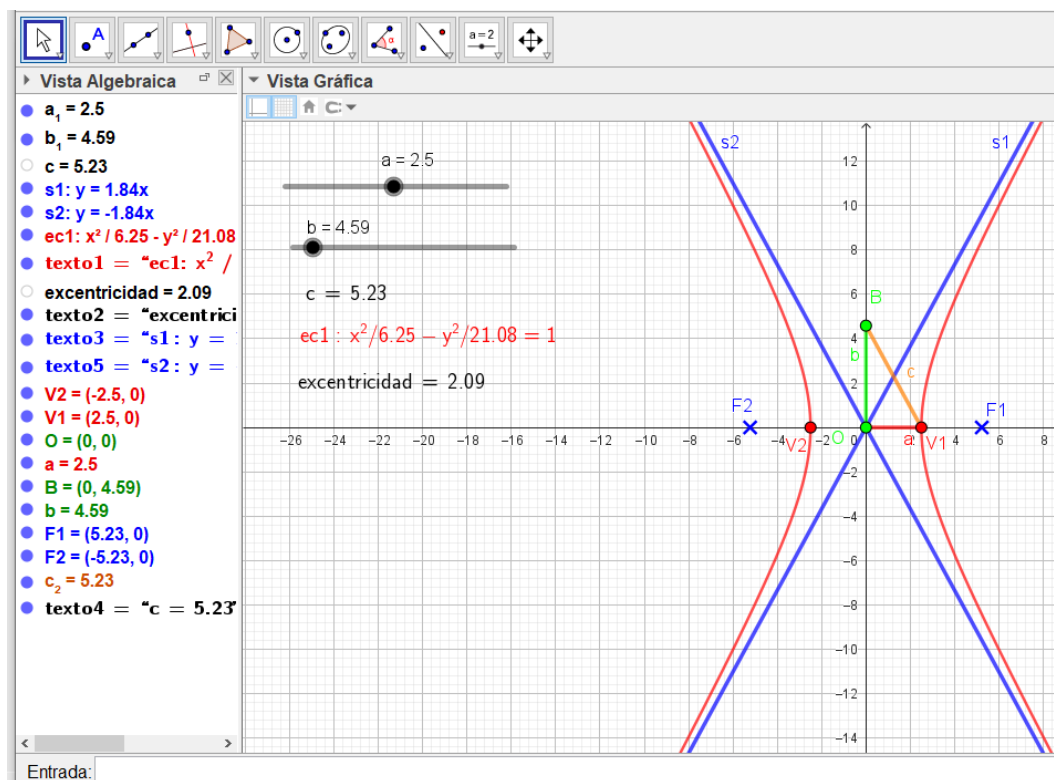
B. Guía para poder realizar la actividad:

- a) Abrir GeoGebra y mantener la vista algebraica y gráfica visibles.
- b) Crear los **parámetros variables a y b**: en la ventana **entrada**, que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, introduciremos a y pulsaremos entrar. El programa nos

preguntará si queremos crear el **deslizador**. Otra forma posible es utilizar el icono superior **deslizador (slider)**.

- c) Cálculo del **parámetro c y de la excentricidad**: en la ventana de entrada, se pone directamente la relación existente entre los parámetros a, b y c: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Lo mismo con la excentricidad $e = \frac{c}{a}$
- d) **Trazar la hipérbola**: Introducir en la ventana de entrada la ecuación canónica de la elipse horizontal y centrada en centro de coordenadas: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
- e) Trazar **los vértices (V1 y V2), los focos (F1 y F2) y el origen (O)**: Todos estos puntos se crearan en la ventana de entrada: **V1** (a, 0), **V2** (-a, 0), **F1** (c, 0), **F2** (-c, 0) y el **O** (0,0).
Nota: recuerda que en la ventana de entrada no puede poner directamente estos nombres (solo admite una letra mayúscula para los puntos). Después podrás renombrarlos.
- f) Trazar **las asíntotas**: También se realizará desde la ventana de entrada algebraica con las fórmulas correspondientes $y = \pm \left(\frac{b}{a}\right)x$.
- g) Trazar el **punto B y los segmentos a, b y c**: El punto B será el (0, b) y se introducirá algebraicamente. Los segmentos se crean con el icono **segmentos**, en el menú **línea**, con los siguientes puntos $\overline{OV1} = a$, $\overline{OB} = b$ y $\overline{OF1} = c$.

Ilustración 38. Excentricidad y asíntotas de hipérbola. GeoGebra. Elaboración propia



Actividad 8. Excentricidad y Asíntotas de Hipérbolas con GeoGebra II

Para la **actividad 8** se utilizará la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al., 2011). Los miembros del equipo primero trabajan solos, después comparten su trabajo con otro compañero y, finalmente, ponen en común sus trabajos y reflexiones con todos los miembros del equipo.

La actividad consiste en construir con GeoGebra una hipérbola similar a la actividad 7, pero en este caso, además de no tener ninguna guía, la hipérbola debe ser vertical y no centrada en el origen. Al igual que en la actividad 7, el trabajo, además de la construcción de las curvas y la investigación, consiste en responder a las siguientes **preguntas**:

- e) ¿Qué ocurre cuando la excentricidad es casi 1?
- f) ¿Qué ocurre cuando la excentricidad es muy grande?
- g) ¿Qué parámetros hacen la excentricidad sea muy grande?
- h) ¿Qué utilidad tienen las asíntotas en los gráficos?

El profesor, como en los caos anteriores, debe fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias **conjeturas y reflexiones**. El docente también vigilará el lenguaje utilizado, corrigiendo al alumnado cuando sea necesario.

Recursos: Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).

Actividad 9. Ejercicios Sobre las Parábolas

En la **actividad 9** se utiliza la estructura cooperativa de “El número” (Pujolàs et al., 2011) y consiste en: resolver ejercicios sobre las ecuaciones canónicas y generales de la **parábola**, utilizando un lenguaje algebraico y geométrico y, ayudados, por el lenguaje natural. Los ejercicios serán resueltos por distintos alumnos elegidos al azar (El numero) en la pizarra. Tendrán que explicar con detalle los pasos que realizan y los razonamientos realizados por el grupo. El profesor deberá fomentar el debate, dejando que los estudiantes realicen sus propias conjeturas y reflexiones. Por otro lado, el docente deberá observar el lenguaje utilizado por el alumnado para ir mejorándolo o corrigiendo, en los casos que sea necesario. Los ejercicios planteados son los siguientes:

Ejercicio 1. Una parábola vertical con las ramas hacia arriba tiene su vértice en $V(2, -1)$. Sabiendo que el punto $P(1,0)$ pertenece a la curva, dibújala y calcula todos sus componentes.

Ejercicio 2. Conocemos que una parábola es vertical y que su vértice está en V (1, 2) y que sus ramas van hacia arriba del plano cartesiano. Si además conocemos que el punto P (0,5) pertenece a la curva, calcula su ecuación y todos sus componentes.

Ejercicio 3. Identifica las secciones cónicas y dibújalas, calculado todos sus elementos, según la curva que sea.

a) $x^2 + 2x + 1 - 3y = 0$

b) $y^2 - 2x = 0$

c) $y^2 - 2x = 1$

Ejercicio 4. Identifica las secciones cónicas y dibújalas, calculado todos sus elementos, según la curva que sea.

a) $2x^2 + 3x = 0$

b) $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 0$

c) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 0$

Actividad 10. Ecuación Cuadrática de la Parábola. GeoGebra

Enlace de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/ergkjqxx>

Para la **actividad 10** se utilizará la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al., 2011). Los miembros del equipo primero trabajan solos, después comparten su trabajo con otro compañero y, finalmente, ponen en común sus trabajos y reflexiones con todos los miembros del equipo.

La actividad consiste en construir con GeoGebra una parábola vertical. Los factores de la ecuación cuadrática ($y = Ax^2 + Bx + C$), es decir, A, B y C serán variables por medio de unos “**deslizadores**” que proporciona el SGD GeoGebra. A partir de aquí se “jugará” con esos factores y se investigarán como afectan a la curva. El trabajo, además de la construcción de las curvas y la investigación, consiste en responder a las siguientes **preguntas**:

- ¿Qué ocurre cuando $A = 0$? y ¿cuándo $A > 0$? y ¿cuándo $A < 0$?
- ¿Qué ocurre cuando aumenta A? y ¿cuándo A disminuye?
- ¿Qué ocurre cuando se va modificando el parámetro C, y los otros se dejan fijos?
- ¿Qué curva parece que representa el vértice de la parábola cuando variamos B? consejo: activar el rastro del vértice, para verlo con más claridad.
- ¿Has podido descubrir algún comportamiento interesante?

El profesor, como en los caos anteriores, debe fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias **conjeturas y reflexiones**. El docente también vigilará el lenguaje utilizado, corrigiendo al alumnado cuando sea necesario.

A. Recursos: Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).

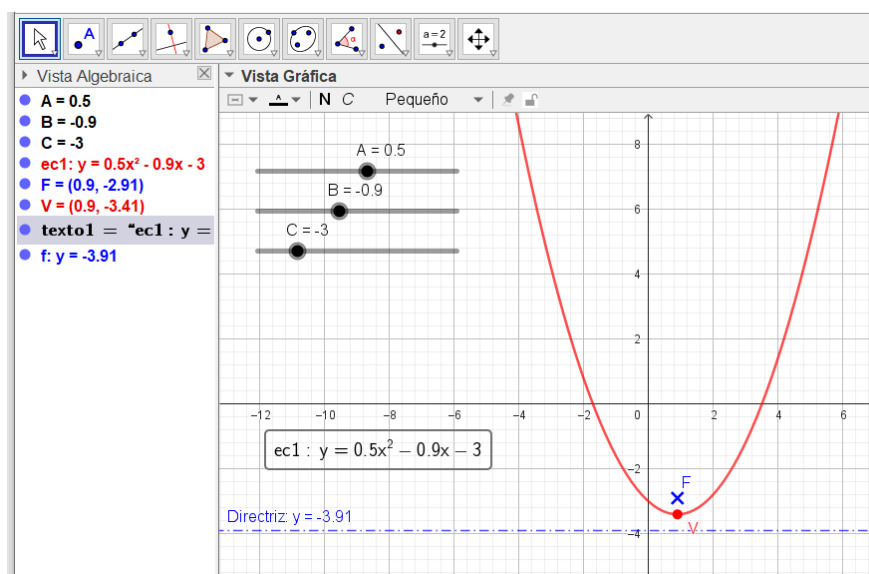
B. Guía para poder realizar la actividad:

- Abrir GeoGebra y mantener la vista algebraica y gráfica visibles.
- Crear los **parámetros variables A, B y C**: en la ventana **entrada**, que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, introduciremos A y pulsaremos entrar. El programa nos preguntará si queremos crear el **deslizador**. Otra forma posible es utilizar el icono superior **deslizador (slider)**.
- Trazar la parábola**: Introducir en la ventana de entrada la ecuación general de una parábola con los valores anteriores $y = Ax^2 + Bx + C$.
- Trazar los **elementos de la parábola**: en este caso vamos a utilizar algunos comandos en ventana de entrada que nos calculan estos elementos. **Foco (cónica)**, **Vértice (cónica)** y **directriz (cónica)**. En todos los casos dentro del paréntesis hay que introducir el nombre de la ecuación de la sección cónica.

Nota: se deja como reto particular para cada alumno, el descubrir las fórmulas algebraicas que pueden utilizar para el cálculo de estos elementos. Ayuda: convertir la ecuación cuadrática en una canónica.

Ilustración 39. Ecuación cuadrática de la parábola y sus factores A, B y C. GeoGebra.

Nota: Elaboración propia.



Actividad 11. Experimentar con el Parámetro p de la Parábola. GeoGebra

Enlace de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/sv6jzmaz>

Para la **actividad 11** se utilizará la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al., 2011). Los miembros del equipo primero trabajan solos, después comparten su trabajo con otro compañero y, finalmente, ponen en común sus trabajos y reflexiones con todos los miembros del equipo.

La actividad consiste en construir con GeoGebra una parábola vertical. La directriz la fijaremos en $y = d$ (variable) y los valores de P (distancia de la directriz al foco) y de la componente x del vértice (x_0). Todos los parámetros anteriores serán variables, por medio de unos “deslizadores” que proporciona el SGD GeoGebra. A partir de aquí se “jugará” con estas variables para investigar el comportamiento de la parábola al ir modificándolos con los deslizadores. El trabajo, además de la construcción de las curvas y la investigación, consiste en responder a las siguientes **preguntas**:

- ¿Qué ocurre cuando es $p = 0$, $p > 0$ o $p < 0$?
- ¿al modifica la componente x del vértices (x_0), que ocurre?
- ¿al modificar la componente d , situación de la recta directriz ($y = d$), que ocurre?

El profesor, como en los caos anteriores, debe fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias **conjeturas y reflexiones**. El docente también vigilará el lenguaje utilizado, corrigiendo al alumnado cuando sea necesario.

C. Recursos: Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).

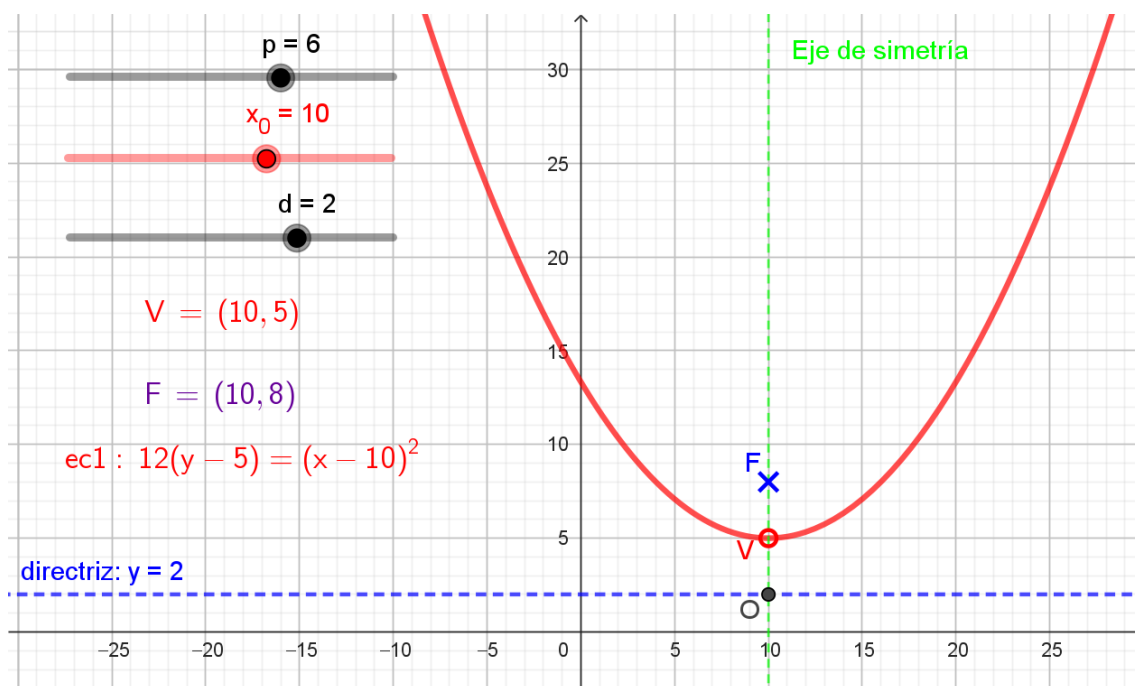
D. Guía para poder realizar la actividad:

- Abrir GeoGebra y mantener la vista algebraica y gráfica visibles.
- Crear los **parámetros variables p , x_0 y d** : en la ventana **entrada**, que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, introduciremos p y pulsaremos entrar. El programa nos preguntará si queremos crear el **deslizador**. Otra forma posible es utilizar el icono superior **deslizador (slider)**.
- Trazar la parábola:** Introducir en la ventana de entrada la ecuación canónica de la parábola vertical con vértice en el punto $(x_0, d + P/2)$: $2p \left[y - \left(d + \frac{p}{2} \right) \right] = (x - x_0)^2$.

- d) Trazar **los vértices (V), el foco (F1), punto origen (O) y la directriz**: Todos objetos matemáticos se crearan en la ventana de entrada: $V(x_0, d + P/2)$, $F(x_0, d + P)$, $O(x_0, d)$ y la directriz $y = d$.
- e) Trazar **el eje de simetría**: con el comando *perpendicular*, trazar una perpendicular a la recta directriz que pase por el punto O.

Ilustración 40. Experimentar con el parámetro p de la parábola. GeoGebra.

Nota: Elaboración propia.



Actividad 12. Parábola Horizontal no centrada. GeoGebra

Para la **actividad** se utilizará la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al., 2011). Los miembros del equipo primero trabajan solos, después comparten su trabajo con otro compañero y, finalmente, ponen en común sus trabajos y reflexiones con todos los miembros del equipo.

La actividad consiste en construir con GeoGebra una parábola similar a la actividad 11, pero en este caso, la parábola debe ser horizontal, en vez de vertical. Al igual que en la actividad 11, el trabajo, además de la construcción de las curvas y la investigación, consiste en responder a las siguientes **preguntas**:

- ¿Qué ocurre cuando es $p = 0$, $p > 0$ o $p < 0$?
- ¿al modifica la componente x del vértice (x_0), que ocurre?
- ¿al modificar la componente d, situación de la recta directriz ($y = d$), que ocurre?

El profesor, como en los caos anteriores, debe fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias **conjeturas y reflexiones**. El docente también vigilará el lenguaje utilizado, corrigiendo al alumnado cuando sea necesario.

Recursos: Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).

Actividad 13. Ejercicios Sobre Cónicas Generales

En la **actividad 13** se utiliza la estructura cooperativa de “**El número**” (Pujolàs et al., 2011) y consiste en: resolver ejercicios sobre las secciones cónicas, utilizando un lenguaje algebraico y geométrico y, ayudados, por el lenguaje natural. Los ejercicios serán resueltos por distintos alumnos elegidos al azar (El numero) en la pizarra. Tendrán que explicar con detalle los pasos que realizan y los razonamientos realizados por el grupo. El profesor deberá fomentar el debate, dejando que los estudiantes realicen sus propias conjeturas y reflexiones. Por otro lado, el docente deberá observar el lenguaje utilizado por el alumnado para ir mejorándolo o corrigiendo, en los casos que sea necesario. Los ejercicios planteados son los siguientes:

Ejercicio 1 Identifica las secciones cónicas y dibújalas, calculado todos sus elementos, según la curva que sea.

- a) $4x^2 + 3x - 8x = 0$
- b) $x^2 + 2x + 1 - 3y = 0$
- c) $3x^2 - 6x + 3y^2 - 9y + 4 = 1$
- d) $\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 2$

Ejercicio 2 Identifica las secciones cónicas y dibújalas, calculado todos sus elementos, según la curva que sea.

- a) $y^2 - x^2 + 2y - 8x = 0$
- b) $x^2 + 2y^2 - 4x = 0$
- c) $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$
- d) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Ejercicio 3. Dibuja con GeoGebra las ecuaciones siguientes y clasifícalas según el tipo de curva: circunferencia, elipse, hipérbola o parábola.

- a) $x^2 - 3xy = 2$

- b) $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$
- c) $x^2 + xy + y^2 - y = 0$
- d) $3x^2 - 6xy + 4y^2 - 2x = 0$
- e) $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 4 = 0$
- f) $4x^2 + xy + 2y^2 - 2 = 0$

Actividad 14. Ecuación General de las Curvas Cónicas. GeoGebra

Enlace de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/jfcqvgms>

Para la **actividad 14** se utilizará la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al., 2011). Los miembros del equipo primero trabajan solos, después comparten su trabajo con otro compañero y, finalmente, ponen en común sus trabajos y reflexiones con todos los miembros del equipo.

La actividad consiste en construir una curva cónica con la ecuación general ($Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E + Fxy = 0$), siendo variable (deslizadores) todos sus factores (A, B, C, D, E y F). Se comenzará dejando el factor F (xy) nulo y, variando el resto. Después se incluirá un valor distinto de cero a F y así, se irá investigando que le pasa a las distintas curvas. Hay que “jugar” con estos factores y ver cómo influyen en la parábola. El trabajo, además de la construcción de las curvas y la investigación, consiste en responder a las siguientes **preguntas**:

- a) ¿Qué ocurre si A y B son nulos?
- b) ¿Sabes que son curvas cónicas degeneradas?, ¿podrías poner ejemplos concretos?
- c) ¿Cuándo $F=0$ (no hay componente XY), como son las curvas? y ¿Cuándo F no es nulo?
- d) Juega con A y B (con $F = 0$) y haz una clasificación de curvas solo con estos dos parámetros.
- e) ¿Qué tiene que ocurrir para tener parábolas verticales? y ¿horizontales?
- f) ¿Qué tiene que ocurrir para tener hipérbolas verticales? y ¿horizontales?
- g) ¿Has podido descubrir alguna propiedad interesante?

El profesor, como en los caos anteriores, debe fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias **conjeturas y reflexiones**. El docente también vigilará el lenguaje utilizado, corrigiendo al alumnado cuando sea necesario.

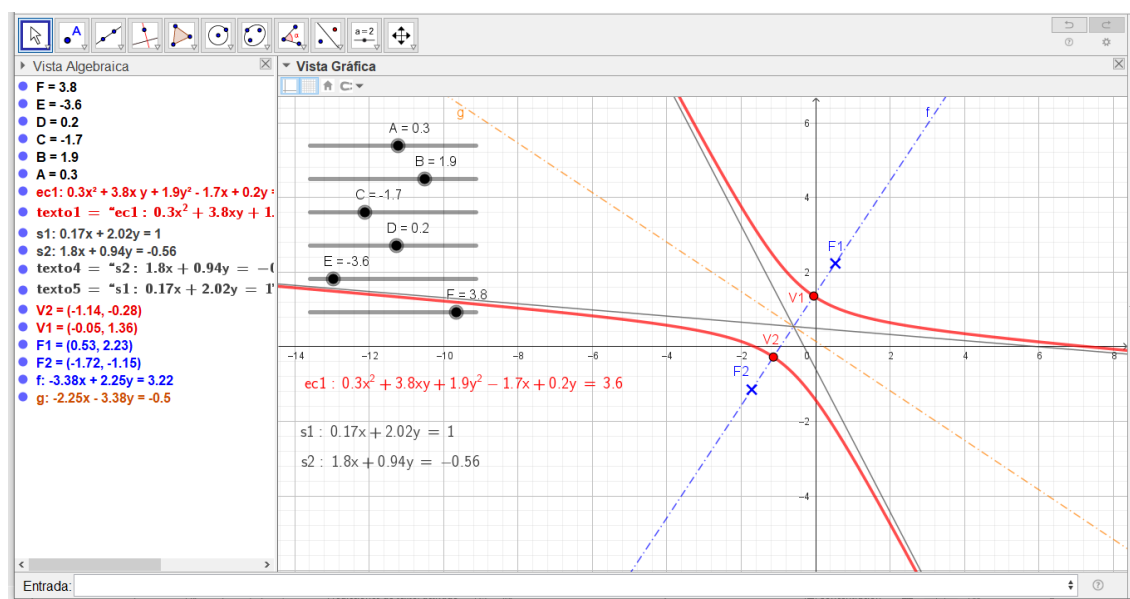
A. Recursos: Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).

B. Guía para poder realizar la actividad:

- Abrir GeoGebra y mantener la vista algebraica y gráfica visibles.
- Crear los **parámetros variables A, B, C, D, E y F**: en la ventana **entrada**, que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, introduciremos A y pulsaremos entrar. El programa nos preguntará si queremos crear el **deslizador**, así con todos los demás. Otra forma posible es utilizar el icono superior **deslizador (slider)**.
- Trazar la curva cónica**: Introducir en la ventana de entrada la ecuación general de una sección cónica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E + Fxy = 0$.
- Trazar los **elementos de la cónica**: en este caso vamos a utilizar algunos comandos en la ventana de entrada, que nos calculan estos elementos. **Foco (cónica)**, **Vértices (cónica)** y **asíntota (objeto)**. En todos los casos dentro del paréntesis hay que introducir el nombre de la ecuación de la sección cónica. Para el eje de simetría que pasa por los focos (eje mayor) utilizaremos el comando recta entre los focos (F1 y F2). Para el eje de meno o eje conjugado, utilizaremos el comando mediatriz entre los focos también.

Ilustración 41. Ecuación cuadrática de la parábola y sus factores A, B y C. GeoGebra.

Nota: Elaboración propia.



Actividad 15. Curvas Cónicas Inclinadas. GeoGebra

Enlace de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/akhevwpw>

Para la **actividad 15** se utilizará la estructura cooperativa de “1-2-4” (Pujolàs et al., 2011). Los miembros del equipo primero trabajan solos, después comparten su trabajo con otro compañero y, finalmente, ponen en común sus trabajos y reflexiones con todos los miembros del equipo.

En esta actividad, se les pedirá a los alumnos que construyan con GeoGebra distintas curvas cónicas que no sean ni horizontales ni verticales. Se pedirá que vayan observando la ecuación general que el programa calcula para cada una de ellas. El trabajo, además de la construcción de las curvas y la investigación, consiste en responder a las siguientes **preguntas**:

- ¿siempre está término “xy”?
- ¿qué le ocurre al término “ $F^2 - 4AB$ ”?
- ¿Cuándo tienen términos en xy ($F \neq 0$), también tienen el término x^2 y/o y^2 ?
- Serías capaz de calcular los vectores directores de la directriz o de alguno de los ejes de simetría.
- ¿Has podido descubrir algún comportamiento interesante?

El profesor, como en los caos anteriores, debe fomentar el debate realizando preguntas y orientando las respuestas incorrectas, pero dejando que los estudiantes realicen sus propias **conjeturas y reflexiones**. El docente también vigilará el lenguaje utilizado, corrigiendo al alumnado cuando sea necesario.

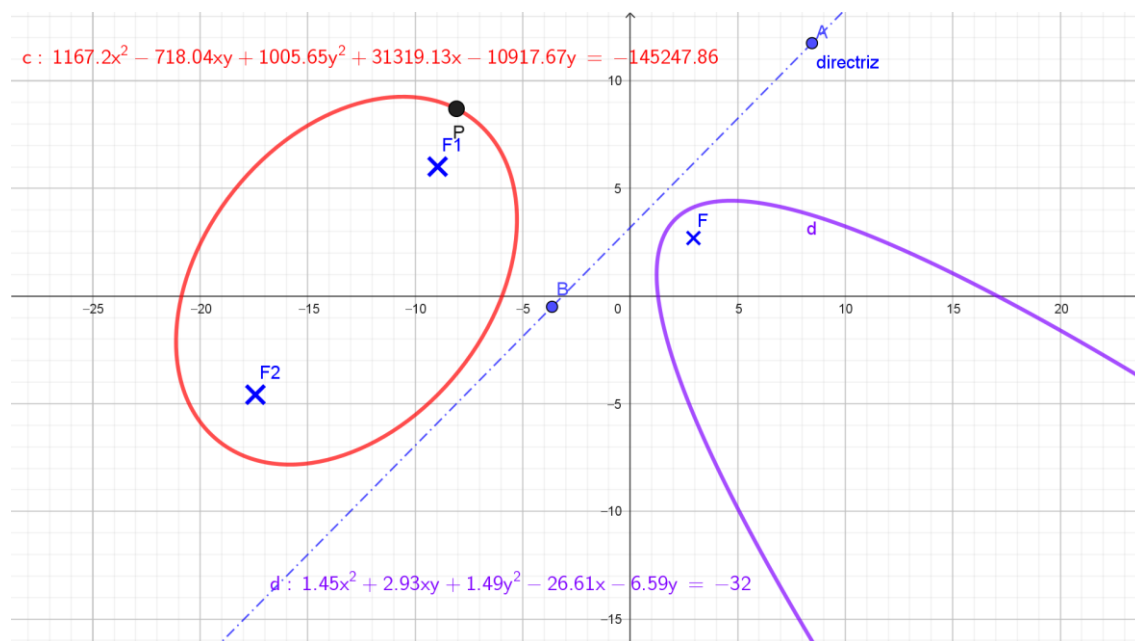
A. Recursos: Regla, compás, lápiz y papel; también se puede realizar con GeoGebra utilizando un ordenador portátil, tablet o móvil (este último no es aconsejable).

B. Guía para poder realizar la actividad:

- Abrir GeoGebra y mantener la vista algebraica y gráfica visibles.

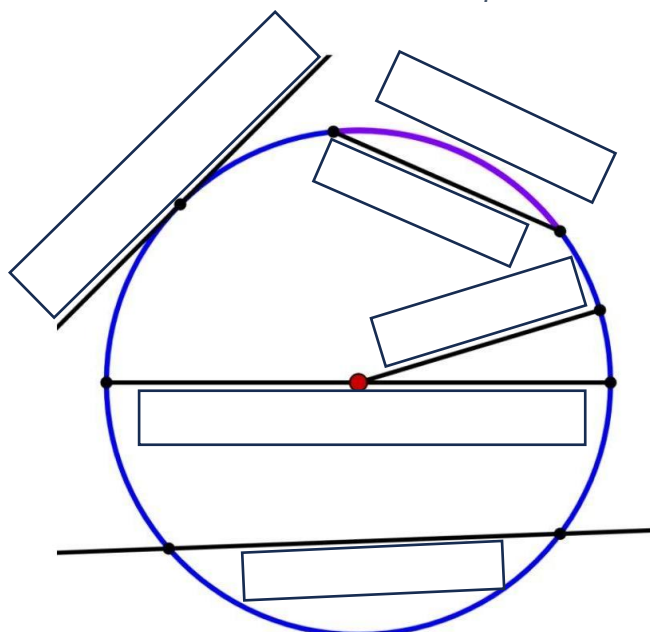
Ilustración 42. Curvas cónicas inclinadas y su ecuación general. GeoGebra.

Nota: Elaboración propia.



- b) **Trazar una elipse o una hipérbola:** se utilizará el comando ***elipse*** o ***hipérbola***, de los iconos superiores. Estos comandos nos solicitan que le indiquemos los dos focos y un punto de la curva. Nos crea la curva en la ventana gráfica y la ecuación en la ventana algebraica. Para ver mejor la ecuación, podemos arrastrarla hasta la ventana gráfica y así la tendremos en forma de texto. Tanto los focos (F1 y F2) como el punto de la curva (P) los podemos desplazar y cambiar de lugar, dando lugar a nuevas ecuaciones.
- c) **Trazar una parábola:** se utiliza el comando ***parábola***, que solicita un punto de la curva y la recta directriz. Primero, con el comando ***recta***, trazamos la directriz. Luego clicamos en el icono de parábola, señalamos un punto de la parábola y la directriz.

ANEXO V Vídeos instruccionales y Cuestionarios de Comprobación**Vídeo: Lugares Geométricos y Curvas Planas****Enlace:** <https://youtu.be/wJhn95gEvP4>**CUESTIONARIO:****1. Define la elipse como lugar geométrico**

Vídeo: La Circunferencia**Enlace del vídeo de elaboración propia:** https://youtu.be/JQ_taBZoDBk**CUESTIONARIO:****1. De la lista de la derecha, pon en cada recuadro el nombre del elemento correcto:***Ilustración 43. Elementos de la Circunferencia. Cuestionario. Elaboración propia*

- Centro
- Diámetro
- Radio
- Cuerda
- Recta secante
- Recta tangente
- Arco
- Semicircunferencia
- Ángulo central
- Ángulo inscrito

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta? (puedes señalar varias opciones)

- La mediatriz de la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a la recta y pasa por el centro de la circunferencia
- La mediatriz, de cualquier cuerda de una circunferencia, pasa por el centro de esa circunferencia.
- La mediatriz de la recta secante a una circunferencia es paralela a la tangente en ese mismo punto.
- Todas las anteriores son falsas.

3. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones es una circunferencia? (puedes señalar varias opciones)

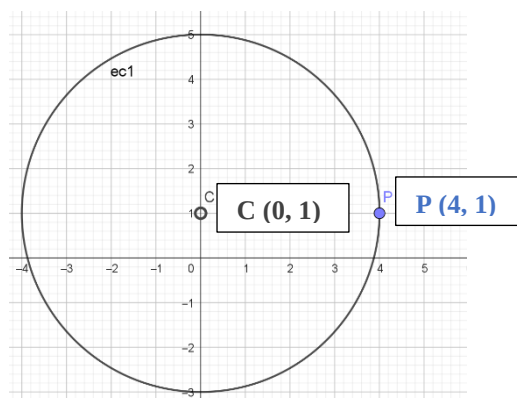
- a) $x^2 + y^2 = 4$
- b) $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+4}{4}\right)^2 = 1$
- c) $(y-2)^2 + x^2 - 4 = 0$
- d) Todas las anteriores son correctas

4. Si tenemos la ecuación $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$ ¿Cuál es el punto centro C y su radio?

- a) C (-2, 5); radio = 4
- b) C (2, -5); radio = 16
- c) C (2, -5); radio = 4
- d) C (4, -25); radio = 16

5. ¿Cuál es la ecuación que representa la circunferencia de la figura?

- a) $x^2 + y^2 = 4$
- b) $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+4}{4}\right)^2 = 1$
- c) $(y-2)^2 + x^2 - 4 = 0$
- d) Todas las anteriores son correctas



6. Describe los pasos que seguirías para trazar una circunferencia conociendo tres puntos de la misma. (No hay que realizar ningún cálculo solo enumerar los pasos).

- Paso 1: _____
- Paso 2: _____
- Paso 3: _____
- Paso 4: _____
- Paso 5: _____
- Paso 6: _____
- Paso 7: _____
- Paso 8: _____

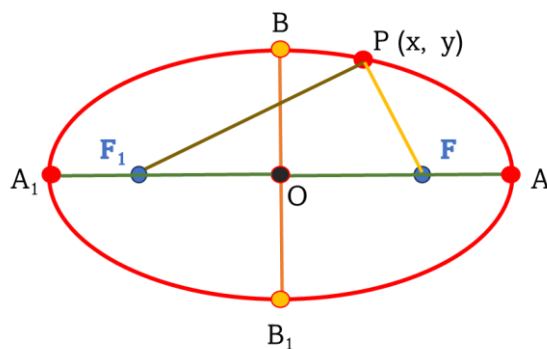
Vídeo: La Elipse

Enlace del vídeo de elaboración propia: <https://youtu.be/nSTGS-Bv32E>

CUESTIONARIO:

1. Según la figura siguiente, nombra que es cada elemento del cuadro de la derecha.
(utiliza la nomenclatura de segmento si es necesario, por ejemplo: $\overline{OA}$).

Ilustración 44. Elementos de una elipse. Cuestionario. Elaboración propia



Focos:

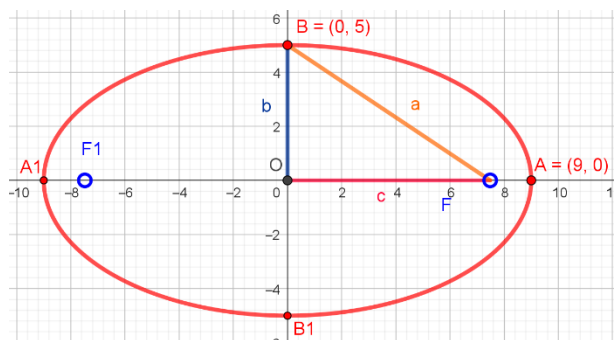
Semieje mayor (a):

Eje menor (2b):

Vértices del eje mayor:

Distancia focal (2c):

2. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones es una elipse? (puedes señalar varias opciones)
- $x^2 + y^2 = 4$
 - $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+4}{4}\right)^2 = 1$
 - $(y-2)^2 + x^2 - 4 = 0$
 - Todas las anteriores son correctas
3. Si tenemos la ecuación de la elipse $\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-4}{2}\right)^2 = 1$ ¿Cuál es el valor de la semidistancia focal (c), del semieje mayor (a) y del semieje menor (b) ?
- $c = \sqrt{12}$; $a = 4$; $b = 2$
 - $c = \sqrt{2}$; $a = 2$; $b = \sqrt{2}$
 - $c = \sqrt{4}$; $a = 2$; $b = \sqrt{2}$
 - Ninguna de las anteriores es correcta
4. ¿Cuál es la ecuación que representa la elipse de la figura?
- $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = -1$
 - $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$
 - $\left(\frac{x}{81}\right)^2 + \left(\frac{y}{25}\right)^2 = 1$
 - Todas las anteriores son incorrectas



5. Define que es la excentricidad, que valores puede tomar para una elipse.

6. ¿Qué ocurre con la gráfica de la elipse cuando su excentricidad es cero?

7. ¿Qué ocurre con la gráfica de una elipse cuando su excentricidad aumenta mucho?

8. Reflexiona y explica, que piensas que puede ocurrir, cuando la excentricidad de la elipse llega al valor 1. (Ayuda: piensa la fórmula de la excentricidad y en la relación entre los parámetros de la elipse a , b y c)

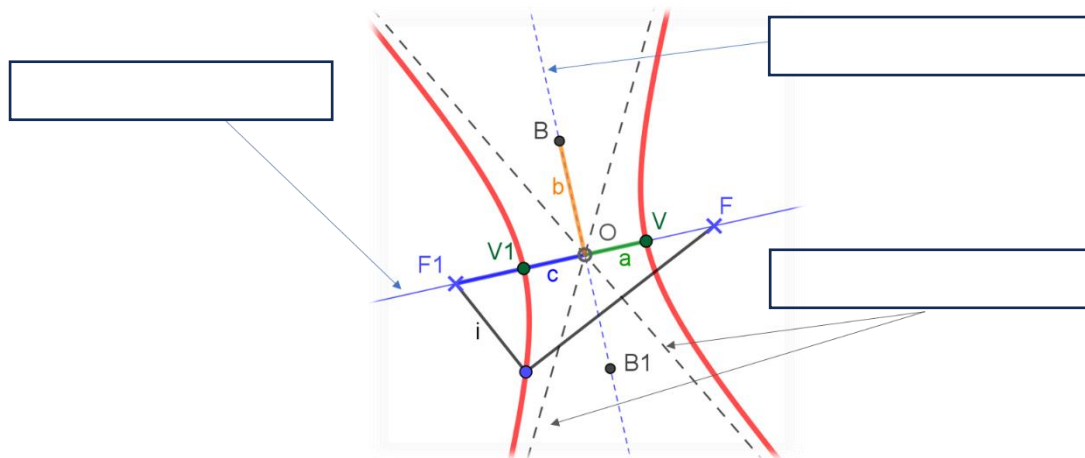
Vídeo: La Hipérbola

Enlace del vídeo de elaboración propia: <https://youtu.be/LpmkZGzbyMs>

CUESTIONARIO:

1. Indica en cada uno de los recuadros, como se llama la recta que señalan.

Ilustración 45. Elementos de una hipérbola. Cuestionario. Elaboración propia.



2. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones es una hipérbola? (puedes señalar varias opciones)

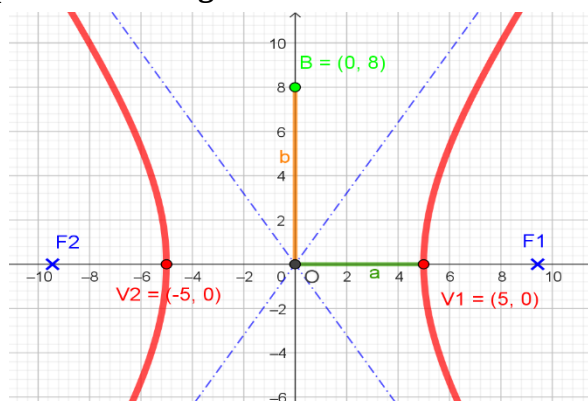
- a) $x^2 - y^2 = 4$
- b) $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+4}{4}\right)^2 = 1$
- c) $(y-2)^2 - x^2 - 4 = 0$
- d) Todas las anteriores son correctas

3. Si tenemos la ecuación $(x-2)^2 - (y+5)^2 = 16$ ¿Cuál es el punto centro C y la distancia a o semieje mayor $\overline{OV}$?

- a) C (-2, 5); a = 4
- b) C (2, -5); a = 16
- c) C (2, -5); a = 4
- d) C (4, -25); a = 16

4. ¿Cuál es la ecuación que representa la hipérbola de la figura?

- a) $x^2 + y^2 = 4$
- b) $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+4}{4}\right)^2 = 1$
- c) $(y-2)^2 + x^2 - 4 = 0$
- d) Todas las anteriores son correctas



5. Para calcular las asíntotas de las hipérbolas, realizamos una operación matemática llamada límite, que todavía no conocemos. Podrías explicar con tus palabras que significa

y porqué se llega a la siguiente expresión: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pm b \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} \right) = \pm \frac{b}{a} x$

6. Las asíntotas de un hipérbola horizontal y centrada en el origen de coordenadas, tiene la siguiente expresión: $y = \pm \frac{b}{a} x$. Explica que tipo de rectas son y la ecuación de la recta en la que te basas.

7. La excentricidad de las hipérbolas puede ser:

- a) Mayor o igual a 1.
- b) Entre 0 y 1
- c) Siempre es menor de 1
- d) Siempre es mayor de 1

8. Marca las respuestas correctas (puedes señalar varias):

- a) Cuando la excentricidade de una hipérbola horizontal es 1, las asíntotas están muy verticales.
- b) Si la excentricidade de una de hipérbola horizontal tiene un valor muy bajo, la curva se va pareciendo a dos rectas horizontales.
- c) Si la excentricidade de uma hipérbola horizontal tiene un valor muy alto, la curva se va pareciendo a dos rectas verticales.
- d) Todas las respuestas anteriores son correctas.

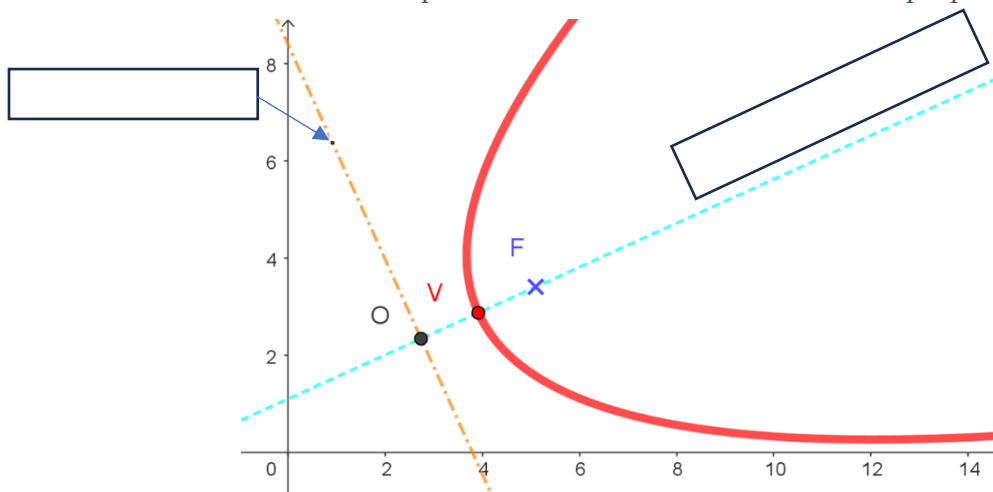
Vídeo: La Parábola

Enlace del vídeo de elaboración propia: <https://youtu.be/MUw501WCfgg>

CUESTIONARIO:

1. Indica en cada uno de los recuadros, como se llama la recta que señalan.

Ilustración 46. Elementos de una parábola. Cuestionario. Elaboración propia.



2. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones es una parábola? (puedes señalar varias opciones)

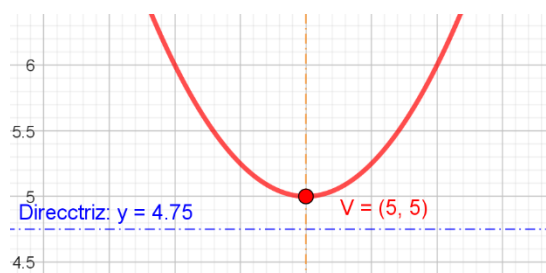
- a) $x^2 - y^2 = 4$
- b) $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+4}{4}\right)^2 = 1$
- c) $(y-2)^2 - x^2 - 4 = 0$
- d) $2y^2 + 3x = 0$

3. Si tenemos la ecuación $5(x-5) = 2(y+5)^2$ ¿Cuál es el vértice (V) y la distancia p ($\overline{OF}$)?

- a) $V(\sqrt{5}, \sqrt{5}); p = 5/2$
- b) $V(-\sqrt{5}, \sqrt{5}); p = 2/5$
- c) $V(-\sqrt{5}, \sqrt{5}); p = 5/4$
- d) $V(5, -5); p = 5/4$

4. ¿Cuál es la ecuación que representa la parábola de la figura?

- a) $(y-5) = 2(x-5)^2$
- b) $\left(\frac{x-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{4}\right)^2 = 1$
- c) $(y-5) = (x-5)^2$
- d) Todas las anteriores son incorrectas



5. La excentricidad de las parábolas puede ser:

- a) Mayor que 1.
- b) Siempre menor que 1, pero nunca negativa.
- c) Solo puede valer 1
- d) Siempre es mayor de 1

6. Marca las ecuaciones que son parábolas horizontales:

- a) $(y - 5) = 2(x - 5)^2$
- b) $\left(\frac{x-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{4}\right)^2 = 1$
- c) $(x - 5) = (y - 5)^2$
- d) $(x - 5) = \left(\frac{y-5}{4}\right)^2$

Vídeo: Cónicas Generales**Enlace de vídeo de elaboración propia:** <https://youtu.be/00FYLLBpdEM>**CUESTIONARIO:****1. Identifica cada cuna de las siguientes curvas:**

a) $(y - 5) = 2(x - 5)^2$

b) $\left(\frac{x-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{4}\right)^2 = 1$

c) $y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$

d) $(x - 5)^2 = \left(\frac{y-5}{4}\right)^2 + 1$

2. Dada la ecuación $-3x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 5y = -1$ sabrías que tipo de curva cónica es.

a) Una parábola vertical

b) Una circunferencia

c) Una parábola horizontal

d) Una elipse

3. Dada la ecuación $-3x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 5y = -1$, cuál es su centro O.

a) O (1/3, 5)

b) O (-0,33, 5)

c) O (3, 1/2)

d) O (3/2, 1/10)

4. Dada la ecuación $-y^2 - 4x + 10y = -2$, indica que tipo de curva es y su excentricidad.a) Una parábola vertical con $e = 1$ b) Una hipérbola con $e = 2$ c) Una parábola horizontal con $e = 1$ d) Una elipse con $e = 1/2$ **5. Identifica las siguientes curvas e indica si son verticales, horizontales o inclinadas.**

a) $(x - 1)^2 = \left(\frac{y-5}{4}\right)^2 + 1$: _____

b) $3x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 5y + 2xy = -1$: _____

c) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 5y + 2xy = 1$: _____

d) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 5y + \frac{1}{2}xy = 1$: _____

Vídeo: Historia y Aplicaciones de las Secciones Cónicas**Enlace:** <https://www.youtube.com/watch?v=lWrX5bUbNyo>Vídeo extraído del canal de YouTube **Paganerius** <https://www.youtube.com/@paganerius>

En este vídeo, de unos 9 minutos, se hace una revisión histórica muy interesante que culmina con un pequeño extracto de aplicaciones en los que se utilizan este tipo de secciones.

CUESTIONARIO:

- 1. Cuáles de los siguientes matemáticos, que han sido importantes en el desarrollo y conocimiento de las secciones cónicas, pertenecen a la cultura griega.**
 - a) Apolonio de Perga, Arquímedes y Descartes
 - b) Isaac Newton, Descartes y Menecmo
 - c) Menecmo, Euclides y Papo de Alejandría (Pappus, para los amigos).
 - d) Ninguna de las anteriores es correcta.
- 2. Apolonio de Perga escribió el tratado más importante sobre secciones cónicas en la época griega. De cuántos libros constaba este tratado y cuál de ellos se perdió.**
 - 1) El tratado constaba de 5 libros y el primero se perdió.
 - 2) El tratado constaba de 4 libros y el cuarto se perdió.
 - 3) El tratado constaba de 8 libros y el último se perdió.
 - 4) El tratado constaba de 3 libros y el último se perdió.
- 3. Según el autor del vídeo, quién revolucionó el campo de la astronomía y le dedico el 4º capítulo de su libro “Parte óptica de la astronomía” a las secciones cónicas.**
 - a) Apolonio de Perga
 - b) Arquímedes
 - c) Johannes Kepler
 - d) Euclides
- 4. Según Kepler, cuantos focos tienen las curvas cónicas.**
 - a) 2 focos
 - b) Entre 1 y 2 focos
 - c) Depende de la sección cónica que estemos tratando
 - d) Ninguna de las anteriores es correcta.
- 5. De cada sección cónica que te presentamos, indica la distancia entre sus focos.**
 - a) Circunferencia:
 - b) Elipse:
 - c) Hipérbola:
 - d) Parábola:

6. Sabrías decir que es un foco ciego según Kepler.

- a) El segundo foco de la circunferencia
- b) Son los focos de una recta, que es un cónica degenerada.
- c) Es el segundo foco de una parábola.
- d) Todas las anteriores son correctas.

7. Sobre las secciones cónicas degeneradas, indica como se denominan, explica porqué piensas que se llaman así y que tipo de sección se produce entre el cono y el plano, para generarlas.

- 1) _____

- 2) _____

- 3) _____

8. El fenómeno de reflexión que se produce en una elipse, es utilizado en medicina para realizar un procedimiento llamado litotricia. Explica en que consiste.

9. En el vídeo, no se han explicitado aplicaciones con la circunferencia, cuáles se te ocurren que tienen.

10. Unas de las aplicaciones más importantes que tiene las secciones cónicas, es que describe la trayectoria de un objeto cuando se lanzan con una cierta fuerza. Describe de que curva se trata y el condicionante que se debe dar para que se cumpla.

Vídeos: El fenómeno de la Reflexión y las Curvas Cónicas

En esta ocasión se van a visionar dos vídeos de corta duración:

Vídeo 1: Reflexión de las Cónicas

Enlace: https://www.youtube.com/watch?v=C63tEIT09_w

Vídeo extraído del canal de YouTube **Florencia Codina**, <https://www.youtube.com/@florenciacodina2207>.

En este vídeo, de tan solo 3 minutos, la autora ha sido capaz de resumir y explicar claramente en que consiste este fenómeno. La exposición se inicia con la explicación del fenómeno y de los ángulos incidente y reflejado. A continuación, desarrolla como se lleva a cabo este fenómeno en las superficies curvas, por medio de la tangente en un punto. Por último, enseña que ocurre con la parábola y con la elipse.

Vídeo 2: Whispering Gallery

Enlace: <https://www.youtube.com/watch?v=7nbxSCxiq2o>

Vídeo extraído del canal de YouTube **Atlas Obscura**, <https://www.youtube.com/user/atlasobscura>.

El vídeo nos muestra una curiosa zona del **estación central de Nueva York**, denominada Galería de los secretos o **Whispering gallery** en inglés. Esta zona tiene una bóveda elíptica y en las esquinas están los focos. A pesar del ruido existente en este edificio, que siempre está muy concurrido, se puede escuchar con suficiente nitidez la canción que un cantante está interpretando en la otra esquina de la galería abovedada.

CUESTIONARIO:

- 1. Responde si es verdadero o falso, la siguiente frase: El ángulo de incidente de un rayo, sobre una superficie plana, es el mismo que el ángulo reflejado.**
 - a) Verdadero
 - b) Falso
- 2. Responde si es verdadero o falso, la siguiente frase: Cuando la superficie es curva, nos basamos en la recta tangente para calcular los ángulos de incidencia y reflejados, pero en este caso hay que sumar al segundo 45° .**
 - a) Verdadero
 - b) Falso
- 3. Responde si es verdadero o falso, la siguiente frase: En las curvas elípticas, los rayos que pasan por uno de sus focos, se reflejan en el otro foco, pero esto no ocurre igual con las hipérbolas.**

- c) Verdadero
- d) Falso

4. Responde si es verdadero o falso, la siguiente frase: En una curva parabólica, los rayos que inciden de manera perpendicular a la directriz, se reflejan en el foco.

- c) Verdadero
- d) Falso

5. Cuál de las siguientes aplicaciones se deben al fenómeno de la reflexión en secciones cónicas. Se pueden señalar varias respuestas.

- a) Las antenas parabólicas.
- b) Las órbitas elípticas de los planetas del sistema solar.
- c) Equipo médico para eliminar cálculos renales (máquina de litotricia).
- d) Las bicicletas elípticas.

6. Reflexiona sobre el fenómeno que ocurre en las parábolas y explica, si crees que puede que tenga algo que ver con la situación del segundo foco de la parábola (foco ciego).

7. Describe con tus palabras el fenómeno de la Galería de los Secretos que está situada en la estación central de Nueva York.

Vídeo: Las Leyes de Kepler

Enlace: <https://www.youtube.com/watch?v=sZFGRHarvHk>

Vídeo extraído del canal de YouTube **Ciencias Para Todo**, cuyo autor es Jaume campos, <https://www.youtube.com/@Cienciasparatodo>.

En este vídeo, de unos 11 minutos, se hace una revisión del contexto histórico de la astronomía, sobre todo de la época de Johannes Kepler; a continuación, realiza una descripción de las tres leyes de Kepler; y, para finalizar, hace una mención a la teoría de la relatividad de Einstein.

CUESTIONARIO:

8. Johannes Kepler, con la publicación de sus tres leyes, en su libro Astronomía Nova, que describió:

- a) Explicó que hace que los planetas se muevan alrededor del sol con órbitas elípticas.
- b) Describió cómo se mueven los planetas alrededor del sol.
- c) Explicó que la tierra gira alrededor del sol, contradiciendo que el resto de los planetas conocidos giraban alrededor de la tierra.
- d) Intentó explicar que las órbitas que siguen los planetas alrededor del sol son circulares, ya que este era el pensamiento de la época.

9. En la época que le tocó vivir a Johannes Kepler, la figura que se consideraba imperaba en el universo era la circunferencia y la esfera. Probablemente, esto era así por la influencia del pensamiento:

- a) Aristotélico
- b) Platónico
- c) Pitagórico
- d) Ninguno de los anteriores

10. Responde si es verdadero o falso, la siguiente frase: Tycho Brahe, considerado el astrónomo con mejores registros de los astros de la época, era muy religioso y por eso se llevaba muy bien con Johannes Kepler y le cedió toda la información que tenía.

- a) Verdadero
- b) Falso

11. Johannes Kepler, después de muchos intentos por conseguir demostrar que el movimiento de los planetas era circular, se dio cuenta de que era elíptica gracias a que observó el movimiento de un planeta, que casualmente era el que mayor excentricidad tenía.Cuál es ese planeta:

- a) Venus
- b) Mercurio
- c) Martes
- d) Plutón

12. Podrías explicar, qué crees que hubiera sucedido, si Kepler hubiera elegido otro planeta con una excentricidad muy baja. Ayuda: tabla con algunas excentricidades.

Tabla 13. Excentricidad de las órbitas de algunos planetas del sistema solar.

Nota: elaboración propia, basada en Wikipedia, https://es.wikipedia.org/wiki/Excentricidad_orbital

Mercurio	Venus	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
0.2056	0.0068	0.0934	0.0483	0.0560	0.0461	0.0097

13. Responde si es verdadero o falso, la siguiente frase: La primera ley de Kepler nos indica que las órbitas de los planetas son elípticas y el sol se encuentra en el centro.

- e) Verdadero
- f) Falso

14. Responde si es verdadero o falso, la siguiente frase: La tercera ley de Kepler afirma que los planetas más alejados al sol se mueven más lentamente que los que están más cerca.

- e) Verdadero
- f) Falso

15. Explica porqué cree el autor del vídeo, que la teoría de la relatividad de Einstein, hubiera sido de gran interés a Johannes Kepler.

ANEXO VI Problemas Contextualizados

Las **actividades 16, 17 y 18** se realizan con la estructura cooperativa “**El Número**” (Pujolàs et al., 2011) y, consistirá en la realización de problemas abiertos y contextualizados sobre aplicaciones de las curvas cónicas. Los grupos tendrán que resolver el problema y, después, un estudiante en representación de su grupo expondrá el problema para toda la clase. El resto alumnos podrán intervenir y discutir los puntos en los que no estén de acuerdo. Cada grupo, siguiendo los criterios de la rúbrica del [anexo IX](#), realizarán una autoevaluación de sus trabajos.

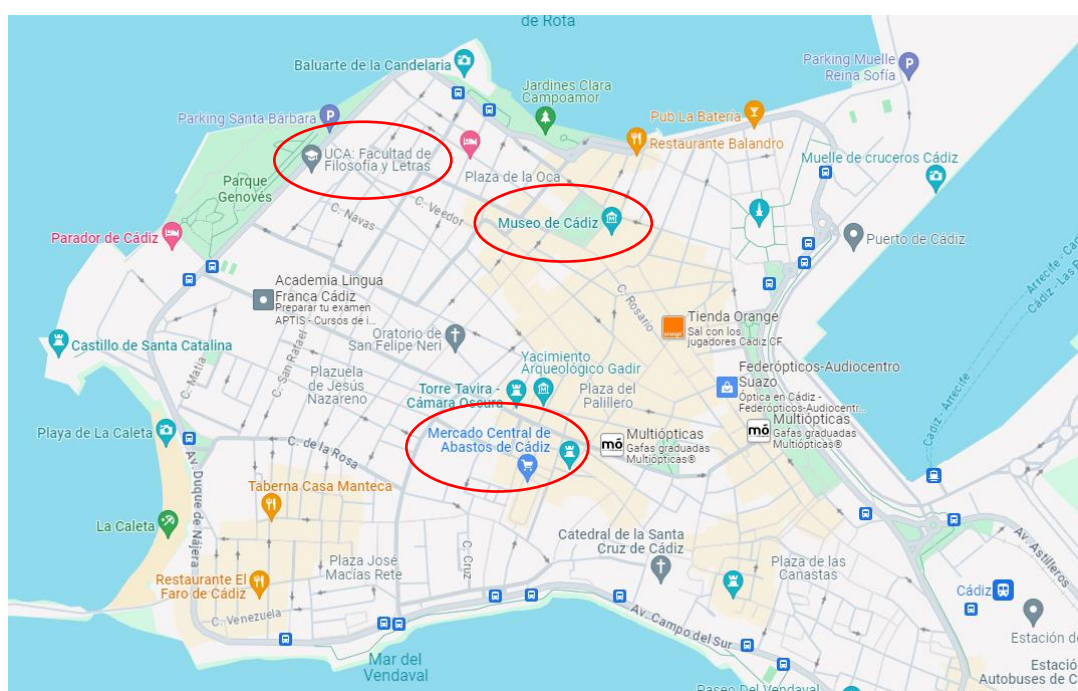
Actividad 16. Problema Contextualizado Sobre Aplicaciones de las Cónicas

PROBLEMA 1

Tus padres quieren comprarse una casa en el centro de la ciudad de Cádiz. Uno de los criterios que están siguiendo para la búsqueda, es que estén a la misma distancia de las tres ubicaciones siguientes: El museo de Cádiz, El mercado de abastos central y la facultad de filosofía y letras. Para ayudarlos, vas a intentar localizar el punto equidistante a esos tres puntos. Con la ayuda del plano que se presenta a continuación:

- Sitúa los tres puntos en un plano coordenados.
- Consigue la ecuación de circunferencia que pasa por los tres puntos.
- Señala en plano coordenado el centro de la circunferencia y el radio.
- Utilizando el Google Maps, sabrías decir en que calle y número estaría ese punto.

Ilustración 47. Mapa de Cádiz en Google Maps, elaboración propia basada en la aplicación Google Maps.

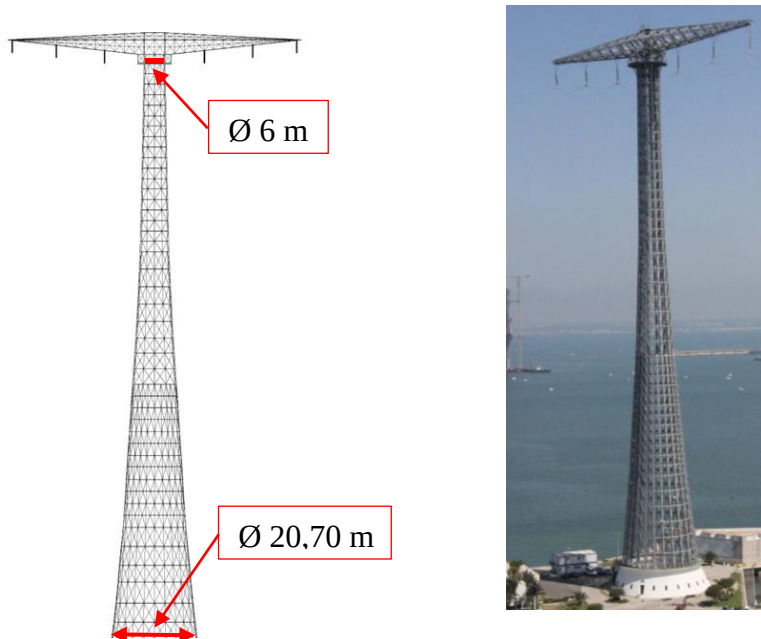


PROBLEMA 2

Uno de los iconos más representativos de la bahía de Cádiz, sin duda, son sus torres de electricidad. Estas son, dos torres de alta tensión, situadas a ambos lados de la bahía de Cádiz y que sirven para unir la antigua central térmica con la red general de electricidad. Su construcción en 1960 fue, y sigue siendo, una de las obras de ingeniería de mayor envergadura e impacto para nuestra ciudad. La estructura sigue una curva hiperbólica, como se puede observar en la ilustración 49.

Su diámetro superior es de 6 metros de diámetro y el de la base de 20,70 metros. La altura, de la parte hiperbólica de la estructura, mide 150 m. Con estos datos ¿te atreves a calcular la hipérbola que utilizaron los ingenieros para su diseño?

Ilustración 48. Torres de electricidad de la Bahía de Cádiz. Elaboración propia basada en imágenes extraídas de Wikipedia, https://es.wikipedia.org/wiki/Pilones_de_C%C3%A1diz



- Calcula la ecuación canónica de la curva hiperbólica de la torre.
- Calcula sus focos.
- Calcula sus asíntotas.
- Dibuja la curva en un plano cartesiano y señala todos sus elementos.

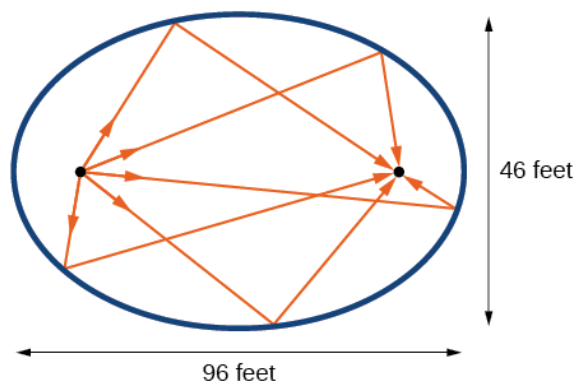
Actividad 17. Problemas Contextualizado Sobre el Fenómeno de la Reflexión

PROBLEMA 1

El Capitolio, en Washington, D.C., existe un salón que tiene la propiedad de las salas de los secretos. Este es el **Salón Nacional de las Estatuas** (National Statuary Hall en inglés), porque actualmente está dedicada a la colección de esculturas de personajes ilustres estadounidenses. Pero, originalmente, se utilizaba para las reuniones de los parlamentarios. En esa época, John Quincy Adams, el sexto presidente de los Estados Unidos, descubrió un valioso secreto. Colocó su escritorio en un punto estratégico de la sala y esto le permitía escuchar conversaciones privadas, de otros parlamentarios y senadores, situados en otra zona distante de la sala. A continuación, te presentamos una imagen actual y un croquis con sus dimensiones:

Ilustración 49. Salón Nacional de las Estatuas del Capitolio en Washington D.C.

Nota: Autor de la foto Patrick Gillespie, Flickr, <https://flic.kr/p/22dxQ5M>



- ¿Cuál es la forma estándar de la ecuación de la elipse que representa el contorno de la habitación? Junto con la ecuación hay que representar la figura en un plano cartesiano.
- Si el presidente Quincy Adams, puede oír a algunos congresistas hablar y no están en su escritorio, ¿A qué distancia están del presidente?
- Dibuja la elipse que representa la planta en un plano cartesiano y señala la situación del escritorio, los senadores y el centro de la sala.

PROBLEMA 2

Unos ingenieros de telecomunicaciones están diseñando una antena parabólica para recibir la señal de los canales satélites de televisión. La señal es recibida por un receptor situado en el foco de la curva parabólica, que crea el paraboloide (superficie de revolución formada por una parábola). Los diámetros de plato más comerciales son los de 65, 85 y 100 cm.

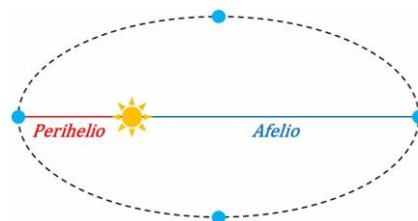


- Calcula las distintas ecuación que describen las parábola para que la puedan introducir en los programas de fabricación.
- Según las ecuaciones planteadas anteriormente, señala a que distancia del fondo de la parábola elegida debe situarse el receptor de señales.
- Dibuja en un plano coordenado las curvas diseñadas incluyendo la posición del receptor.

Actividad 18. Problema Contextualizado Sobre las Leyes de Kepler**PROBLEMA 1**

El cometa Halley es un cometa grande y brillante que gira alrededor del sol aproximadamente cada 76 años. Es el único cometa que se puede ver a simple vista, aunque solo lo podrás ver como mucho un par de veces en tu vida. El cometa describe una órbita elíptica con una excentricidad $e = 0,968$ y, cuando pasa por la zona más cercana al sol (perihelio), está a 0,57 UA (unidades astronómicas).

- ¿Cuál es la distancia del afelio? El afelio es la distancia más alejada del sol a la que se encuentra un astro o planeta.



- Escribe la ecuación canónica y dibújala en un sistema de ejes coordenados.
- ¿La órbita del cometa Halley se parece más a una circunferencia o a un óvalo?

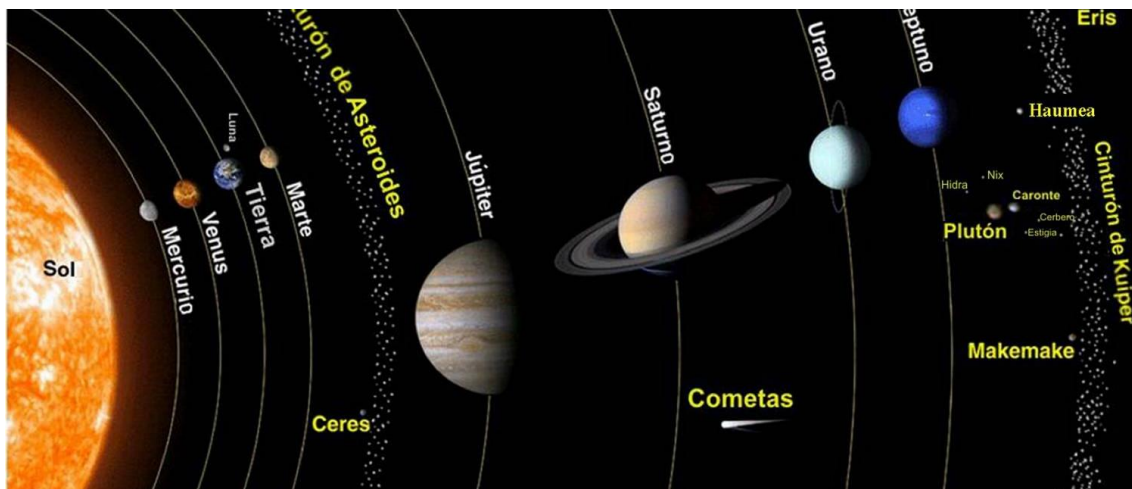
PROBLEMA 2

Sabiendo que el perihelio de la tierra es 147, 5 millones de kilómetros y el afelio de 152,6 millones.

- ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de la tierra?
- Escribe la ecuación canónica y dibújala en un sistema de ejes coordenados.
- ¿Crees que te darías cuentas que la órbita terrestre es elíptica en vez de circular si la ves dibujada a una escala conveniente?

Ilustración 50. El sistema solar.

Nota: Autor de la foto Manuel Fernández, Flickr, <https://flic.kr/p/xXRA7L>



ANEXO VII Actividad 19. Investigación: Curvas Cónicas en Nuestra Provincia

La **actividad 19** se realiza con la estructura cooperativa compleja o técnica cooperativa, denominada “**Grupos de investigación**” (Pujolàs et al., 2011). Esta técnica necesita de más desarrollo y tiempo para su realización, por eso, parte se realizará en clase y parte en su tiempo particular, pero siempre siguiendo el criterio del trabajo en equipos.

La investigación, que se ha llamado “**Curvas cónicas en tu provincia**”, consiste en la búsqueda de las cuatro curvas en el entorno de la provincia de Cádiz. Pueden estar en la arquitectura urbana (plazas, puentes, fuentes), edificios singulares, logotipos de empresas de la ciudad, alumbrado público, arte, etc. Se les solicita que las descubran y que calculen sus ecuaciones y todos sus elementos. Para la presentación del trabajo, se ha determinado una evaluación conjunta entre los grupos o coevaluación, siguiendo una [escala de observación](#) que se encuentra en el [anexo IX](#).

La investigación constará de las siguientes fases:

- 1) **Búsqueda de información** sobre el tema: buscar en la arquitectura urbana, ingeniería, diseños de logotipos de empresas que sean de la provincia de Cádiz y , en general, en todo el entorno de la ciudad en general.
- 2) **Análisis y síntesis de la información**: Recopilar toda la información, filtrar las mas interesantes y resolver las curvas cónicas.
- 3) **Presentación** del tema al resto de grupos de la clase: Realizar una presentación para la exposición.

ANEXO VIII Actividad 21. Evaluación Final Curvas Cónicas

La evaluación final será escrita y de manera individual. Las preguntas y ejercicios se desarrollan a continuación:

1. Identifica cada cuna de las siguientes curvas:

a) $(y - 3) = (x + 1)^2$

b) $\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{4}\right)^2 = 1$

c) $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{2}x - \frac{1}{2}$

d) $(x - 1)^2 = \left(\frac{y-5}{10}\right)^2 + 1$

2. Dada la ecuación $-6x^2 - 1y^2 - 4x + 20y = -2$ sabrías que tipo de curva cónica es.

a) Una parábola vertical

b) Una circunferencia

c) Una parábola horizontal

d) Una elipse

3. Identifica las siguientes curvas e indica si son verticales, horizontales o inclinadas.

a) $(x - 2)^2 = \left(\frac{y-5}{2}\right)^2 + 1$: _____

b) $6x^2 - y^2 - 4x + 20y + 4xy = -2$: _____

c) $-x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 5y + 2xy = 1$: _____

d) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 5y + \frac{1}{2}xy = 1$: _____

4. Identifica las secciones cónicas y dibújalas, calculado todos sus elementos y su excentricidad, según la curva que sea.

a) $5x^2 + 3x - 8y = 0$

b) $4x^2 + 2x + 1 - 3y = 0$

c) $3 - 3x + y^2 - 3y + 4 = 1$

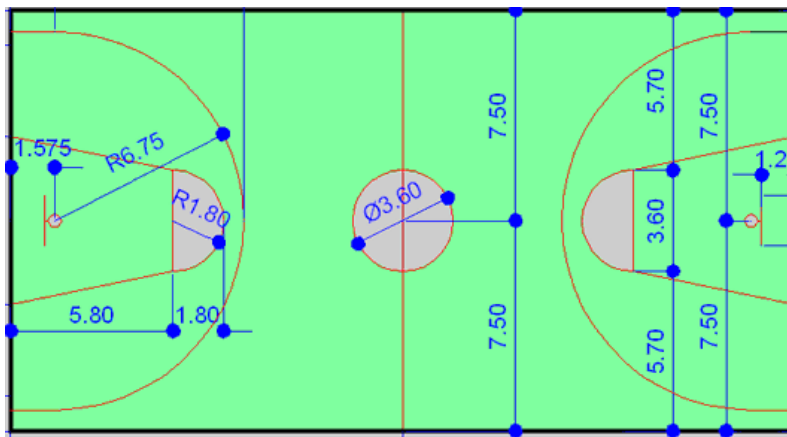
d) $\frac{(x-2)^2}{4} - y^2 = 2$

5. Estás jugando un partido de baloncesto y quieres encestar un triple. Sabemos que la distancia que hay de la línea de 3 puntos a la canasta es de 6,75 m (al punto centro de la circunferencia de la canasta) y que la canasta está a una altura 3,05 m. Supón que el tiro lo inicias, con el punto centro de balón, a la altura de tu cabeza (tu misma altura).



- Elige unos ejes de coordenadas y sitúate a ti en el mismo, desde donde quieres realizar el tiro (una distancia mayor a 6, 675 m).
- Calcula una ecuación que represente la trayectoria del balón para encestar.
- Representa esta curva en el plano coordenado y representa todos sus elementos.

Ilustración 51 Medidas de una pista oficial de baloncesto, imagen extraída de la web oficad, http://www.oficad.com/medidas_y_dimesnsiones/pbaloncesto.gif



6. Define que es la excentricidad y como cambia con las distintas cónicas.

7. Pon un ejemplo de aplicación de cada una de las curvas cónica. Debes explicar en que se basan esas aplicaciones y si son útiles o no para el desarrollo del ser humano.

ANEXO IX Instrumentos para la Evaluación del Alumnado

En las rúbricas siguientes, para ahorro de espacio, se van a utilizar las siglas siguientes: **IN** (0-4): Insuficiente o No conseguido; **S** (5): suficiente o Poco conseguido; **B** (6): Bien o Conseguido; **N** (7-8): Notable o Muy Conseguido; **SB** (9-10): Sobresaliente o Excelente ; Cr. Ev: Criterio de Evaluación.

En la diana de evaluación, en las casillas de la tabla habrá que poner una calificación del 1 a 5, que corresponden con: **1**: Insuficiente (0-4); **2**: Suficiente (5); **3**: Bien (6); **4**: Notable (7-8); **5**: Sobresaliente (9-10). Esto es necesario para que gráfica de la diana se dibuje correctamente.

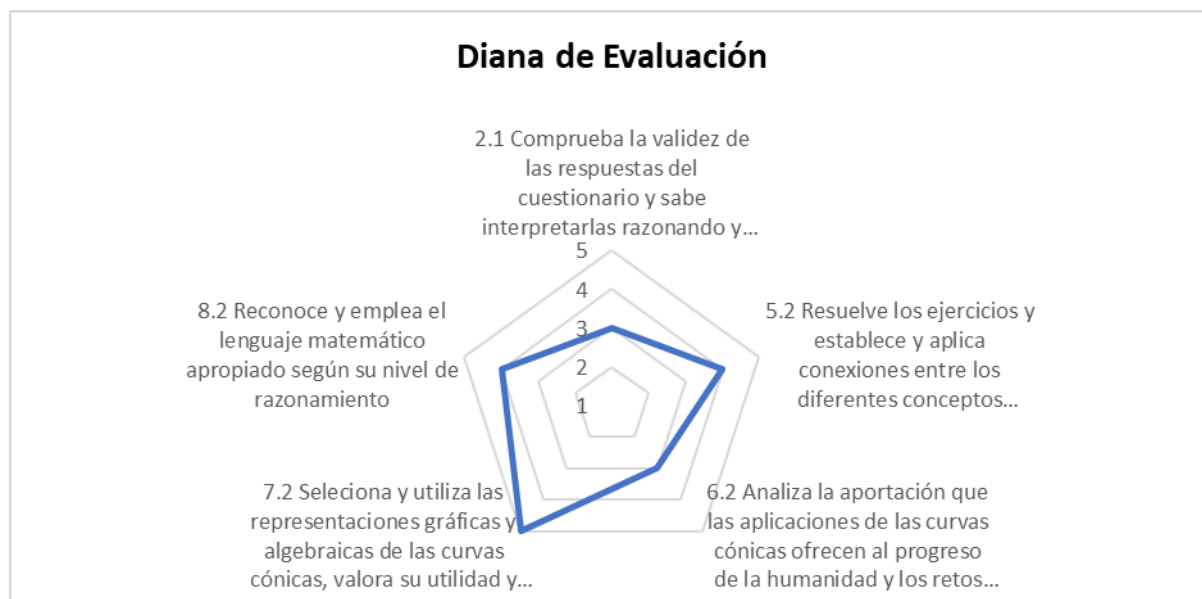
En todo caso, hay que tener presente, que las calificaciones deberán ser numéricas del 0 al 10 y sin decimales.

Diana de Evaluación para Cuestionarios de los Vídeos Instruccionales.

Tabla 14. Diana de evaluación para la evaluación de los cuestionarios de vídeos.

Nota: Elaboración propia

Cr. Ev.	Indicador de Logro	Calificación (1 a 5)
2.1	Comprueba la validez de las respuestas del cuestionario y sabe interpretarlas razonando y argumentando	3
5.2	Resuelve los ejercicios y establece y aplica conexiones entre los diferentes conceptos adquiridos en la instrucción.	4
6.2	Analiza la aportación que las aplicaciones de las curvas cónicas ofrecen al progreso de la humanidad y los retos científicos y tecnológicos actuales.	3
7.2	Selecciona y utiliza las representaciones gráficas y algebraicas de las curvas cónicas, valora su utilidad y las utiliza en sus respuestas.	5
8.2	Reconoce y emplea el lenguaje matemático apropiado según su nivel de razonamiento	4

*Ilustración 52. Ejemplo de diana de evaluación de los cuestionarios de vídeos instruccionales**Nota: Elaboración propia***Rúbrica Actividad 2. Gráfica de Curvas Cónicas.***Tabla 15. Rúbrica para la evaluación de la actividad 2. Dibujar Curvas Cónicas.**Nota: Elaboración propia*

Cr. Ev.	Indicador de Logro	IN (0-4)	S (5)	B (6)	N (7-8)	SB (9-10)
3.2	Emplea correctamente el SGD GeoGebra, según las guías facilitadas, para dibujar las distintas curvas cónicas.					
5.2	Dibuja las distintas curvas cónicas utilizando el concepto de lugar geométrico.					
7.1	Representa las curvas cónicas de las diferentes formas (compas y regla y con GeoGebra) y es capaz de apreciar que tecnología es más precisa.					
8.2	Utiliza el lenguaje matemático preciso para nombrar los distintos elementos de las curvas cónicas.					

Rúbrica Actividades 3, 4, 6, 9 y 13. Ejercicios Sobre Curvas Cónicas.

Tabla 16. Rúbrica para la evaluación de los ejercicios sobre curvas cónicas.

Nota: Elaboración propia.

Cr. Ev.	Indicador de Logro	IN (0-4)	S (5)	B (6)	N (7-8)	SB (9-10)
2.1	Comprueba la validez de los resultados de los ejercicios y sabe interpretarlas razonando y argumentando					
5.2	Resuelve los ejercicios estableciendo y aplicando conexiones con los diferentes conceptos adquiridos sobre curvas cónicas.					
7.2	Selecciona y utiliza las diferentes formas de representación de las curvas cónicas (gráfica y ecuaciones algebraicas) y lo utiliza para comunicar los resultados de los ejercicios.					
8.2	Reconoce y emplea un lenguaje matemático, adecuado a su nivel de razonamiento, en la resolución de los ejercicios					

Rúbrica Actividades 5, 7, 8, 10, 11, 12, 14, y 15. Investigar con GeoGebra.

Tabla 17. Rúbrica para la evaluación de las construcciones con GeoGebra.

Nota: Elaboración propia.

Cr. Ev.	Indicador de Logro	IN (0-4)	S (5)	B (6)	N (7-8)	SB (9-10)
3.2	Emplea correctamente el SGD GeoGebra en la formulación o investigación de los parámetros y propiedades de las curvas cónicas.					
5.2	Resuelve los ejercicios estableciendo y aplicando conexiones con los diferentes conceptos adquiridos sobre curvas cónicas.					
7.1	Representa los distintos conceptos y propiedades de las curvas cónicas, razonando y seleccionando los comandos de GeoGebra más adecuados.					
7.2	Selecciona y utiliza las diferentes formas de representación de las curvas cónicas (gráfica y ecuaciones algebraicas) y lo utiliza para comunicar los resultados de los ejercicios.					
8.2	Reconoce y emplea un lenguaje matemático, adecuado a su nivel de razonamiento, en la resolución de los ejercicios					

Rúbrica Actividades 16, 17, 18 y 19. Problemas Contextualizados y Trabajo de Investigación: Curvas Cónicas en tu Provincia.

Tabla 18. Rúbrica evaluación del trabajo de investigación: curvas cónicas en tu provincia.

Nota: Elaboración propia.

Cr. Ev.	Indicador de Logro	IN (0-4)	S (5)	B (6)	N (7-8)	SB (9-10)
1.1	Utiliza algunas estrategias y herramientas en la modelización y resolución de los problemas de la vida cotidiana, evaluando su eficiencia en cada caso.					
1.2	Obtiene todas las posibles soluciones matemáticas de los problemas de la vida cotidiana, utilizando la estrategia más apropiada y describiendo el procedimiento utilizado.					
2.1	Comprueba la validez matemática de las posibles soluciones de los problemas y sabe interpretarlas utilizando el razonamiento y la argumentación.					
3.2	Emplea herramientas tecnológicas adecuadas en la formulación y resolución de los problemas.					
5.2	Resuelve los problemas estableciendo y aplicando conexiones con los diferentes conceptos adquiridos sobre curvas cónicas y estableciendo diferentes enfoques.					
6.1	Resuelve los problemas en situaciones diversas utilizando procesos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real, otras áreas de conocimientos y las matemáticas					
6.2	Analiza la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y los retos científicos y tecnológicos que se plantea la sociedad.					
7.1	Representa los distintos conceptos y propiedades de las curvas cónicas, razonando y seleccionando los comandos de GeoGebra más adecuados.					
7.2	Selecciona y utiliza las diferentes formas de representación de las curvas cónicas (gráfica y ecuaciones algebraicas) y lo utiliza para comunicar los resultados de los ejercicios.					

8.1	Muestra organización al comunicar los conceptos sobre curvas cónicas, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados a su nivel de razonamiento.					
8.2	Reconoce y emplea un lenguaje matemático, adecuado a su nivel de razonamiento, en la resolución de los problemas					

Rúbrica Actividad 21. Evaluación Final: Curvas Cónicas.

Tabla 19. Rúbrica para la evaluación de la evaluación final: curvas cónicas.

Nota: Elaboración propia.

Cr. Ev.	Indicador de Logro	IN (0-4)	S (5)	B (6)	N (7-8)	SB (9-10)
1.1	Utiliza algunas estrategias y herramientas en la modelización y resolución de los problemas de la vida cotidiana, evaluando su eficiencia en cada caso.					
1.2	Obtiene todas las posibles soluciones matemáticas de los problemas de la vida cotidiana, utilizando la estrategia más apropiada y describiendo el procedimiento utilizado.					
2.1	Comprueba la validez matemática de las posibles soluciones de los problemas y sabe interpretarlas utilizando el razonamiento y la argumentación.					
5.2	Resuelve los problemas estableciendo y aplicando conexiones con los diferentes conceptos adquiridos sobre curvas cónicas y estableciendo diferentes enfoques.					
6.1	Resuelve los problemas en situaciones diversas utilizando procesos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real, otras áreas de conocimientos y las matemáticas					
7.1	Representa los distintos conceptos y propiedades de las curvas cónicas, razonando y seleccionando los comandos de GeoGebra más adecuados.					
7.2	Selecciona y utiliza las diferentes formas de representación de las curvas cónicas (gráfica y ecuaciones algebraicas) y lo utiliza para comunicar los resultados de los ejercicios.					

8.1	Muestra organización al comunicar los conceptos sobre curvas cónicas, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados a su nivel de razonamiento.					
8.2	Reconoce y emplea un lenguaje matemático, adecuado a su nivel de razonamiento, en la resolución de los problemas					

Escala de Observación para la Evaluación de las Actividades con Estructuras Cooperativas.

Tabla 20. Escala de observación para la evaluación de las actividades con estructuras cooperativas. Elaboración propia.

Equipo: _____		NOMBRE					NOMBRE					NOMBRE					NOMBRE				
Actividad: _____ Sesión nº: _____		CARGO					CARGO					CARGO					CARGO				
Cr. Ev.	INDICADOR DE LOGRO	IN	S	B	N	SB	IN	S	B	N	SB	IN	S	B	N	SB	IN	S	B	N	SB
2.1	Comprueba la validez de las posibles soluciones y los interpreta utilizando el razonamiento y la argumentación.																				
8.1	Muestra organización al comunicar las ideas matemáticas, empleando la terminología y rigor acordes a su nivel de razonamiento.																				
8.2	Reconoce y emplea el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor (según su nivel de razonamiento).																				
9.1	Afronta las situaciones de incertidumbre, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas																				
9.2	Muestra una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje.																				
9.3	Participa de forma activa en los equipos base, respetando las emociones y experiencias de los demás y escuchando su razonamiento, identificando las habilidades sociales más propicias y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables.																				

Escala de Observación para la Evaluación de las Presentaciones Orales.

Tabla 21. Escala de observación para la evaluación de las presentaciones orales.

Nota: Elaboración propia.

Equipo: _____		NOMBRE					NOMBRE					NOMBRE					NOMBRE				
Actividad: _____ Sesión nº: _____		CARGO					CARGO					CARGO					CARGO				
Cr. Ev.	INDICADOR DE LOGRO	IN	S	B	N	SB	IN	S	B	N	SB	IN	S	B	N	SB	IN	S	B	N	SB
1.1	Utiliza algunas estrategias y herramientas en la modelización y resolución de los problemas, evaluando su eficiencia en cada caso.																				
1.2	Obtiene todas las posibles soluciones matemáticas de los problemas, utilizando la estrategia más apropiada y describiendo el procedimiento utilizado.																				
2.1	Comprueba la validez matemática de las posibles soluciones de los problemas y sabe interpretarlas utilizando el razonamiento y la argumentación.																				
3.2	Empieza herramientas tecnológicas adecuadas en la formulación y resolución de los problemas.																				
5.2	Resuelve los problemas estableciendo y aplicando conexiones con los diferentes conceptos adquiridos sobre curvas cónicas y estableciendo diferentes																				
6.1	Resuelve los problemas utilizando procesos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real, otras áreas de conocimientos y																				
6.2	Analiza la aportación que las aplicaciones de las curvas cónicas ofrecen al progreso de la humanidad y los retos científicos y tecnológicos actuales.																				
7.1	Representa los distintos conceptos y propiedades de las curvas cónicas, razonando y seleccionando la tecnología más adecuada.																				
7.2	Selecciona y utiliza las diferentes formas de representación de las curvas cónicas (gráfica y ecuaciones algebraicas) y lo utiliza para comunicar la																				
8.1	Muestra organización al comunicar las ideas matemáticas, empleando la terminología y rigor acordes a su nivel de razonamiento.																				
8.2	Reconoce y emplea el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor (según su nivel de																				
9.1	Afronta las situaciones de incertidumbre, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de																				
9.2	Muestra una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de																				
9.3	Participa de forma activa en los equipos base, respetando las emociones y experiencias de los demás y escuchando su razonamiento, identificando las habilidades sociales más propicias y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables.																				

ANEXO X Instrumentos para la Evaluación de la Práctica docente

En los cuestionarios y los instrumentos de evaluación siguientes, hay que valorar los distintos indicadores o ítems, con una numeración del 1 a 5, que corresponden con:

- 1: Totalmente en desacuerdo
- 2: En desacuerdo
- 3: Ni de acuerdo ni en desacuerdo
- 4: De acuerdo
- 5: Totalmente de acuerdo

Cuestionario de Evaluación de la Práctica Docente para el Alumnado.

Tabla 22. Cuestionario de evaluación de la práctica docente para el alumnado.

Nota: Elaboración propia.

Ítem	A. Evalúa a tu profesor	(1 a 5)
1	El profesor domina la materia, la presenta de manera ordenada y la enlaza con otros contenidos matemáticos y de otras asignaturas	
2	El profesor presenta con claridad cuando debo ver los vídeos instruccionales, responder a los cuestionarios, entregarlos y recibir los comentarios del profesor.	
3	El profesor se expresa con claridad y pone ejemplos ilustrativos que me ayudan a entender la materia, tanto en clase como en los vídeos.	
4	El profesor se preocupa por mis problemas académicos y personales. Puedo contar con él para pedirle consejo y ayuda.	
5	El profesor conoce mis fortalezas y mis dificultades de aprendizaje. Sabe hasta donde puede exigirme y me ayuda a superarme.	
6	Con las preguntas que realiza el profesor, tanto en clase como en los cuestionarios y actividades, me ayuda a descubrir nuevos conocimientos por mí mismo.	
7	Las diferentes actividades que se realizan en la clase y, los grupos de trabajo son atractivos y tiene en cuenta mis gustos y preferencias.	
8	Los distintos sistemas y programas informáticos que utilizamos son fáciles e intuitivos. El profesor los domina y nos enseña a utilizarlos correctamente.	
9	El diseño, la puesta en práctica y la evaluación de la unidad didáctica (vídeos y actividades de clase), me ayudan a comprender y aplicar de manera práctica mis conocimientos.	
Ítem	B. Motivación del alumnado	(1 a 5)
1	Durante las diferentes sesiones puedo trabajar a mi propio ritmo	
2	Puedo tomar algunas decisiones sobre mis preferencias de aprendizaje	
3	El profesor me conoce y tiene en cuenta mis intereses y fortalezas	
4	Las actividades de clase me permiten interactuar con mis compañeros y experimentar con diferentes recursos y materiales.	
5	Las clases de matemáticas, en esta unidad didáctica, me han gustado y he adquirido los conocimientos suficientes.	

6	Me siento con ganas y motivado para la realización de las actividades de esta unidad didáctica.	
Ítem	C. Metodología y Evaluación	(1 a 5)
1	En las actividades de clase puedo trabajar junto a otros compañeros	
2	En los grupos base todos los componentes trabajan y realizamos las actividades de manera conjunta ayudándonos unos a otros.	
3	Puedo contar con el profesor cuando lo necesito	
4	Tengo un buen acceso a los contenidos de aprendizaje: Vídeos, presentaciones, etc.	
5	Los contenidos de aprendizajes son fáciles de entender y me permiten adquirir los conocimientos necesarios para seguir las clases y las evaluaciones.	
6	El docente nos informa, desde el principio, de los contenidos, los objetivos educativos y los criterios de evaluación y calificación.	
7	Puedo demostrar mis conocimientos de diferentes formas y con distintos recursos, a lo largo de la unidad didáctica.	

Dianas de Evaluación de la Práctica Docente para el Alumnado.

Ilustración 53. Diana de evaluación de las habilidades del docente. Elaboración propia.



Ilustración 54. Diana de evaluación de la motivación del alumnado. Elaboración propia.

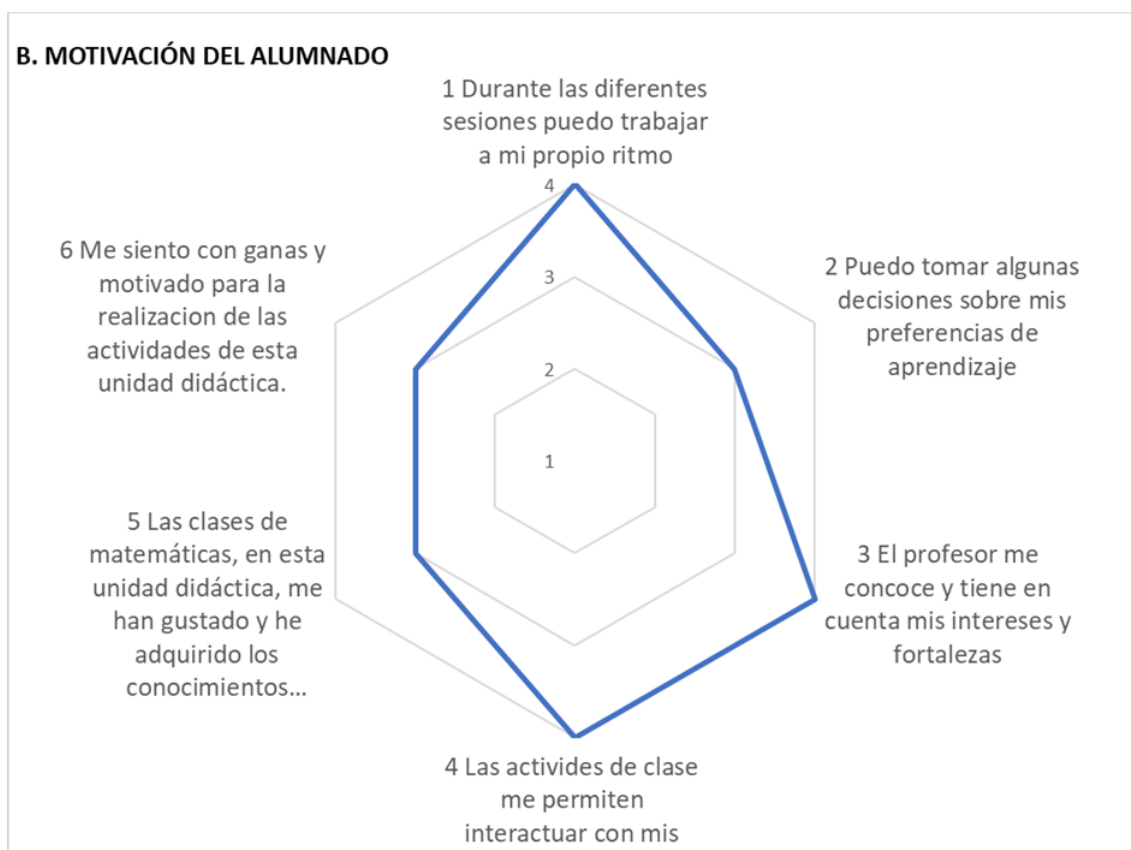
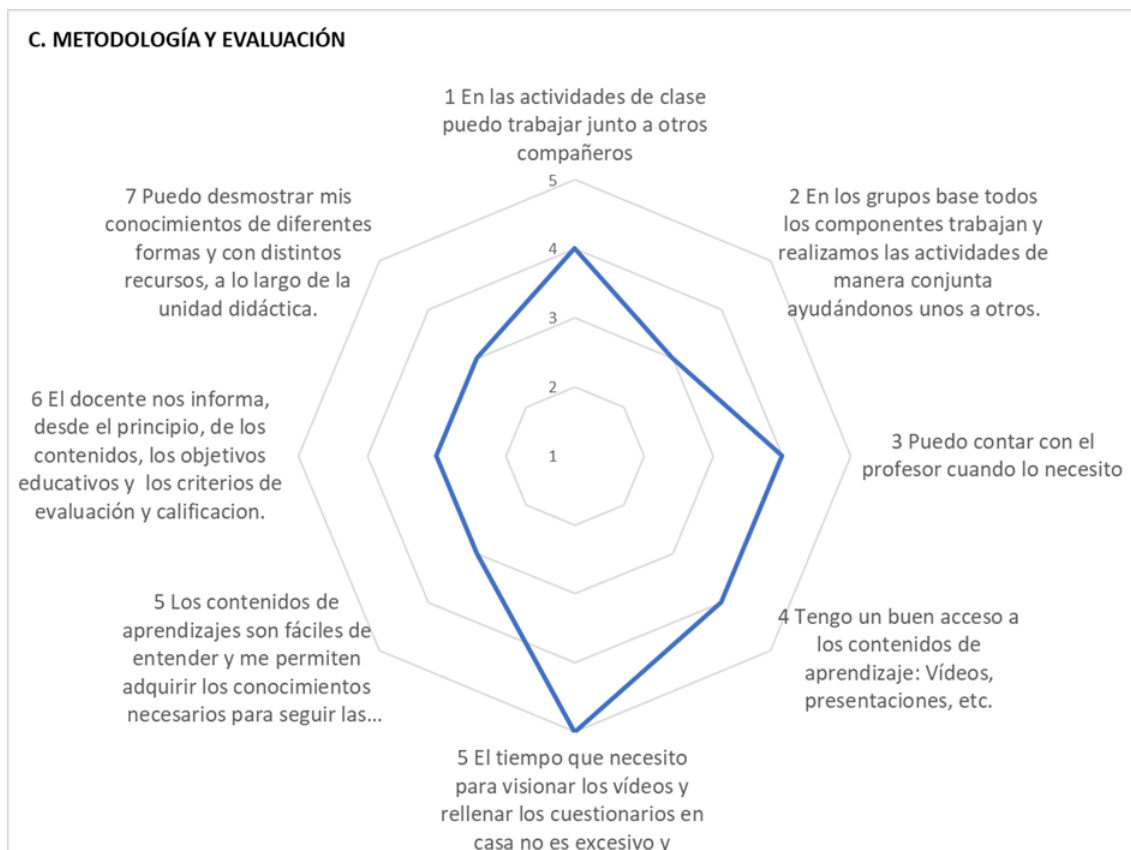


Ilustración 55. Diana de evaluación metodología y evaluación. Elaboración propia.



Cuestionario de la Propia Práctica Docente para el Profesor

Tabla 23. Cuestionario de la propia práctica docente para el profesor. Elaboración propia.

Ítem	A. Cumplimiento de Objetivos	(1 a 5)
1	Manipulación, visualización y construcción de curvas cónicas utilizando diferentes recursos, tanto físicos como digitales.	
2	Profundizar en el concepto de lugar geométrico y saber aplicarlo para la representación de curvas cónicas tanto de forma sintética como desde la geometría analítica, por medio de las coordenadas cartesianas y el álgebra.	
3	Conocer, interpretar y aplicar las distintas ecuaciones de las curvas cónicas, sabiendo utilizar la más adecuada, según el problema que se quiera modelizar o resolver.	
4	Utilizar el SGD GeoGebra para la construcción de curvas cónicas, investigar sus ecuaciones y explorar sus parámetros y propiedades.	
5	Resolver problemas en el plano utilizando modelos matemáticos, tanto gráficos como algebraicos, en situaciones matemáticas, de la vida real y conectando con otras disciplinas y con el patrimonio cultural y artístico de Andalucía.	
6	Fomentar la comunicación con lenguaje matemático, adaptado a la edad y a los niveles de razonamiento, las descripciones de las curvas cónica, sus propiedades y sus aplicaciones prácticas.	
7	Aprender a cooperar fomentando la empatía, la ayuda mutua, la participación, la asunción de responsabilidades, la conciencia sobre los propios errores y la autorregulación del aprendizaje.	
8	Desarrollar habilidades sociales, la inclusividad y la atención a la diversidad.	
Ítem	B. Planificación y Temporización	(1 a 5)
1	Se han realizado todas las actividades planificadas y según la cronología programada	
2	El número y la complejidad de las actividades han sido suficiente para alcanzar los objetivos.	
3	Se han cumplido los tiempos estimados en la programación	
4	Los tiempos programados para la realización de las actividades en el aula han sido los adecuados, tanto por defecto como por exceso, para que todos los estudiantes.	
5	Los tiempos empleados por los estudiantes en casa para el visionado de los vídeos ha sido el programado (dentro de los márgenes previstos).	
6	La secuencia o fases de la programación han favorecido el paso a un nivel superior de razonamiento	
Ítem	C. Metodologías y Agrupamientos	(1 a 5)
1	Los contenidos digitales han estado accesibles a los estudiantes y sin problemas técnicos	
2	Los vídeos instruccionales son de calidad, con una duración adecuada (4' -12') y adaptados a todos los niveles de razonamiento de los estudiantes.	

3	Las actividades han tenido en cuenta los gustos y preferencias del alumnado y han conseguido una motivación adecuada.	
4	Los recursos y materiales utilizados han sido adecuados para cada actividad y han contribuido al logro de los objetivos didácticos.	
5	Las metodologías han fomentado el pensamiento crítico, el razonamiento y la argumentación.	
6	Los problemas contextualizados han sido significativos y motivantes para los estudiantes	
7	El trabajo de investigación ha sido significativo y motivante para los estudiantes	
8	Las metodologías empleadas han permitido que los estudiantes puedan trabajar a distintos ritmos, según sus capacidades, y puedan tomar ciertas decisiones sobre su manera de aprender.	
9	Las metodologías permiten las interacciones entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor	
10	Los grupos realizados son heterogéneos y han funcionado con un buen clima, respeto y ayuda mutua.	
11	Los estudiantes han asumido su doble responsabilidad de aprender y contribuir a enseñar a sus compañeros de grupo.	
12	Las estructuras cooperativas empleadas han permitido el desarrollo y mejora de las habilidades personales y sociales de los integrantes.	
13	Todos los estudiantes reciben una atención adecuada, independientemente de sus características personales, sociales o de otra índole.	
14	Las metodologías han permitido que el profesor pueda estar más tiempo con los estudiantes y que pueda estar más atento de sus necesidades y dificultades.	
Ítem	D. Evaluación	(1 a 5)
1	Se informa a los estudiantes de manera clara y comprensible de los contenidos, los objetivos educativos y los criterios de evaluación y calificación.	
2	Se proporcionan diferentes formas para que los estudiantes puedan demostrar sus conocimientos.	
3	Los estudiantes reciben una retroalimentación formativa de todas las actividades que realizan.	
4	Las retroalimentaciones se envían en poco espacio de tiempo	
5	Las retroalimentaciones vienen acompañadas de consejos y propuestas para la mejoras.	
6	Se analizan las respuestas de los cuestionarios y observaciones en clase, para detectar las dificultades y errores de los estudiantes en la adquisición de conceptos, y se toman las medidas correctoras adecuadas para corregirlos.	
7	Las autoevaluaciones y evaluaciones entre iguales se han realizado de manera objetiva y siguiendo unos instrumentos de evaluación adecuados y adaptados a los estudiantes.	