



UNIVERSIDAD A DISTANCIA DE MADRID  
(UDIMA)

*Facultad de Ciencias de la Salud y de la Educación  
Departamento de Educación*

*Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria, Bachillerato,  
Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*

***ENSEÑANZA REALISTA DE LA GEOMETRÍA EN SECUNDARIA  
DESDE EL MEDIO URBANO***

**David Melero Herrera**

**TRABAJO DE FIN DE MÁSTER**

Bajo la dirección de:

**Ana María Lejárraga García**

MADRID  
Junio 2021

**ÍNDICE**

RESUMEN.....	1
1. INTRODUCCIÓN .....	2
2. JUSTIFICACIÓN.....	3
3. OBJETIVOS.....	7
4. MARCO TEÓRICO .....	8
4.1 Sobre los errores y obstáculos en la enseñanza de la Geometría.....	8
4.2 Sobre los referentes en la enseñanza de la Geometría en Secundaria. ....	11
4.3 Sobre la caracterización de los procesos cognitivos en Geometría. ....	13
4.4 Sobre la metodología de resolución de problemas en Geometría en Secundaria. ....	16
4.5 Sobre la teoría de la Educación Matemática Realista.....	17
4.6 Sobre la Modelización Matemática. ....	20
5. PROCEDIMIENTO DE LA PROPUESTA DE INNOVACIÓN .....	21
5.1 CONTEXTO .....	21
5.2 DESTINATARIOS E IMPLICADOS.....	22
5.3 FINALIDAD.....	22
5.4 PLANIFICACIÓN DE LA PROPUESTA.....	25
5.4.1 METODOLOGÍA .....	25
5.4.2 FASES.....	28
5.4.3 RECURSOS.....	31
5.4.4 ACTIVIDADES.....	32
5.4.4.1 Definición de curso y contexto autonómico .....	32
5.4.4.2 Temporalización.....	33
5.4.4.3 Objetivos.....	33
5.4.4.4 Contenidos y Competencias Clave .....	34
5.4.4.5 Descripción de las actividades .....	35
5.4.5 EVALUACIÓN.....	51
5.4.5.1 Evaluación de los alumnos. ....	51
5.4.5.2 Evaluación de la propuesta. ....	53
6. CONCLUSIONES Y VALORACIÓN CRÍTICA .....	54
7. REFERENCIAS .....	59
8. ANEXOS.....	62
8.1 Cuadro Resumen Actividades.....	62
8.2 Relación actividades Geogebra.....	69
8.3 Rúbricas Actividades y Evaluación de la propuesta. ....	71

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> <i>Esquema conceptual procesos de Aprehensión.</i> .....	15
<b>Figura 2.</b> <i>Esquema conceptual del modelo tipo o base de propuesta.</i> .....	29
<b>Figura 3.</b> <i>Mapa 1 (ciudad de Albacete).</i> .....	38
<b>Figura 4.</b> <i>Mapa 2 (ciudad de Albacete en el año 1915).</i> .....	38
<b>Figura 5.</b> <i>Esquema de la estructura de proceso en actividad 1. Medida de distancias.</i> .....	39
<b>Figura 6.</b> <i>Plano detalle del Parque Abelardo.</i> .....	40
<b>Figura 7.</b> <i>Posibles modelos geométricos para el Parque Abelardo.</i> .....	40
<b>Figura 8.</b> <i>Esquema de la estructura del proceso en actividad 2. Medida superficie Parque Abelardo.</i> .....	41
<b>Figura 9.</b> <i>Vista aérea de la Torre del Agua, Albacete.</i> .....	43
<b>Figura 10.</b> <i>Vista actual de la Torre del Agua. Albacete.</i> .....	44
<b>Figura 11.</b> <i>Sección transversal del depósito superior obra de Jose Luis Escario.</i> .....	45
<b>Figura 12.</b> <i>Ejemplificación de toma de medida horizontal.</i> .....	45
<b>Figura 13.</b> <i>Esquema de estructura de proceso en la actividad 1. Torre del Agua.</i> .....	46
<b>Figura 14.</b> <i>Vista aérea de la Biblioteca Depósitos del Sol, Albacete.</i> .....	47
<b>Figura 15.</b> <i>Vista interior de la Biblioteca Depósitos del Sol.</i> .....	47
<b>Figura 16.</b> <i>Ejemplificación de esquema realizado en pizarra con imagen proyectada de medición de altura mediante semejanza de triángulos.</i> .....	48
<b>Figura 17.</b> <i>Vista aérea de la piscina del Complejo Deportivo Carlos Belmonte.</i> .....	49
<b>Figura 18.</b> <i>Esquemas de posibles modelos geométricos en actividad 3. Volumen de agua en la piscina.</i> .....	49
<b>Figura 19.</b> <i>Vista aérea del Instituto de Educación Secundaria Diego de Siloé, Albacete.</i> .....	50

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.</b> <i>Cuadro resumen de Fases y sesiones programadas.</i> .....	62
<b>Tabla 2.</b> <i>Cuadro Resumen Actividades.</i> .....	62
<b>Tabla 3.</b> <i>Rúbrica Actividad Sesión 1 Fase 1.</i> .....	71
<b>Tabla 4.</b> <i>Rúbrica Actividad Sesión 2 Fase 1.</i> .....	72
<b>Tabla 5.</b> <i>Rúbrica Evaluación de Implantación del modelo.</i> .....	73

## RESUMEN

El presente Trabajo de Fin de Máster consiste en un trabajo de innovación en la enseñanza de la Geometría en Secundaria, a través del diseño de un modelo para generar actividades basadas en una metodología activa mediante el apoyo del medio urbano y arquitectónico como hilo conductor y fuente de contexto, inspiración y conexión con la realidad para las mismas. Como instrumentos de perfilado y modelado de dicho modelo, contamos con el análisis de la enseñanza de la Geometría a través de sus principales referentes y obstáculos, una breve revisión de los procesos cognitivos que participan en dicha enseñanza, así como con la metodología de resolución de problemas para la estructuración de las actividades y los principios de la Educación Matemática Realista como eje vertebrador del modelo. Este último pretende ser un posible referente o inspiración para otros docentes en su búsqueda de metodologías que conecten Matemáticas y realidad, antes que la descripción de una actividad cerrada y específica, a través del rico y diverso medio que es la ciudad. No cualquier ciudad, sino en la que nuestros protagonistas, los alumnos, han crecido, y en la que algún día dejarán huella.

**Palabras clave:** Matemáticas, Geometría, Educación Secundaria, Educación Matemática Realista, Problemas Contextualizados, Contexto, Medio Urbano.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se desarrolla una propuesta de innovación educativa en la enseñanza de la geometría en las matemáticas de la etapa de Secundaria a través del diseño de actividades, fruto de una investigación y reflexión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría y los principios del enfoque de la Educación Matemática Realista.

La motivación y germen precursor del trabajo parten de una necesidad doble: por un lado, una problemática existente en la didáctica de contenidos relacionados con el área de Geometría en Matemáticas, traducida en obstáculos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, que surgen por la persistencia en métodos tradicionales tales como falta de comprensión de los conceptos y falta de motivación; por otro lado, la importancia y pertinencia del propio campo de la Geometría para el desarrollo del discente, tanto por su relevancia cultural como las ventajas que supone en el desarrollo del educando (Barrantes y Balletbo, 2012a).

Es por ello que nuestro objetivo principal será la mejora en la comprensión de la Geometría en los alumnos de Secundaria. Con ello, podremos también conseguir un aumento de la motivación en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Como punto inicial, se parte de un proceso de investigación doble: en primer lugar, una breve revisión crítica de una serie de errores clasificados y detectados por diversos autores en la enseñanza de este campo de la Matemática, así como algunas recomendaciones y conclusiones expuestas por los mismos. Esta revisión estará complementada con un análisis de los procesos cognitivos en Geometría y de la metodología de resolución de problemas. En segundo lugar, se realiza una investigación y reflexión de los principios del enfoque de la Educación Matemática Realista, así como del proceso de Modelización matemática, los cuales tienen como fin relacionar realidad y matemáticas. Es en esta última idea y principio en el que se apoya, nace, desarrolla y cristaliza el presente trabajo.

Por ello, las actividades buscan establecer conexiones con el contexto real, en concreto con el medio urbano y arquitectónico, preferiblemente cercanos al contexto del alumno. Estas conexiones se sintetizan en la definición de una situación de partida real caracterizadas por contener y referirse a elementos presentes en el medio físico y urbano vinculado al alumno, o en su defecto, algún otro similar que pueda despertar de igual manera su interés. Dichas

actividades se llevan al aula a través de una metodología cercana y basada en la resolución de problemas, utilizando como medio conductor y como "ventana" al mundo urbano la herramienta digital Google Maps, aplicación idónea por su accesibilidad a todo tipo de público y por su precisión en la representación del entorno urbano, y el software de geometría dinámica Geogebra.

Por último, el producto final de este trabajo se condensa en la creación de un modelo que ayude a diseñar, generar y desarrollar posibles actividades para la enseñanza alineadas con los objetivos comentados, y que pueda llegar a ser referente útil o inspiración para otros docentes en su búsqueda de metodologías que conecten Matemáticas y realidad. En el presente trabajo, y a modo de ejemplarización, se ha desarrollado una propuesta de actividades para un hipotético caso particular (para un curso de 3º de la ESO en un centro de enseñanza situado en la CCAA de Castilla-La Mancha) junto con el método de evaluación.

## **2. JUSTIFICACIÓN**

Como se ha comentado anteriormente, el presente trabajo pretende responder a una doble necesidad: una problemática inherente al proceso de enseñanza de la Geometría y la importancia y relevancia de esta.

Hasta hace relativamente poco, el proceso de enseñanza de la geometría se ha caracterizado por una preferencia por la memorización de conceptos y propiedades, frecuentemente basados en otros anteriores que habían sido incorporados de la misma manera y "por tanto" no interiorizados y comprendidos por el alumno. Así mismo, la resolución de problemas se entendía como un proceso automático, en el que no se daba lugar a trabajar aspectos y propiedades geométricas. Este tipo de metodología conducía a la génesis de obstáculos en el proceso de enseñanza, tales como las dificultades de comprensión de los conceptos, la falta de motivación de los alumnos y, por ende, la desmotivación del profesorado (Barrantes et al., 2014).

Es por ello que una revisión y un espíritu de continua mejora en las metodologías usadas en la enseñanza de la Geometría, así como una búsqueda de nuevas y diferentes

propuestas, se hace pertinente. En este documento partiremos de la revisión de algunos de los errores en los que "de manera general" se incurre en la didáctica de la Geometría, para poder dar forma a estas nuevas propuestas de mejora y contribuir en el desarrollo de una enseñanza y aprendizaje más significativos.

Por otra parte, pero no menos importante, es necesario resaltar la relevancia e importancia del área de la Geometría como campo de conocimiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que esta es "parte integrante de la cultura de la humanidad, no solo por su función instrumental sino también porque incentiva el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, a fin de comprender y modificar el entorno" (Barrantes y Balletbo, 2012a, p. 140). Se hace igualmente necesario destacar la gran influencia que tiene la Geometría en el desarrollo del educando, concretamente en cómo este se comunica y relaciona con el entorno, favoreciendo la conexión con el mundo en el que vive, ya que el conocimiento de esta materia influye en determinadas capacidades, como son la percepción visual y la comprensión del espacio tridimensional, o el razonamiento lógico para su posterior aplicación en otras materias de la Matemática (Barrantes et al., 2014).

Teniendo en cuenta lo anterior, nos preguntamos sobre las creencias, actitudes y concepciones de la geometría que tienen los principales agentes educativos. Según un estudio de Pérez y Guillén (2007) sobre una muestra de docentes, a la mayoría de ellos les gusta la Geometría. Además, estos autores recogen algunas conclusiones interesantes y pertinentes para nuestro trabajo:

Ahora bien, no hay uniformidad de opinión entre los profesores encuestados respecto de si a los alumnos les gusta la geometría o no es así (...). Se considera que su enseñanza se reduce principalmente a una aplicación de fórmulas o que se enseña de forma algebraica. Se expresa también que no se estudia lo suficiente en las aulas y que puede gustar porque "tiene bastante aplicación a la vida real" y "se pueden ver las formas". Sus respuestas han apuntado que, para que a los alumnos les guste la geometría, en la enseñanza de la misma se tendría que "utilizar contextos cotidianos para que se vea su aplicación", "presentar su enseñanza de una forma práctica y tangible", "usar recursos para suavizar los problemas de imaginación

espacial" y "evitar que el estudio de magnitudes sea una simple aplicación de fórmulas" (Pérez y Guillén, 2007).

De lo anterior podemos concluir y reiterar que será pertinente buscar las conexiones de la realidad y el contexto con la Geometría, así como utilizar recursos que permitan una manipulación práctica y de exploración, tales como softwares de geometría dinámicos. En cuanto a la primera idea, encontramos en los principios del enfoque de la teoría de la educación matemática realista, fundada por Hans Freudenthal y "posteriormente" revisada y desarrollada (tomando como ejemplo los seis principios nucleares de ésta) por otros autores, como Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014). Dicha teoría nos equipa con una base sólida desde donde construir y diseñar actividades de enseñanza-aprendizaje que propicien todo lo anteriormente expuesto. Algunos de los rasgos más significativos de esta teoría, recogidos por Alsina (2009), son los siguientes:

- Uso de situaciones de la realidad o problemas del propio contexto como punto de partida para matematizar a partir de la modelización, como vehículo entre lo abstracto y lo concreto.
- La interacción intensa en el aula entre profesor y estudiantes. Esta interacción es necesaria para guiar y coordinar el proceso de modelización.
- El aprendizaje de las Matemáticas por los estudiantes como reinención guiada antes que un aprendizaje a base de una matemática pre-construida.

Por ello, en las actividades diseñadas en el presente documento, se busca que los alumnos sean los que construyen su propio conocimiento a través de un proceso guiado de interacción y mediado por el docente.

En cuanto a la búsqueda de situaciones reales y pertenecientes al contexto cercano y vinculado al alumno, este trabajo se centra y toma como referencia o "espacio muestral" el medio urbano. Es la ciudad, pueblo, o núcleo urbano donde resida, crezca y se relacione física, social y culturalmente el alumno y el grupo clase un gran y valioso referente y fuente de ideas para nuestras situaciones de partida. De esta manera, además de presentar un contexto realista al alumno, buscamos presentar un contexto cercano, vinculado a él y a su memoria y experiencia personal, con el que se identifique y establezca conexiones que



despierten el interés y la motivación. El medio urbano nos brinda una excelente oportunidad para que el alumno explore a través de la Geometría y desarrolle un sentido espacial y volumétrico mediante la presentación de elementos arquitectónicos y urbanos tales como edificios y espacios urbanos, y la utilización de conceptos y propiedades de las figuras geométricas para extraer, manipular, transformar, presentar e interpretar información. El medio visual e informático utilizado será el de la herramienta de libre acceso y de amplia difusión Google Maps, el cual, en la mayoría de ciudades, nos permite hacer una exploración libre del medio urbano en tres dimensiones desde una posición aérea.

Sin embargo, aunque la ciudad donde se integre el centro escolar sea nuestro prioridad, no debemos dejar escapar la ocasión de utilizar otros referentes arquitectónicos, bien de interés cultural o histórico, bien de interés clave y pertinente para el problema que queramos diseñar por sus características arquitectónicas o físicas. Llegados a este punto, se hace necesario añadir el interés personal por este tipo de contexto dada la trayectoria personal y profesional en el campo de la Arquitectura por parte del autor del presente trabajo. Esta intención de poner en contacto al alumno con la cultura arquitectónica entronca con el espíritu de la Competencia Clave 7. Conciencia y Expresiones Culturales, descrita en el marco de la LOE:

Así pues, la competencia para la conciencia y expresión cultural requiere de conocimientos que permitan acceder a las distintas manifestaciones sobre la herencia cultural (patrimonio cultural, histórico-artístico, literario, filosófico, tecnológico, medioambiental, etcétera) a escala local, nacional y europea y su lugar en el mundo. Comprende la concreción de la cultura en diferentes autores y obras, así como en diferentes géneros y estilos, tanto de las bellas artes (música, pintura, escultura, arquitectura, cine, literatura, fotografía, teatro y danza) como de otras manifestaciones artístico-culturales de la vida cotidiana (vivienda, vestido, gastronomía, artes aplicadas, folclore, fiestas...). (Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, p. 15).

Por último, si uno de los grandes apoyos para el diseño de las actividades es esta búsqueda de situaciones reales que acabamos de comentar, el otro será la de la manipulación de la geometría mediante softwares de geometría dinámica. Según Mora (2007), los

programas de geometría dinámica (GD) son útiles para que el alumno descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones prácticas. De hecho, este autor también señala la situación favorable del uso de la geometría dinámica GD en la legislación educativa en otros países de nuestro entorno como Francia, en el que se recomienda su uso en los cuatro cursos de secundaria, o en Alemania, en el que el uso de estas herramientas es obligatoria para algunos de sus estados federales. En nuestro país, según la Competencia Clave 3. Competencia Digital descrita en el marco de la LOE:

La persona ha de ser capaz de hacer un uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles con el fin de resolver los problemas reales de un modo eficiente, así como evaluar y seleccionar nuevas fuentes de información e innovaciones tecnológicas, a medida que van apareciendo, en función de su utilidad para acometer tareas u objetivos específicos. (Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, p. 10).

También encontramos referencias en los contenidos curriculares tales como: "Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas", en el apartado Contenidos del Bloque 3 Geometría en Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO (RD 1105/2014, de 26 de Diciembre, p. 393).

### **3. OBJETIVOS**

El objetivo principal del trabajo es el de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la etapa de Secundaria mediante el diseño de un modelo para generar actividades con una metodología activa basada en los principios de la teoría de la Educación Matemática Realista y el uso de herramientas informáticas. En un segundo orden, podemos definir los siguientes objetivos secundarios:

- Superar determinados obstáculos presentes en el panorama educativo de la enseñanza de la Geometría, tales como la presentación y trabajo de contenidos sin conexión con el mundo real, o la reducción de dicha enseñanza a la mera aplicación automática de fórmulas.

- Aumentar la motivación y el interés del alumno por los contenidos de la asignatura y su propio proceso de aprendizaje.
- Hacer uso de las herramientas tecnológicas disponibles para la obtención de información del mundo real, así como del análisis de datos en un entorno virtual controlado.
- Hacer uso de la Modelización Matemática y la metodología de resolución de problemas en la consecución del objetivo principal.
- Aumentar el interés y la curiosidad del alumno por el medio urbano y el contexto físico-social-cultural donde vive, así como por su patrimonio cultural e histórico.
- Aplicación particular del modelo en una situación contextualizada: curso de 3º de la ESO, para la asignatura Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas, en un centro de enseñanza secundaria en la ciudad de Albacete, Castilla-La Mancha.

#### **4. MARCO TEÓRICO**

Los referentes teóricos utilizados como base para desarrollar la propuesta pueden dividirse en dos grandes bloques: el primero, una investigación o recorrido a través la revisión de errores y recomendaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, y de los procesos cognitivos involucrados en él. El segundo, un repaso a los principios fundamentales de la teoría de la Educación Matemática Realista, de la metodología de resolución de problemas en Geometría, y de los procesos de Modelización Matemática.

##### **4.1 Sobre los errores y obstáculos en la enseñanza de la Geometría.**

En nuestro recorrido por los principales errores y obstáculos en la enseñanza de la Geometría, vamos a enumerar algunos que consideramos susceptibles de trabajar y mejorar con nuestra propuesta. Para ello recurrimos a un estudio realizado por Barrantes y Zapata (2008). Según los autores, es frecuente encontrar en la enseñanza tradicional y en la mayoría de los libros de texto ciertos estilos generalizados sobre figuras y conceptos geométricos, creando así esquemas mentales y conceptuales inadecuados que imposibilitan un pensamiento abierto y divergente, obstaculizando además el proceso de agilidad y abstracción al manejar ideas y contenidos. Dos causas principales de la aparición de estos errores son la utilización exclusiva de los libros de texto y la ausencia de otros recursos o materiales que puedan

ampliar dicho esquema conceptual. Ahora bien, es pertinente traer a colación la respuesta que encuentran los autores a la pregunta sobre qué ocurre en la mente de los alumnos una vez el concepto ha sido adquirido y se les pide identificar o construir ejemplos del mismo, respuesta para la que recurren a Vinner y Hershkowitz, (Barrantes y Zapata, 2008):

La identificación o construcción de ejemplos de un concepto supone que hay que tener en cuenta la imagen del concepto (el reflejo en la mente del alumno) y la definición del concepto (verbal) así como aquellas operaciones mentales (...) o físicas (...) en las que una comparación con el dibujo mental sea más fácil (p. 57).

Siguiendo a los autores, otro papel crucial lo juega la simbología visual, o la forma de presentar de la enseñanza tradicional las distintas figuras geométricas mediante un solo dibujo o un número insuficiente de ellos, provocando que el alumno no construya un esquema conceptual sólido y variado, sino uno estándar. Esta simbología visual puede provocar una malinterpretación de las representaciones por parte de los alumnos.

Otros posibles desencadenantes de errores son los llamados como distractores de orientación y distractores de estructuración. Estos distractores son atributos visuales con fuertes características visuales pero irrelevantes. En los primeros, son referidos como "aquellas propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto" (Barrantes y Zapata, 2008, p. 58). Por ejemplo, en los libros de texto y clases se tiende en la práctica mayoría de las veces a representar al menos un lado de ángulos o figuras en posición vertical u horizontal, o bien paralelos o perpendiculares a los lados del propio libro (la representación del triángulo rectángulo apoyado siempre sobre uno de sus lados en horizontal, puede provocar que los alumnos no consigan ver dicho triángulo cuando está en una posición diferente).

En cuanto a los distractores de estructuración, son definidos por los autores como una "presentación débil del concepto en el que ciertos elementos y propiedades son excluidos, probablemente sin intención" (Barrantes y Zapata, 2008, p. 61). Por ejemplo, la presentación de los triángulos isósceles con el lado desigual siempre como base, la presentación constante de altura estándar paralela al borde, o la escasez de figuras planas o sólidos de forma cóncava.

Otro tipo de obstáculos en el aprendizaje de figuras geométricas es el definido por Mesquita (1992) como "doble estatus de los objetos geométricos". Los autores del estudio explican que todo aquel concepto apoyado en objetos generales y abstractos (conceptos en Geometría) "por fuerza" no pueden ser expresados más que por una configuración que implique objetos concretos y particulares (representaciones externas), debido a su difícil disociabilidad, pudiendo provocar así una ambigüedad fuente de obstáculos.

Siguiendo el discurso de los autores, otra fuente de problemas en la enseñanza de la geometría son las definiciones del concepto. Según Gutiérrez y Jaime (1996), las metodologías usadas suelen presentar los conceptos en Geometría poniendo el acento en las definiciones más que en los ejemplos, que pueden ser los que tengan un impacto mayor en los alumnos y provoquen un efecto mental más significativo. De esta forma, los autores coinciden en que los alumnos formados sean conocedores de los conceptos geométricos de una forma teórica pero escasamente práctica, siendo poco capaces de resolver un problema geométrico planteado o que se pueda plantear en su vida cotidiana.

Por último, describiremos aquí algunas de las recomendaciones descritas por los autores del estudio, Barrantes y Zapata (2008). En primer lugar, en cuanto a los tiempos, orden y secuencias, los autores señalan que:

Es notorio cómo en la enseñanza-aprendizaje de la geometría, se fuerzan los tiempos de la conceptualización y se introducen muy pronto los conceptos abstractos obviando la realización de actividades concretas como consecuencia de esa utilización temprana de la nomenclatura definitiva (p. 69).

En segundo lugar, recomiendan que los profesores se detengan más en el mundo de las figuras llevando a cabo actividades y tareas interdisciplinarias con otras materias, como el Arte. En esta línea, subrayan la necesidad de aumentar el número de estas actividades en las que las propiedades y conceptos de las figuras geométricas se manipulen, incluyendo tareas de orientación de las figuras, de estructuración y de las distintas representaciones de la figura en el plano (Gracia, 1995). Recalcan así, como comentamos anteriormente, que el esquema conceptual se construye a partir de las experiencias del alumno, a raíz de situaciones muy

variadas y sin tener que comenzar por la definición. En último lugar, recomiendan la utilización de programas dinámicos de Geometría (como Geogebra o Cabri) con los que los alumnos puedan manipular las figuras y explorar los conceptos y relaciones geométricas.

Como recomendación final, los autores nos recuerdan la importancia de la observación y vigilancia del error, así como de su provocación para su posterior detección:

Esta metodología constructivista hace que los alumnos se enfrenten a sus propios errores mediante tareas en las que necesiten comprobar y reflexionar. Debemos provocar conflictos en sus mentes que verifiquen la inconsistencia de sus ideas frente a los distintos errores. Así estaremos en el camino de conseguir una mejora del conocimiento de las concepciones que los alumnos tienen sobre las figuras geométricas y todos los tópicos relacionados con ellas. (Barrantes y Zapata, 2008, p. 70)

#### **4.2 Sobre los referentes en la enseñanza de la Geometría en Secundaria.**

En esta sección procedemos a describir algunas conclusiones y referentes pertinentes con nuestra línea de trabajo extraídos de un trabajo de revisión y reflexión sobre tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en la educación secundaria (Barrantes y Balletbo, 2012b). En ella, los autores señalan la tendencia "en general" a trabajar la geometría desde una metodología de resolución de problemas, en la cual el alumno además de aumentar su motivación, aprende. Destacan además la inclinación actual a utilizar materiales de Geometría Dinámica, tales como los programas de Geometría Dinámica Geogebra o Cabri.

Entre las conclusiones que destacamos del estudio, los autores señalan la ayuda que supone en el proceso de enseñanza de conceptos geométricos los materiales contruidos o constructores como el papel, espejos, etc, permitiendo la manipulación basada en la exploración e investigación. No menos importante resulta llevar a cabo actividades en las que no se muestre a la Geometría como una ciencia aislada, sino que muestren sus relaciones con otras partes de las Matemáticas como Álgebra o la Probabilidad, así como con la actividad y la historia humana, amén de otras ciencias y el Arte, comprendiendo este último todas sus facetas y manifestaciones, pintura, escultura, arquitectura, etc.

Por otro lado, los autores destacan la especial importancia que tienen la Geometría Plana y la Geometría Espacial como áreas más tratadas en los artículos de los últimos años. Dentro de estas, observan que "en todos los documentos revisados se tiende hacia una metodología activa, en la que el alumno es el eje de su propio aprendizaje" (Barrantes y Balletbo, 2012b, p. 37).

Por último, los autores concluyen en la importancia del medio visual para el proceso de aprendizaje de conocimientos y conceptos geométricos, así como para mejorar la habilidad del alumno para razonar y validar las fórmulas geométricas. Este peso del medio visual viene provocado por el cambio de una cultura escrita a una cultura audiovisual. Destacamos la última reflexión de los autores, que hace hincapié en el medio o soporte para llevar la realidad al aula, así como de los programas de Geometría Dinámica:

Al aprendizaje significativo contribuyen también, los trabajos de la geometría mediante fotografías, películas y sobre todo con programas como Cabri y sus distintas versiones. La principal característica de esta geometría es que su enseñanza es dinámica, es decir, mediante el movimiento y sobretodo, muy visual. (Barrantes y Balletbo, 2012b, p. 38).

A continuación, enumeramos algunos trabajos y proyectos recogidos por los anteriores autores, por su similitud y paralelismo con la línea principal del presente trabajo. El primero es un proyecto de introducción a la geometría tridimensional a través de la cinematografía con la película "Cube" (Thibaut, 2004), que sirve como contexto para realizar diversas actividades, resultando en un gran ejemplo de proyecto interdisciplinar. Otro ejemplo en el que las Matemáticas surgen de situaciones reales es el trabajo planteado por Mercado y Custodio (2005), en el que nos metemos en la piel de diseñadores de camisetas teniendo en cuenta la geometría nazarí.

Otro gran campo para encontrar conexiones entre la Geometría y otras materias es, como comentamos anteriormente, el Arte con todas sus manifestaciones. Desde el estudio de formas geométricas como cubos e hipercubos en el "Bautismo de Cristo" (Martín, 2008), el análisis de las dimensiones en cuadros de Dalí (Corrales, 2004), un repaso a la obra de

Cornelius Escher y sus bases matemáticas (Corrales, 2008), pasando por la revisión de la obra de Leon Battista Alberti "*Ludi matematici*" en el que trata la geometría práctica y las reglas de medición de superficies y distancias de terrenos, alturas de torres, etc, (Millán, 2004), o las interesantes deducciones hipotéticas de proporciones geométricas en la construcción de determinados edificios medievales de García (2005).

En última instancia, destacamos una reflexión recogida por los autores fruto del análisis del trabajo de Gorgorió et al. (2000), en el que los profesores de Secundaria e investigadores en educación matemática desarrollan actividades geométricas aplicadas a las rotaciones:

Se incide en que las actividades que se propongan a los alumnos deben estar relacionadas con el currículo; permitir conexiones con distintas áreas matemáticas o no; ser la motivación o la introducción de un contenido básico; deben ser interesantes y flexibles para todo el alumnado de forma que: se planteen preguntas válidas, reflexione e interiorice y, establezcan redes con su vida cotidiana y sus aprendizajes anteriores. (Barrantes y Balletbo, 2012b, p. 145).

### **4.3 Sobre la caracterización de los procesos cognitivos en Geometría.**

A continuación, expondremos un breve repaso por los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas de geometría. La caracterización de dichos procesos ha sido extraída del trabajo de Coordinación de Procesos Cognitivos en Geometría de Torregrosa y Quesada (2007), ligado al análisis de lo que ellos llaman, capacidades geométricas. En particular nos interesan los conceptos y tipos de aprehensión, y la interacción entre ellos y con la representación.

Los autores comienzan caracterizando los procesos de visualización, siguiendo el modelo de Duval (1998), uno de los procesos clave para la actividad geométrica. En primer lugar comienzan acotando el significado de visualización, entendiéndola como el paso o la traslación desde el dibujo a un objeto mental, el cual estará relacionado con una serie de características matemáticas atribuidas por el observador. Este objeto o figura mental quedará



representado mediante una representación geométrica y otras posibles subconfiguraciones más simples.

En segundo lugar, restringen el concepto de visualización introduciendo el término de aprehensión (el Diccionario de la Real Academia Española define la aprehensión como "captación y aceptación subjetiva de un contenido de consciencia"), pudiéndose identificar tres tipos de la misma, caracterizadas como:

- Aprehensión perceptiva.

Caracterizada por la identificación simple de una configuración. Por ejemplo, el dibujo de un cuadrado puede verse (objeto mental) como una mesa, un edificio, o cuatro palos. Es el proceso más intuitivo.

- Aprehensión discursiva.

Caracterizada por la identificación de la configuración con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Tal identificación puede realizarse de dos maneras y en dos sentidos (denominado cambio de anclaje):

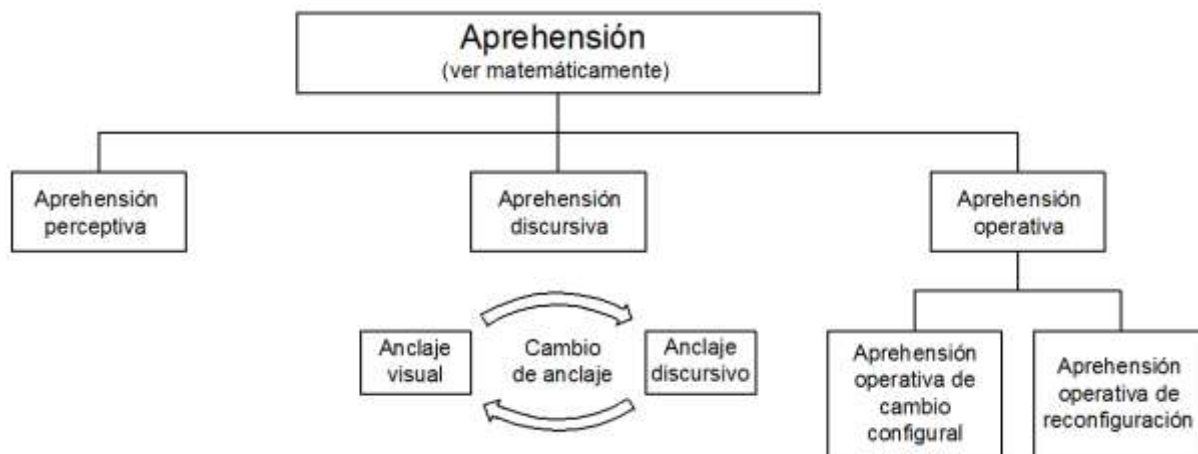
- Del anclaje visual al anclaje discursivo. Por ejemplo, si para un dibujo en el que aparece un cuadrado de vértices ABCD se le asocia la afirmación "ABCD es un cuadrado". Para ello, el observador debe identificar en el dibujo lo que caracteriza a un cuadrado; es decir, relacionar dibujo con las características de las definiciones relativas al cuadrado.
  - Del anclaje discursivo al anclaje visual. Por ejemplo, si para el enunciado "ABCD es un cuadrado", el alumno es capaz de realizar un dibujo que cumpla las características de ser un cuadrado.
- Aprehensión operativa.

Producida cuando se realiza alguna modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Clasificada en dos tipos:

- Aprehensión operativa de cambio figural. Una serie de nuevas subconfiguraciones o elementos son añadidos o sustraídos de la configuración inicial.
- Aprehensión operativa de reconfiguración. Existe alteración y manipulación de las subconfiguraciones iniciales de manera estratégica para resolver el problema.

A continuación, se presenta un esquema explicativo de los conceptos y tipos de aprehensión:

**Figura 1.** Esquema conceptual procesos de Aprehensión.



Fuente: Elaboración propia a partir de Torregrosa y Quesada (2007).

Seguidamente, los autores introducen el concepto de cambio dimensional, al que definen como el "proceso de identificación de configuraciones de dimensión diferente a la inicial" (Torregrosa y Quesada, 2007, p. 285). Según ellos, existen tres tipos de cambios relacionados con los procesos de visualización: el cambio dimensional, el cambio de anclaje y el cambio configural, siendo el segundo el más interesante para nuestro trabajo. En el cambio dimensional no hay asociación de afirmaciones matemáticas. Más relevante nos resulta el cambio de anclaje, fuertemente relacionado con la aprehensión discursiva y la manera de entender el dibujo (la configuración), a través de las propiedades matemáticas de la figura. Por último, se nos hace pertinente destacar la relación expuesta en su trabajo por los autores entre aprehensión y representación:

Destacamos que el cambio de anclaje es de gran importancia para coordinar los distintos modos de representación al solucionar problemas geométricos. Con respecto a los modos de representación se puede señalar que, debido a las características del contenido geométrico, gran cantidad de tareas vienen dadas en el modo figurativo y demandan traslaciones al modo numérico/simbólico y viceversa (Torregrosa y Quesada, 2007, p. 287).

#### **4.4 Sobre la metodología de resolución de problemas en Geometría en Secundaria.**

Para continuar con nuestros referentes teóricos, destacamos un trabajo de reflexión y análisis sobre la metodología de resolución de problemas y de laboratorio en Secundaria para la enseñanza de la Geometría (Barrantes et al., 2014). En él, los autores parten de un doble objetivo: por un lado, el desarrollo de la adecuación de la enseñanza de la Geometría a su medio ambiente (dando oportunidades de exploración del medio tridimensional), por otro, la preparación del alumno para niveles superiores mediante un enfoque basado en el razonamiento lógico. En palabras de los autores:

Esta metodología debe lograr que los alumnos no recuerden la Geometría como una materia aburrida sino que se produzca un cambio en su actitud y se interesen por las actividades geométricas de una forma natural, es decir, que les resulte una materia atrayente y motivadora. (Barrantes et al., 2014, p. 3).

Respecto al enfoque tradicional deductivo basado en la memorización de conceptos, teoremas y fórmulas, los autores recalcan la limitación que esto supone para la intuición como método para acceder al conocimiento geométrico mediante la manipulación, el tacto, la vista o el dibujo, que permiten al alumno habituarse y relacionarse con las formas, figuras y movimientos de su entorno, para posteriormente establecer las abstracciones necesarias. En contraposición, los autores caracterizan los actuales contenidos de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría por la posesión de una visión práctica del aprendizaje, pasando de suponer datos en la pizarra a resolver problemas reales que fomenten la creatividad, el ingenio y la iniciativa. El papel del profesor en esta metodología es el de seleccionar situaciones o problemas con el fin de despertar el interés y fomentar la actividad creadora del alumno a fin de que construya su propio conocimiento. En resumen, la base de dicha metodología está compuesta por tareas inmersas en un contexto, problemas de la vida real en la que las situaciones o problemas no son perfectamente acabados o modélicos.

En el trabajo, los autores describen tres etapas, en las cuales se priorizarán los procedimientos partiendo de situaciones reales del entorno:

- Una primera etapa motivadora de experimentación.
- Una segunda etapa de resolución de problemas en la que el alumno busca estrategias

para resolver el problema (esquemas gráficos, materiales, recursos) y compara la solución obtenida razonando el sentido de la misma. Esta etapa está caracterizada por ser de comprensión, reflexión e interiorización.

- Una tercera etapa de aplicación, para profundizar y comprobar los conocimientos aprendidos, realizando otros ejercicios y problemas del entorno real como refuerzo, pudiendo surgir nuevos conceptos.

Como ejemplo, podemos mencionar los trabajos de Reeuwijk (1997) en los que presenta cuatro ejemplos de contextos (excursión, alas delta, sombras, bomberos) diferentes entre sí pero relacionados con los conceptos geométricos de proporción, la inclinación y la pendiente. Mediante los distintos contextos y después de unas fases de exploración y desarrollo del proceso de aprendizaje, los alumnos aprenden esos conceptos geométricos de forma intuitiva.

Por último, los autores recalcan que aunque el contexto deba ser realista y de la vida cotidiana, debe tener sentido para el alumno: "Por ello incluso un contexto artificial relacionado con algo que no procede de la vida real, como puede ser un relato de ficción, puede ser bueno si tiene sentido para el alumno." (Barrantes et al., 2014, p. 5).

#### **4.5 Sobre la teoría de la Educación Matemática Realista.**

Desarrollada en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática de la Universidad de Utrecht (Holanda), más conocido hoy como Instituto Freudenthal, esta teoría consistió en un principio, más que en una teoría clara y sencilla de educación matemática, más bien en ideas básicas centradas en el cómo y en el qué de la enseñanza matemática (Alsina, 2009).

En una fase inicial, la Educación Matemática Realista (De Lange, 1996, citado en Alsina, 2009), se fundamentó en las siguientes características:

- Utilización de contextos como medios para el movimiento o desarrollo entre lo concreto y lo abstracto.
- Utilización de modelos como vertebración del progreso.
- Utilización de las construcciones y producciones libres de los propios aprendices en el

proceso de enseñanza/aprendizaje.

- La interconexión de las diversas líneas principales en el currículum de matemáticas.

La Educación Matemática Realista pretende ser más bien una teoría global (o "filosofía" según Freudenthal) cuya concretización resulta en un conjunto de teorías locales de enseñanza matemática fundamentada en las siguientes ideas (Bressan et al., 2004):

- La idea de matematización, o la actividad humana de pensar la matemática.
- El proceso didáctico de la reinención guiada, mediante el cual se desarrolla la comprensión matemática a través de diferentes niveles y con un gran protagonismo del contexto y los modelos.
- La idea de fenomenología didáctica como búsqueda de situaciones contextualizadas para que se produzca la mencionada reinención guiada a través de la organización matemática de dichas situaciones.

En la actualidad, la Educación Matemática Realista está cimentada en seis principios fundamentales, que listamos y nombramos a continuación de manera resumida (para una mayor profundización, consultar Freudenthal, 1991, y Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014):

- Principio de actividad.

Las matemáticas están consideradas como una actividad humana. El fin de las matemáticas es en definitiva matematizar (organizar) nuestra propia realidad. Esto incluye por supuesto a la propia matemática. La matematización no es sólo una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, sino también una actividad de organización. Matematizar conlleva en última instancia generalizar y formalizar. La primera lleva ligado consigo la reflexión, mientras que la segunda implica modelizar, esquematizar, simbolizar y definir.

- Principio de realidad.

Las matemáticas han de aprenderse realizando matemáticas en contextos reales. Este último no tiene por qué referirse sólo a situaciones problemáticas de la vida cotidiana, también puede implicar situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos. El contexto de los problemas a los que se enfrentan los alumnos puede ser el mundo real, sin embargo no tiene por qué ser estrictamente así. De manera progresiva deben ir desprendiéndose de la vida cotidiana hasta adquirir un carácter más general, y con ello, poder transformarse en modelos

matemáticos.

- Principio de niveles.

Diferenciamos distintos niveles de comprensión por los que pasan los alumnos:

- Nivel Situacional: en el contexto de la situación.
- Nivel Referencial: esquematización mediante descripciones, modelos, etc.
- Nivel General: exploración, reflexión y generalización.
- Nivel Formal: Procedimientos estándares y notación convencional.

La manera de trabajar el desarrollo a través de estos niveles debe ser la esquematización progresiva (por parte del profesor) y la reinención guiada (por parte del alumno): matematizamos situaciones de la vida real para formar relaciones formales y estructuras más abstractas.

- Principio de reinención guiada.

Es el proceso de aprendizaje mediante el cual reconstruimos el conocimiento matemático formal. Una posible forma de trabajar este principio puede ser la presentación de escenarios-problema abiertos cuya solución sea posible de alcanzar mediante diversas estrategias de resolución. Además, permitiendo que los alumnos compartan dichas estrategias o caminos, y que discutan el grado de eficacia de las mismas.

- Principio de interacción.

La enseñanza de las matemáticas tiene un marcado carácter social. La interacción entre los alumnos y entre los alumnos y profesores promueve la reflexión de cada uno a partir de las relaciones con los demás, y de esta manera llegar a niveles mayores de comprensión. La discusión, la cooperación, la negociación explícita, la intervención y la evaluación son elementos clave en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del alumno sirven de trampolín o ayuda para alcanzar los formales. En este proceso de interacciones, se anima a los alumnos a convenir y discrepar, explicar, justificar, cuestionar alternativas y reflexionar.

- Principio de interconexión.

Los bloques de contenido matemático (álgebra, geometría, numeración y cálculo, estadística y probabilidad...) no deben ser concebidos como estructuras aisladas. Los escenarios-problema han de interrelacionar contenidos entre bloques.

De manera conclusiva, según Alsina (2009) podemos resumir los rasgos más significativos de la Educación Matemática Realista:

- Es un enfoque en el que se hace uso de escenarios del mundo real o la cotidianidad, o problemas contextualizados como punto de partida para el aprendizaje de las matemáticas.
- Está basado en la interacción entre los alumnos y entre el profesor y los mismos.
- Por último la idea según la cual los alumnos tengan la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto frente a la mera instrucción de una matemática pre-construida.

#### **4.6 Sobre la Modelización Matemática.**

Siguiendo el hilo conductor de relacionar realidad y Matemáticas, se nos hace pertinentes traer a colación los procesos de Modelización Matemática, descrito como el "proceso de describir en términos matemáticos un fenómeno real, obteniendo resultados matemáticos y la evaluación e interpretación matemáticas de una situación real" (Gómez-Chacón y Maestre, 2008, p. 110). Según los autores, dicho proceso puede constar de los siguientes pasos:

- Situación del Mundo Real. En nuestro caso, se presentará el problema o enunciado relacionado con la ciudad.
- Generación de un Modelo Matemático. Se creará una representación Matemática de la realidad.
- Conclusiones Matemáticas. Se producirán unos resultados matemáticos.
- Conclusiones/Predicciones. Dichos resultados deberán ser interpretados en el contexto, cuestionados y analizados.

A través de dichos pasos se sucederán procesos de interpretación (de la situación real al modelo matemático, o de los resultados matemáticos a las conclusiones-predicciones), análisis (del modelo a los resultados matemáticos) y de traslación (de las conclusiones-predicciones contextualizadas en la situación real inicial).

## 5. PROCEDIMIENTO DE LA PROPUESTA DE INNOVACIÓN

### 5.1 CONTEXTO

El tipo de centro educativo hipotético en el que enmarcar nuestra propuesta de intervención no debe ser muy específico o particular. Se ha buscado que el modelo de propuesta sea capaz de adaptarse a múltiples contextos y que pueda ser utilizado por un número amplio de docentes o centros. No buscamos realizar una propuesta para un determinado tipo de centro, más bien crear algo adaptable a cualquier centro educativo de secundaria. En general, la gran mayoría de centros de educación secundaria están insertos y ligados en una trama urbana (su localización en los respectivos planes de urbanismo de una determinada ciudad o pueblo no es casual) de la cual nutre sus clases de alumnos. El hecho de que muchos alumnos acudan de otros barrios más lejanos de la ciudad o incluso de otros municipios no es determinante. Lo importante es que el contexto urbano del centro es de gran importancia para el desarrollo de esta propuesta, así como es relevante y adecuado que el docente que plantee las actividades sea conocedor o al menos dedique cierto tiempo a conocer el núcleo urbano, pueblo o ciudad, donde residen los alumnos (no son sólo estos los que pueden aprender datos interesantes de su entorno).

Para el correcto desarrollo de las actividades, sería muy adecuado contar con determinados recursos tecnológicos. Según la disponibilidad de estos, hemos definido 2 escenarios:

- Escenario 1. Aula informática. Donde los alumnos tengan acceso a un ordenador individualmente, o por grupos.
- Escenario 2. Pizarra digital, o en su defecto, pizarra magnética para rotuladores combinado con proyector (incluyendo un ordenador desde el que proyectar).

Los escenarios indican el nivel de acceso e interacción por parte del alumno de un programa informático (ya sea un programa de geometría dinámica como Geogebra o el acceso a la aplicación Google Maps). En el Escenario 1, el ideal, los alumnos pueden manejar directamente el programa. En el Escenario 2, es el docente el que maneja los programas y actúa de conductor y relator de la actividad, debiendo procurar ser guía pero dejando tomar decisiones al grupo clase a la hora de interactuar con los programas. Recordemos que la línea



principal de la propuesta es el diseño de actividades relacionadas con el contexto urbano, no la utilización de herramientas tecnológicas en sí. Estas últimas son un medio, no un fin.

En cuanto a marco legislativo, la propuesta no discrimina entre comunidades autónomas. Sin embargo, en aras de realizar una propuesta cercana a la realidad, vamos a concretar dicha propuesta dentro de un centro sito en la comunidad de Castilla-La Mancha. De nuevo, recordamos que el espíritu de la propuesta es que pueda ser aplicable a nivel general.

## **5.2 DESTINATARIOS E IMPLICADOS**

Los destinatarios principales de la propuesta son los alumnos de cualquier curso de Educación Secundaria, así como los docentes que lo impartan. A lo largo del presente trabajo particularizaremos las actividades y se concretará el curso al que están dirigidas (ver punto 5.4.4. Actividades). El punto más relevante a tener en cuenta es la pertenencia de una mayoría de dicho alumnado a un mismo núcleo poblacional, donde han crecido en un pasado reciente o residen en la actualidad.

Por otro lado, dado que la propuesta pretende relacionar las Matemáticas con el entorno urbano y arquitectónico, podría ser interesante utilizar la actividad como pretexto y punto de presentación para organizar alguna visita o salida acompañada (en una posible colaboración con el Departamento de Geografía e Historia o Educación Plástica, Visual y Audiovisual) con algún edificio, entorno o lugar arquitectónico de especial interés (por ejemplo un Museo cuyo edificio resulte ser de especial interés arquitectónico).

## **5.3 FINALIDAD**

De manera general y como vimos anteriormente, el principal objetivo a conseguir con el presente trabajo es el de mejorar el aprendizaje de la Geometría a través de la realización de actividades inspiradas en la teoría de la educación matemática realista, y apoyadas de manera complementaria por programas informáticos de geometría dinámica (en el presente trabajo nos referiremos al programa Geogebra, elegido mayormente por la variedad y accesibilidad de recursos online que ofrece) y por la aplicación de mapas Google Maps (elegida por su

facilidad de uso y acceso, y por ser una aplicación muy extendida que tanto alumnos como profesores conocen).

La propuesta a desarrollar tiene como finalidad describir un modelo tipo o base desde el que podremos diseñar las susodichas actividades. Este modelo recoge las conclusiones y los principios nombrados en el marco teórico. Posteriormente, se presentará un ejemplo de actividad o particularización del modelo, basada en experiencias reales del autor, con el fin de mostrar y ejemplificar una puesta en práctica del modelo.

El modelo aspira a poder trabajar todo el bloque de Geometría atendiendo al currículum de Matemáticas, sin embargo, a continuación detallamos los objetivos didácticos que en nuestra opinión son más susceptibles de trabajar con las actividades para la ESO.

Refiriéndonos al bloque de Geometría:

- OG1. Reconocer y describir figuras planas (polígonos regulares, triángulos, cuadriláteros y paralelogramos, círculos y circunferencias) así como sus elementos y características propias, incluyendo centros y ejes de simetrías.
- OG2. Reconocer y describir cuerpos geométricos (poliedros regulares, prismas, pirámides, cuerpos de revolución) así como sus elementos y características propias, incluyendo centros, ejes y planos de simetrías.
- OG3. Resolver problemas contextualizados que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.
- OG4. Utilizar los teoremas de Tales y de Pitágoras para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos contextualizados.
- OG5. Calcular mediante ampliación o reducción, las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.
- OG6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

Refiriéndonos al bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes matemáticas:

- OP1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.

- OP2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
- OP3. Encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos geométricos.
- OP4. Elaborar y presentar material propio suficiente sobre el proceso, resultado y conclusión obtenidos en la resolución del problema.
- OP5. Desarrollar procesos de modelización matemática (geométricos a priori) a partir de problemas contextualizados.
- OP6. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas de forma autónoma realizando cálculos numéricos y recreando entornos y objetos geométricos para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.
- OP7. Utilizar tecnologías de la información y comunicación, recogiendo información relevante para la resolución de problemas.

Adicionalmente, podemos añadir otro objetivo relevante para el proceso de aprendizaje:

- OM1. Despertar y mantener la motivación por el aprendizaje en el alumnado.

En segundo lugar, describimos las competencias clave a las que las actividades aspiran a contribuir:

- CM. Competencia Matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

La competencia Matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto. A través de la propuesta se trata de reconocer el papel que desempeñan las Matemáticas en el mundo, promoviendo la capacitación del alumno para establecer una relación profunda entre conocimiento conceptual y conocimiento procedimental. Las áreas tratadas principalmente en las actividades serán las de Cantidad (cuantificación e interpretación) y las de Espacio y forma (comprensión de la perspectiva, elaboración y lectura de mapas, transformación de formas con y sin tecnología, interpretación de vistas tridimensionales y construcción de representaciones de formas).

- CD. Competencia Digital.

A través de la propuesta se incentiva el uso de aplicaciones informáticas de acceso a la información, en nuestro caso, la aplicación de mapas de Google Maps, la cual es una potentísima fuente de información sobre el medio físico en el que vivimos, y el software de

geometría dinámica Geogebra.

- AA. Competencia Aprender a aprender.

Con nuestra propuesta, se pretende generar la curiosidad a través de actividades basadas en el entorno inmediatamente relacionado con el alumno, con el fin de suscitar en este la necesidad de aprender.

- CC. Conciencia y expresiones culturales.

Esta competencia es susceptible de ser trabajada al desarrollar las actividades en el contexto de la ciudad, entendiendo ésta no sólo como medio físico donde reside una determinada población, sino como expresión y manifestación cultural de una sociedad compleja y cambiante, de la que son partícipes los alumnos, con una historia y unas huellas heredadas así como unas dinámicas y fenómenos presentes.

- CL. Competencia en comunicación Lingüística.

Esta competencia puede ser abordada atendiendo a varios de sus componentes (Orden ECD/65/2015): el lingüístico y el pragmático-discursivo en sus dimensiones sociolingüística y pragmática en las situaciones de comunicación oral y en las producciones escritas de los alumnos; el socio-cultural al tratar con situaciones contextualizadas; y el estratégico en las situaciones de trabajo en grupo.

## **5.4 PLANIFICACIÓN DE LA PROPUESTA**

A continuación, procederemos a describir la metodología utilizada y la estructura del mencionado modelo tipo o modelo base de la propuesta, a partir de la cual se podrán generar actividades en función del contexto en el que nos encontremos y de los objetivos didácticos a conseguir. Posteriormente, se describirá una posible puesta en práctica del modelo en un contexto concreto.

### **5.4.1 METODOLOGÍA**

La metodología a utilizar para la puesta en práctica del modelo será una metodología activa, en el que se haga partícipe al alumno de su proceso de aprendizaje, construyendo sus propios esquemas de conocimiento matemático y realizando conexiones entre estos y la realidad, incluyendo contextos cercanos y significativos al propio alumno.

Uno de los pilares del modelo es la anteriormente comentada teoría de la Educación Matemática Realista. Por ello, las actividades que surjan de dicho modelo siguen los principios dicha teoría, ya enumerados previamente, de la siguiente forma:

- Principio de actividad.

Mediante la resolución de problemas basados en contextos reales los alumnos organizan (matematizan) la realidad que les rodea, conllevando procesos de generalización y formalización, por tanto de reflexión para la primera y de modelización, esquematización, simbolización y definición para la segunda.

- Principio de realidad.

Mediante el uso de contextos reales en la resolución de problemas se atiende a este principio.

- Principio de niveles.

A través de la resolución de problemas basados en contextos reales se va a graduar la esquematización requerida para hacer progresar a los alumnos a través de los distintos niveles de comprensión (situacional, referencial, general y formal).

- Principio de reinención guiada.

Los alumnos se van a enfrentar a situaciones problemáticas abiertas que pueden resolverse mediante una variedad de estrategias, permitiendo la continua reconstrucción del conocimiento matemático formal.

- Principio de interacción.

Los alumnos tendrán que debatir, preguntar y cuestionar los métodos, estrategias, conclusiones y resultados que van apareciendo en el proceso, permitiendo la reflexión propia.

- Principio de interconexión.

Se propondrán puentes y relaciones entre el bloque de Geometría con el resto de bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, probabilidad y estadística...).

Consecuentemente, el modelo atiende a las tres ideas bases de la Educación Matemática Realista expuestas anteriormente (Bressan et al., 2004):

- Basado en actividades fundamentadas en la matematización (pensar la matemática como una actividad humana).
- Utilizar los contextos y modelos para hacer desarrollar la comprensión matemática en los alumnos a través de la reinención guiada (creación de ambiente de heterogeneidad cognitiva).

- Se hace necesaria la labor de búsqueda e investigación de situaciones y contextos que faciliten esos procesos de reinención guiada (la ciudad como espacio muestral).

A la hora de llevar estas actividades a la clase, atendemos a determinados principios de la metodología de resolución de problemas. Siguiendo ésta, el profesor, actuando en todo momento como guía y facilitador, expone y presenta el problema, el cual debe despertar el interés y la motivación del alumnado (a través de su relación con el contexto). Las agrupaciones serán flexibles, y se realizarán de forma individual o grupal (en grupos de 3 a 5 alumnos, siguiendo los principios de un aprendizaje por grupos heterogéneos de selección controlada por el docente), según se diseñen las actividades atendiendo a la diversidad y las necesidades programáticas. Utilizando el problema como vehículo conductor, se estructura cada actividad en 3 etapas, tal y como vimos en el trabajo de Barrantes et al. (2014): una primera de experimentación (exposición), una segunda de búsqueda de estrategias de resolución, y una tercera de aplicación y ampliación a través de la interpretación del resultado en el contexto (que relacionamos más adelante con la estructura de Modelización Matemática).

Como ya comentamos, este modelo también posee otras fortalezas y ventajas desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje, que relacionaremos con algunas de las ideas más importantes que detectamos en el Marco Teórico. En primer lugar, atendiendo a los apartados de errores y obstáculos, así como de referentes en la enseñanza de la Geometría, aportamos un enfoque práctico frente al tradicional enfoque teórico, y trabajamos los conceptos de geometría en una variedad y riqueza de situaciones, permitiendo que se pongan constantemente a prueba y en revisión los conocimientos y estructuras cognitivas creadas en la mente de los alumnos. Por otro lado, indudablemente estamos aportando en el ámbito de la interdisciplinareidad, relacionando la Geometría no sólo con el mundo real, sino con el medio físico-social-cultural en el que el alumno ha crecido, promoviendo un aumento de la motivación de este por la materia y, por ende, con su propio proceso de aprendizaje. Continuando con este último punto, el de la motivación, podemos describir las actividades como potencialmente atractivas para el alumnado debido al peso en estas del medio visual, que, como vimos anteriormente, es una de las recomendaciones de Barrantes y Balletbo (2012b) para la enseñanza de la Geometría.

En cuando a la estructura de las actividades, estas se han basado en el esquema del proceso de Modelización Matemática (Gómez-Chacón y Maestre, 2008), según el cual se produce la descripción en términos matemáticos de un fenómeno real, a través de cuatro pasos:

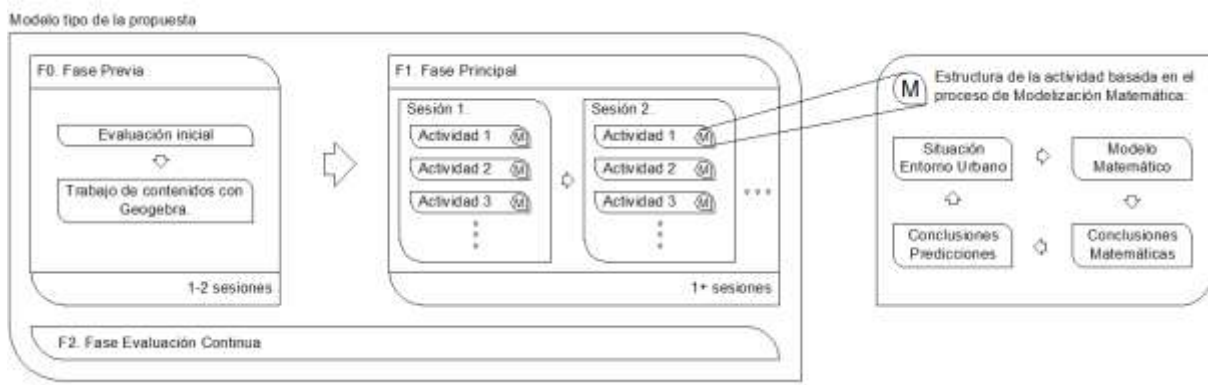
- Situación del Mundo Real. En nuestro caso, se presentará el problema o enunciado relacionado con la ciudad.
- Generación de un Modelo Matemático. Se creará una representación Matemática de la realidad.
- Conclusiones Matemáticas. Se producirán unos resultados matemáticos.
- Conclusiones/Predicciones. Dichos resultados deberán ser interpretados en el contexto, cuestionados y analizados.

Adicionalmente, en el ya comentado proceso de Modelización Matemática, es importante ser consciente de los procesos cognitivos (que anteriormente describimos) que participan: los distintos tipos de aprehensión (perceptiva, discursiva y operativa) destacando la discursiva en nuestro caso, pues nos permite asociar una situación a una afirmación o situación matemática, y viceversa, proceso indispensable en nuestras actividades para "traducir" las representaciones de la realidad a modelos matemáticos (por ejemplo, utilizar la aprehensión discursiva desde el anclaje visual al anclaje discursivo para llegar al concepto mental de "prisma ortogonal" desde la representación de un "edificio"); así como el cambio de anclaje, siendo este de gran importancia para coordinar los distintos modos de representación al solucionar problemas geométricos. Como señalamos anteriormente, gran cantidad de tareas vienen dadas en el modo figurativo y demandan traslaciones al modo numérico/simbólico y viceversa.

#### **5.4.2 FASES**

El modelo consta de una Fase 1 o Principal donde se desarrollan las actividades (estas podrán ser desde una a las que se requieran o necesiten realizar) y de una Fase 0 o Previa que tiene una función complementaria y auxiliar, aunque relevante en la propuesta.

**Figura 2.** Esquema conceptual del modelo tipo o base de propuesta.



Elaboración propia.

Dicha Fase 0 o Previa está dividida en 2 partes:

1. Evaluación Inicial.
2. Trabajo de contenidos con Geogebra.

La temporalización total podrá ser de 1 ó 2 sesiones. En la Evaluación Inicial se realizará mediante preguntas directas o debate profesor-alumnos con el objetivo de acotar y conocer los conocimientos previos que poseen los alumnos para poder realizar las actividades. A continuación, se procederá a realizar la Presentación de contenidos programados o necesarios para la actividad, la cual se realizará preferentemente con el apoyo de recursos online ya existentes en la web de Geogebra o con la ayuda adicional de materiales manipulables disponibles en el aula si el contenido lo requiere. Por último, se trabajarán con los alumnos estos contenidos a través de los recursos online de Geogebra. Si los recursos lo permiten, es recomendable realizar el trabajo con Geogebra en el aula informática, disponiendo los alumnos por grupos entre los ordenadores disponibles, para que interactúen ellos con el programa. En caso de no disponer de dicha aula, es el profesor el encargado de actuar de conductor y hacer partícipes a los alumnos a la hora de interactuar con el programa. Se hace necesario añadir la recomendación de utilizar materiales manipulativos si se disponen de ellos, de manera adicional a lo ya mencionado, pues pueden suponer un buen complemento para integrar ciertos conocimientos de los objetos geométricos.

La realización de esta primera parte nos ofrece una serie de ventajas y fortalezas. Antes de introducirnos de lleno con las actividades, la fase previa de trabajo con Geogebra



puede sernos útil a la hora de superar algunos obstáculos que anteriormente hemos comentado en el Marco Teórico, tales como los distractores de orientación y de estructuración, y el fenómeno definido por Mesquita (1992) como "doble estatus de los objetos geométricos". Es decir, antes de lanzarnos a desarrollar actividades de problemas contextualizados sobre Geometría, es conveniente introducir o reforzar conocimientos previos mediante una herramienta distinta a las tradicionales representaciones de objetos geométricos y listados de fórmulas presentes en los libros de texto.

Una vez completada dicha fase, podremos realizar la Fase 1 o Principal. Ésta estará dividida en el número de sesiones que estimemos pertinente (idealmente podrán ser de 1 a 3 ó 4 sesiones), pero se recomienda que en cada sesión exista una coherencia o una "temática". Cada sesión se diseñará con un esquema similar: primero se realizará una breve presentación y exposición oral del desarrollo de la sesión o clase, luego se propondrán y realizarán una serie de actividades o problemas (que se desarrollarán preferiblemente por grupos pequeños, 2 a 3 alumnos) en las que el profesor actúa como guía y conductor, constantemente describiendo pero preguntando y dialogando con los alumnos. El número de actividades dependerá de la complejidad de estas, pero en general podremos estimar entre 3 a 6 actividades. Por último, el profesor realizará un cuestionario mediante preguntas directas o debate con los alumnos para recabar información de la sesión. De manera optativa, se podrá programar una pequeña actividad para hacer en casa sobre el material tratado en clase.

En esta Fase Principal, las actividades estarán todas basadas en un mismo contexto, la ciudad, que será la propia ciudad o pueblo donde residan los alumnos o donde se sitúe el centro. De manera general, tendremos dos formas de presentar y conducir las actividades a través de este contexto:

- A través del recurso Mapa Impreso: se generará un mapa en papel (mapa o foto aérea) a escala de la ciudad y se repartirá una copia a cada alumno.
- A través de la aplicación Google Maps. En este último caso, tendremos dos maneras de conducir la clase, según el tipo de escenario definido anteriormente:
  - Escenario 1: Aula informática. Por grupos (2-4 alumnos) manejarán la aplicación Google Maps para realizar las actividades (siguiendo las instrucciones del profesor).

- Escenario 2: Pizarra + proyector. Será el profesor el encargado de actuar de conductor y hacer partícipes a los alumnos a la hora de interactuar con la aplicación Google Maps.

La estructura de las actividades se ha basado en el esquema del proceso de Modelización Matemática (Gómez-Chacón y Maestre, 2008), según el cual se produce la descripción en términos matemáticos de un fenómeno real, a través de cuatro pasos:

- Situación del Mundo Real. En nuestro caso, se presentará el problema o enunciado relacionado con la ciudad.
- Generación de un Modelo Matemático. Se creará una representación Matemática de la realidad.
- Conclusiones Matemáticas. Se producirán unos resultados matemáticos.
- Conclusiones/Predicciones. Dichos resultados deberán ser interpretados en el contexto, cuestionados y analizados.

Por último, definiremos como Fase 2 o Fase de Evaluación Continua, aquella fase que está presente a lo largo de todo el desarrollo de las dos fases anteriores, superponiéndose a estas. Esta fase será desarrollada más adelante.

### 5.4.3 RECURSOS

Los recursos necesarios para llevar a cabo la propuesta serán los siguientes (algunos no serán estrictamente necesarios, pues la propuesta tiene cierto margen de adaptabilidad):

- Recursos por parte del centro (introducidos anteriormente):
  - Escenario 1. Aula informática. Donde los alumnos tengan acceso a un ordenador individualmente, o por grupos. Recurso no estricto.
  - Escenario 2. Pizarra digital (no estricto), o en su defecto, pizarra magnética para rotuladores combinado con proyector (incluyendo un ordenador desde el que proyectar).

En ambos escenarios se utilizarán los recursos Geogebra y Google Maps.

Adicionalmente, fotocopiadora o equipo similar.

Opcionalmente, materiales manipulativos para la enseñanza de la Geometría (objetos

geométricos de material transparente o translúcido como plástico).

- Recursos por parte de los alumnos: cuaderno, material de clase y de medida (reglas), calculadora.

#### **5.4.4 ACTIVIDADES**

A continuación, se presenta una propuesta de actividades a partir del modelo base anteriormente descrito. La propuesta será desarrollada en un número determinado de sesiones y se plantea como parte hipotética de una o más Unidades Didácticas pertenecientes al bloque de Geometría. En este caso, las actividades se plantean una vez tratados los temas de Figuras planas, Lugares geométricos (Áreas y Perímetros) y Cuerpos Geométricos, y servirán como repaso y refuerzo de estos contenidos.

##### **5.4.4.1 Definición de curso y contexto autonómico**

El curso al que están dirigidas la propuesta de actividades es un 3º de la ESO de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas. El centro educativo se sitúa en la ciudad de Albacete, la cual constituirá nuestro contexto urbano para diseñar la propuesta. Nos situamos pues en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha, por lo cual podemos acotar el marco legislativo como sigue:

- Ley orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE)
- Ley 7/2010, de 20 de Julio, de Educación de Castilla-La Mancha.

Decretos de Currículo. Normativa vigente de ESO:

- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha.
- Orden de 15/04/2016, de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes, por la que se regula la evaluación del alumnado en la Educación Secundaria Obligatoria en la

Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha.

(Extraído y adaptado del Portal Web de Educación de la Consejería de Educación, Cultura y Deporte de Castilla-La Mancha).

#### **5.4.4.2 Temporalización**

La duración de la propuesta será de cuatro sesiones (50 minutos por sesión).

#### **5.4.4.3 Objetivos**

Los objetivos didácticos a conseguir con la propuesta serán (seleccionados de los objetivos descritos anteriormente):

- OG2. Reconocer y describir cuerpos geométricos (poliedros regulares, prismas, pirámides, cuerpos de revolución) así como sus elementos y características propias.
- OG3. Resolver problemas contextualizados que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.
- OG4. Utilizar los teoremas de Tales y de Pitágoras para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos contextualizados.
- OG5. Calcular mediante ampliación o reducción, las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.
- OP1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.
- OP2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
- OP4. Elaborar y presentar material propio suficiente sobre el proceso, resultado y conclusión obtenidos en la resolución del problema.
- OP5. Desarrollar procesos de modelización matemática (geométricos a priori) a partir de problemas contextualizados.
- OP6. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas de forma autónoma realizando cálculos numéricos y recreando entornos y objetos geométricos para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.
- OM1. Despertar y mantener la motivación por el aprendizaje en el alumnado.

Como propuesta encuadrada en el curso de 3º de ESO, podemos detallar algunos de los objetivos generales de la etapa (Real Decreto 1105/2014, p. 177), que trabajaremos con el desarrollo de nuestras actividades:

- Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

#### **5.4.4.4 Contenidos y Competencias Clave**

Mediante la propuesta de actividades se trabajará la adquisición de las competencias clave anteriormente descritas:

- CM. Competencia Matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- CD. Competencia Digital.
- AA. Competencia Aprender a aprender.
- CC. Conciencia y expresiones culturales.
- CL. Competencia en Comunicación Lingüística.

A su vez, detallamos, a continuación, los contenidos trabajados en la propuesta:

Pertenecientes al bloque de Geometría:

- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la

resolución de problemas.

- Áreas de figuras planas.
- Escalas.
- Volúmenes y áreas de cuerpos geométricos.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Pertenecientes al bloque de Procesos, métodos y actitudes matemáticas:

- Planificación del proceso de resolución de problemas.
- Estrategias y procedimientos puestos en práctica (uso del lenguaje apropiado, reformulación del problema, resolución de subproblemas, recuento exhaustivo, análisis inicial de casos particulares sencillos, búsqueda de regularidades y leyes).
- Reflexión sobre los resultados (revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto adecuado, búsqueda de otras formas de resolución, planteamiento de otras preguntas).
- Práctica de procesos de modelización matemática, en contextos de la realidad cotidiana y contextos matemáticos.
- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:
  - Facilitar la comprensión de propiedades geométricas y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.

#### **5.4.4.5 Descripción de las actividades**

A continuación, realizaremos una descripción del desarrollo programado para las sesiones. Tal y como comentamos, la propuesta se diseña a partir del modelo tipo o base. En este caso, realizaremos una Fase 0 o Previa de 2 sesiones de duración, que actuará como repaso y refuerzo de contenido y habilidades, y nos permitirá detectar debilidades o lagunas que debamos reforzar. Posteriormente, se realizará la Fase 1 o Principal en dos sesiones. En la primera sesión se trabajará con el recurso Mapa Impreso y se centrará en Geometría Plana, razones de semejanza, mapas y escalas, cálculo de áreas y perímetros, etc; mientras que en la segunda se trabajará con el recurso Google Maps y se centrará en Geometría en el Espacio,

cálculo de alturas a partir de Teorema de Tales, cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, etc. Adicionalmente, la Fase 2 o de Evaluación Continua se desarrollará a la vez que las otras dos Fases.

**Tabla 1.** Cuadro resumen de Fases y sesiones programadas.

FASE 0		FASE 1	
Sesión 1	Sesión 2	Sesión 1	Sesión 2
Actividades con el recurso Geogebra.		Actividades con el recurso Mapa Impreso.	Actividades con el recurso Google Maps.
FASE 2. Evaluación			

### DESARROLLO DE LAS FASES


FASE 0	
Temporalización	2 sesiones
Recursos	Se hará uso del aula de informática, situándose los alumnos en grupos de 2-3 por ordenador.
<p>En ambas sesiones se dará inicio a la clase realizando una serie de preguntas directas o debate profesor-alumnos con el objetivo de acotar, conocer y comprobar los conocimientos previos que poseen los alumnos para poder realizar las actividades.</p> <p>Los contenidos sobre los que necesitamos información son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorema de Tales. Aplicación a la resolución de problemas. En concreto, cálculo de alturas inaccesibles.</li> <li>• Semejanza. Razón de semejanza. Escalas.</li> <li>• Perímetro y Áreas de figuras planas.</li> <li>• Geometría del espacio.</li> <li>• Volúmenes y áreas de cuerpos geométricos.</li> </ul> <p>A continuación, se realizarán por grupos con la guía del profesor las siguientes actividades en el programa Geogebra, utilizando los recursos didácticos que disponemos en su página web (consultar punto <b>8.2 Relación actividades Geogebra</b> en el Anexo).</p> <p>En la primera sesión:</p>	

- "Figuras semejantes". Autor: Alberto Ugarte.
- "Altura de un edificio". Autores: Alberto Ugarte y Mari Carmen.
- "Problemas de perímetros". Autor: Javier Cayetano Rodríguez.
- "Áreas y perímetros". Autor: Juli Jurado i Llamas.

En la segunda sesión:

- "Área y volumen de un paralelepípedo". Autor: Lenin Paulino.
- "Volumen y superficie del cilindro y el cono". Autor: Javier Cayetano Rodríguez.
- "Volumen y superficie de la esfera". Autor: Javier Cayetano Rodríguez.
- "Pirámides". Autor: Lenin Paulino.

Durante la resolución de cada actividad el profesor interactuará constantemente con los alumnos para ir comprobando los ritmos y dudas de cada grupo.

Instrumentos de evaluación:	 Registro en Cuaderno de Clase. (Método: Observación sistemática en clase)
-----------------------------	--

<b>FASE 1</b>	
Temporalización	2 sesiones
<b>Sesión 1:</b>	
Recursos	Se realizará en el aula ordinaria utilizando el recurso Mapa Impreso. Necesitaremos una copia del Mapa 1 (mapa de Albacete) y del Mapa 2 (ciudad de Albacete en el año 1915). Los alumnos necesitarán al menos una regla para medir sobre el plano.
Agrupamiento	Esta sesión se realizará individualmente.



A continuación, se muestra una representación de los dos recursos tipo Mapa Impreso:

**Figura 3.** *Mapa 1 (ciudad de Albacete).*



Elaboración propia a partir de ortofoto de Google Maps. (Formato real: DIN A4).

**Figura 4.** *Mapa 2 (ciudad de Albacete en el año 1915).*

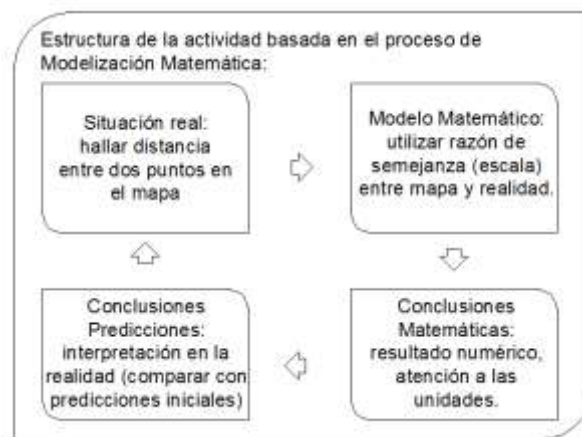


Elaboración propia a partir de plano disponible en la página web del Ayuntamiento de Albacete. (Formato real: DIN A4).

Al inicio de la clase, el docente repartirá únicamente el Mapa 1 de Albacete. Se les preguntará a los alumnos si reconocen el plano, la escala del mismo, los lugares señalados, el instituto donde están en ese momento, otros lugares que conozcan, si son capaces de situar su residencia, etc. (se aprovechará la ocasión para que comprueben su conocimiento espacial de la ciudad donde viven).

1. En la primera actividad, inicialmente, se les pedirá que estimen qué distancia creen que existe entre el instituto (01) y la estación de trenes (04, al otro lado de la ciudad), y se apuntarán en la pizarra algunos resultados representativos. Seguidamente, los alumnos deberán usar los conocimientos de las propiedades de las figuras semejantes (en este caso mapas y escalas) para determinar la distancia entre los puntos señalados y el instituto. Al finalizar, se compararán los resultados obtenidos con las estimaciones previas anteriormente anotados. Un esquema de la estructura del proceso podría ser el siguiente:

**Figura 5.** Esquema de la estructura de proceso en actividad 1. Medida de distancias.



Elaboración propia.

Tras realizar las tareas matemáticas, podría ser un buen momento para añadir información relevante sobre algunos edificios o lugares singulares marcados en la ciudad (el museo, la catedral, el parque urbano, etc).

2. En la siguiente actividad, esta vez se les pedirá a los alumnos determinar el área total del parque urbano de la ciudad, el Parque Abelardo. De nuevo, se les pedirá que antes de iniciar la

actividad realicen una estimación y se anotará en la pizarra. Al finalizar, se compararán los resultados obtenidos con las estimaciones previas anteriormente anotadas.

**Figura 6.** *Plano detalle del Parque Abelardo.*



Elaboración propia a partir de Google Maps.

**Figura 7.** *Posibles modelos geométricos para el Parque Abelardo.*

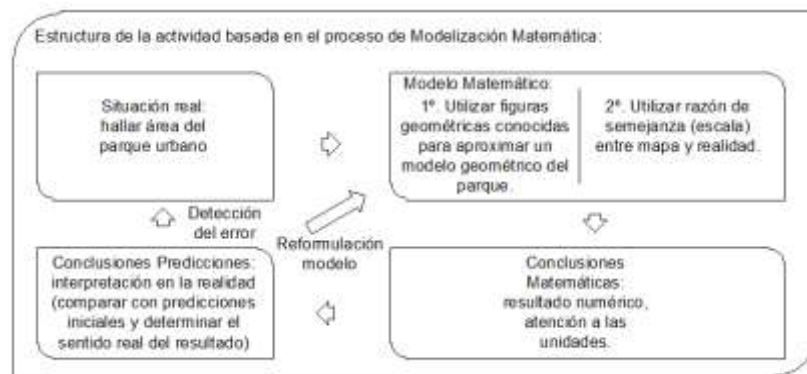


Elaboración propia a partir de Google Maps.

Para poder resolver el problema, los alumnos necesitarán crear un modelo geométrico para estimar el área del parque, utilizando figuras geométricas conocidas (triángulos, trapecios, sectores circulares, etc). Esta actividad es especialmente interesante pues es muy probable que los alumnos calculen el área primero de las figuras geométricas que han dibujado en el mapa, y luego realicen la operación usando la razón de semejanza para determinar el área real. Sin embargo, en este caso el resultado no tiene sentido en el contexto que estamos tratando (el

área en el dibujo podría medir unos 3-4 cm<sup>2</sup>, si aplicamos directamente la escala 1:15000 obtendríamos entre 4.5 y 6 m<sup>2</sup>). En este punto del proceso, si no han dudado por sí mismos, se les preguntará sobre medidas de superficies que conozcan para que comparen el resultado y comprueben su validez (por ejemplo, los metros cuadrados de su vivienda, o una habitación). Una vez confirmado el error, deberán detectar en qué punto del proceso lo han cometido, y qué partes del modelo matemático han de corregir (determinar las longitudes en el mundo real de las figuras geométricas y posteriormente calcular el área). Un esquema de la estructura del proceso podría ser el siguiente:

**Figura 8.** Esquema de la estructura del proceso en actividad 2. Medida superficie Parque Abelardo.



Elaboración propia.

Por último, se comprobará la precisión de resultados, y la validez de los modelos utilizados (para los modelos se podrían considerar como parámetros de validez tanto precisión como complejidad del modelo), habiendo realizado la medida previamente en una aplicación informática (Google Earth por ejemplo) o buscándolo en internet (en la página web Wikipedia se indica que el parque tiene una superficie de 120.000 m<sup>2</sup>).



3. Previo a la siguiente actividad, se les realizará a los alumnos la siguiente pregunta, y pediremos que argumenten sus respuestas:

*"Si quisiéramos ahora realizar otro mapa de la ciudad pero esta vez ampliado, es decir, donde podemos ver más grandes los edificios en el papel, ¿cuáles de estas dos escalas sería correcta, 1:8000 o 1:30000?"*



Posteriormente, repartiremos el recurso Mapa Impreso 2, o plano de Albacete en 1915, el cual tiene una escala distinta, 1:8000. Le explicaremos que es un plano antiguo de la ciudad, y les pediremos que lo observen y busquen similitudes y edificios o zonas actuales. A continuación, se les pedirá que vuelvan a calcular las distancias que ya hicimos anteriormente, para que comprueben que se corresponden. En una de ellas, la distancia no corresponde (la distancia entre el recinto ferial y la estación de trenes), por lo que se les pedirá que reflexionen y analicen el por qué. Al comprobar que el modelo matemático utilizado y los cálculos realizados son correctos, no pueden más que concluir que la estación de trenes no está a día de hoy en la misma ubicación que en 1915. Este podría ser un buen punto para hablar sobre cómo crecen las ciudades, explicarles que no son entes estáticos sino dinámicos, y que las formas urbanas del presente son producto de una ciudad pasada, y que siguen una lógica o tienen una causa (en este caso, los trazados de las antiguas vías ferroviarias definen hoy día el trazado de una de las avenidas principales en la zona norte de la ciudad).

4. Por último, se propondrá una actividad de investigación como deberes en la que deberán estimar en qué porcentaje ha crecido la ciudad en comparación con el año 1915. (Utilizando un esquema de proceso de modelización matemática parecido a la actividad 2).

Instrumentos de evaluación:	 Rúbrica de Actividad. (Método: Análisis de producciones escritas). Ver Anexo.  Registro en Cuaderno de Clase. (Método: Observación sistemática en clase).
<b>Sesión 2</b>	
Recursos	<p>En el caso en el que nos encontramos, suponemos un Escenario 1, donde podemos realizar la actividad en el aula de informática. El aula cuenta con una pizarra digital o pizarra de rotuladores con proyector desde ordenador, desde la cual el profesor guiará y conducirá la clase.</p> <p>En esta sesión, se utilizará la aplicación web Google Maps como recurso para explorar y visualizar el medio urbano durante la clase.</p>
Agrupamiento	<p>En esta sesión distribuiremos a los alumnos en grupos de 3-4 alumnos por ordenador. La agrupación para esta sesión se realizará siguiendo criterios de trabajo en grupo. Se prestará atención a la creación de los grupos</p>

huyendo de la homogeneidad en los mismos (en nivel de rendimiento).

Para esta sesión, en la que trabajaremos con el concepto de volumen y visión espacial, utilizaremos como primer hilo conductor un par de edificios representativos de la ciudad, cuya función está, no por casualidad, muy ligada al concepto de volumen: los depósitos de abastecimiento de agua de la ciudad.

Al inicio de la sesión, se realizará una introducción del tema de la clase, se les pedirá que ejecuten en sus ordenadores la aplicación de Google Maps y que se sitúen en Albacete, la ciudad en la que se encuentran (el profesor realizará las mismas acciones en la pizarra digital o proyector para indicar y mostrar dónde y cómo situarnos en la aplicación). A continuación, se les hará una breve explicación sobre el manejo de la aplicación: cómo movernos en la aplicación (zoom y desplazamiento), las capas (pasar a capa satélite, en la que podemos ver una ortofoto o foto cenital), apagar las etiquetas (no necesitan esa información y puede distraer), cambiar a vista 3D y rotar y orbitar en la misma, así como tomar medidas horizontales (en la aplicación, únicamente medidas de longitud). Daremos un breve margen de tiempo para que se habitúen y exploren el programa (si no les es conocido, hecho poco probable).

1. Como inicio de la primera actividad, les preguntaremos a los alumnos si conocen cuál es el edificio más alto de la ciudad de Albacete. Resulta ser la conocida Torre del Agua o torre de los depósitos de agua del parque urbano la Fiesta del Árbol:

**Figura 9.** *Vista aérea de la Torre del Agua, Albacete.*



Elaboración propia a partir de Google Maps.

**Figura 10.** Vista actual de la Torre del Agua. Albacete.

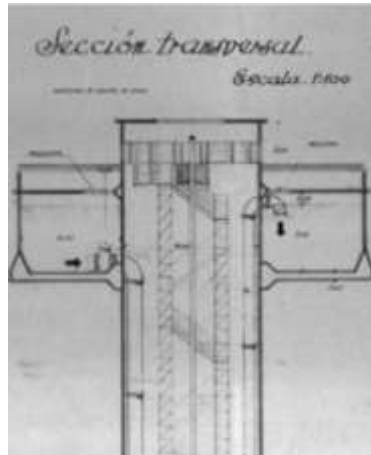


Fuente: Recuperado de [es.wikipedia.org](https://es.wikipedia.org).

Procederemos a explicarles información interesante sobre esta construcción tan singular, el año (1944) y el por qué de su construcción (el abastecimiento de agua de la ciudad de Albacete). Aunque nunca llegó a usarse como depósito de agua (la presión obtenida era demasiado alta para el sistema de canalización de la época), en la actualidad su uso es el de mirador a la ciudad. Tiene una altura de 69,38 m y es de hecho la construcción más alta de toda Castilla-La Mancha.

A continuación, pediremos a nuestros alumnos el siguiente problema: estimar el volumen de agua que era capaz de albergar el depósito (el anillo superior). Para ello, los alumnos necesitarán la medida de los radios (que podrán obtener al medir en planta en la aplicación), así como la altura del depósito, la cual podremos estimar previamente a partir de la aplicación Google Maps (para una mayor fluidez en la actividad), o estimar a partir de un plano de sección constructivo de la obra original, en el cual se aprecia que el depósito tiene forma de anillo o cilindro perforado (la columna central está hueca y la comunicación vertical se realiza a través de ella), dato que los alumnos deberán interpretar para conocer la forma del depósito y traducirla a un cuerpo geométrico:

**Figura 11.** *Sección transversal del depósito superior obra de Jose Luis Escario.*



*Elaboración propia a partir de Caulín (2014).*

**Figura 12.** *Ejemplificación de toma de medida horizontal.*

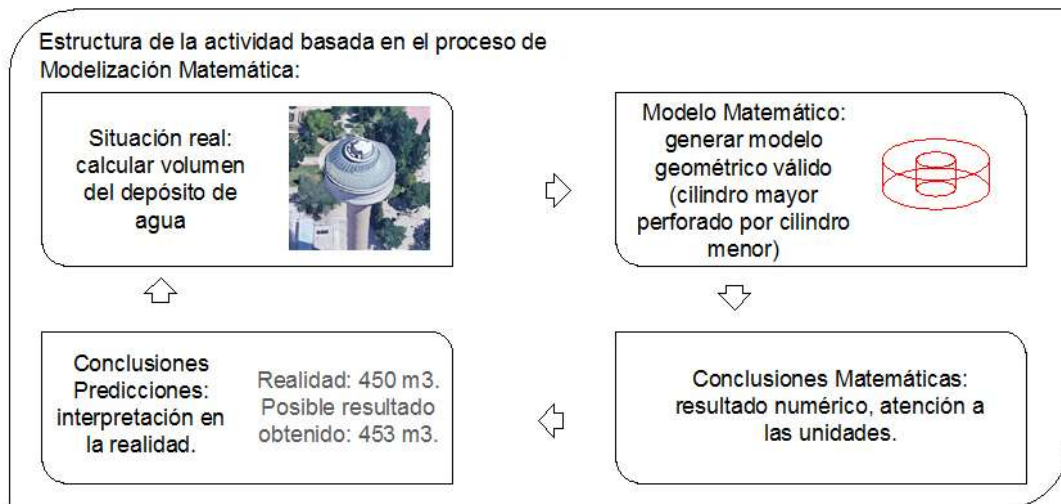


Elaboración propia a partir de Google Maps.

Disponiendo de estos 3 datos de partida (diámetro mayor = 16 m, diámetro menor = 7 m, y altura del depósito = 3 m), en los que los alumnos han participado en su obtención, deberán afrontar la resolución del problema en grupo. Un esquema de la estructura del proceso podría ser el siguiente:



**Figura 13.** Esquema de estructura de proceso en la actividad 1. Torre del Agua.



Elaboración propia.

Por último se comprobarán la precisión de resultados, y la validez de los modelos utilizados, pues podemos estimar la capacidad real que tenía el depósito según Caulín (2014), siendo la superficie de este de 150 m<sup>2</sup> y su altura 3 m. Para ello, un representante de uno de los grupos elegido al azar o voluntariamente resolverá y explicará el procedimiento que han llevado a cabo para llegar a la solución, y cómo la han interpretado. Se preguntará si algún grupo ha realizado el problema usando otro modelo distinto.

2. Para la siguiente actividad, volveremos a preguntarles a los alumnos, esta vez preguntaremos si conocen otro depósito de abastecimiento de agua en su ciudad. En este caso, nos referimos a otro depósito de agua reconvertido, edificio también conocido y singular en Albacete, que pasó de almacenar agua a contener libros: la Biblioteca del Sol. Nos dirigiremos allí (en el Google Maps) y procederemos a contarles (o animarles a que expongan ellos si lo saben) una breve introducción al edificio:

**Figura 14.** *Vista aérea de la Biblioteca Depósitos del Sol, Albacete.*



Elaboración propia a partir de Google Maps.

**Figura 15.** *Vista interior de la Biblioteca Depósitos del Sol.*

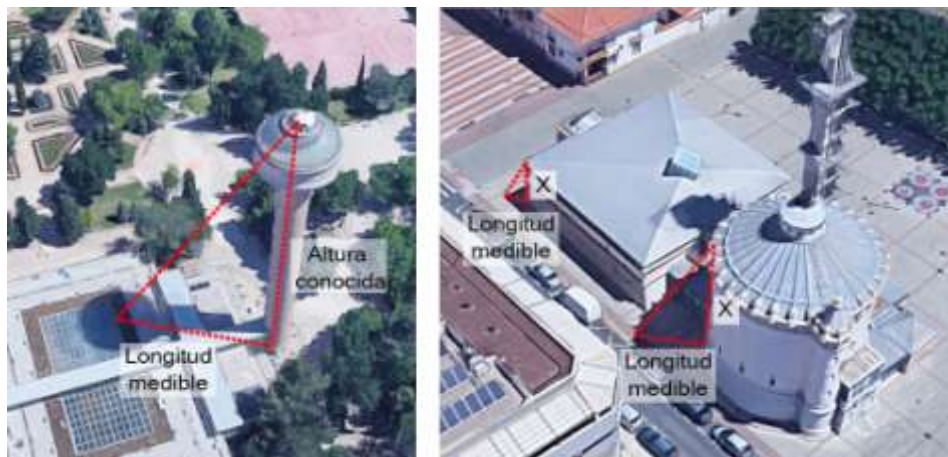


Fotografía de Francisco García Ríos. Recuperado de Flickr.com

De nuevo, plantearemos el mismo problema, estimar el volumen de agua en el depósito elevado (de planta cilíndrica) y en el depósito inferior (de planta rectangular). Para ello, los alumnos deberán tomar las medidas en planta necesarias en la aplicación como hemos realizado anteriormente. Sin embargo, esta vez no disponen de la altura. Por lo cual, como guías de la actividad les animaremos (y guiaremos sin desvelar directamente) a que encuentren un método para hacerlo. Probablemente, algún grupo conecte con la sesión anterior de Geogebra, y recuerde la actividad de cálculo de alturas a partir de sombras conocidas. Efectivamente, podremos calcular la altura de la biblioteca conociendo la

proyección de su sombra en planta y la proyección de la sombra de la torre anterior:

**Figura 16.** Ejemplificación de esquema realizado en pizarra con imagen proyectada de medición de altura mediante semejanza de triángulos.



Elaboración propia a partir de Google Maps.

En esta actividad los alumnos deberán compartimentar el problema en varios subproblemas (cálculo de alturas mediante semejanza de triángulos en dos ocasiones, y generación de modelo geométrico para cálculo de volúmenes en dos cuerpos geométricos, prisma de base cuadrada y cilindro). Adicionalmente, podríamos añadir problemas secundarios, tales como el cálculo de la superficie de chapa metálica usada en la cubierta del cilindro principal (tronco de cono). El esquema de la estructura del proceso sería similar a la actividad anterior, pero añadiendo el subproblema del cálculo de la altura para resolver el problema principal. Por último, se repetirá el proceso de elección de un representante de uno de los grupos para que explique ante la clase cómo han resuelto el problema.

3. Para la siguiente actividad, continuaremos con nuestro hilo conductor: el agua. Pero esta vez, los alumnos intentarán estimar la capacidad de una piscina semiolímpica de un complejo deportivo. Así, trabajaremos tanto la altura de una construcción como la profundidad:

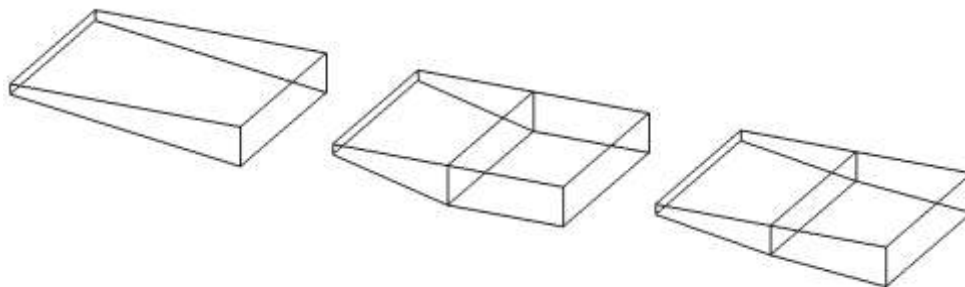
**Figura 17.** *Vista aérea de la piscina del Complejo Deportivo Carlos Belmonte.*



Elaboración propia a partir de Google Maps.

De nuevo, los alumnos podrán medir las distancias horizontales en la aplicación Google Maps, sin embargo no dispondrán de las medidas de la profundidad. En esta ocasión, se les pedirá que investiguen sobre cómo estimarlas (bien por el proceso anterior aplicando semejanza de triángulos, o bien tomando como profundidad la estipulada para una piscina de su tipo, dato localizable en una búsqueda en internet). Recalcaremos que lo importante es llevar a cabo un proceso de búsqueda de información lógico y realista, más que la exactitud de la medida encontrada. De nuevo, el esquema de la estructura del proceso sería similar a la actividad anterior, pudiendo llegar cada grupo a modelos geométricos distintos:

**Figura 18.** *Esquemas de posibles modelos geométricos en actividad 3. Volumen de agua en la piscina.*



Elaboración propia.

En cualquiera de los modelos generados, los alumnos necesitarán un prisma de base trapezoidal, estando ésta última en una posición distinta a la que suele aparecer en las representaciones de los libros de texto (paralela al suelo o inferior). De nuevo, se repetirá el proceso de elección de explicación de la resolución del problema por parte de un representante de uno de los grupos.

4. Para la última actividad, plantearemos un problema en un edificio que les será bien conocido: su propio instituto.




**Figura 19.** *Vista aérea del Instituto de Educación Secundaria Diego de Siloé, Albacete.*



Elaboración propia a partir de Google Maps.

Esta vez abandonaremos el fluido agua por el fluido aire. Podremos pedirles que reflexionen sobre cómo en invierno existe un sistema de calefacción en sus casas, y que de igual manera existe en el instituto. Para ello pediremos una rápida estimación del volumen de aire a calentar en una vivienda (aproximadamente entre  $50-100 \text{ m}^2$  x  $2.7 \text{ m}$  de alto), para que posteriormente podamos compararlo con el volumen total de aire contenido (aproximadamente) en el edificio del instituto y que sean conscientes de la diferencia en la exigencia del sistema de calefacción. De nuevo, el esquema de la estructura del proceso y la presentación y corrección del proceso y resultado del problema sería similar a las actividades anteriores.



Instrumentos de evaluación.	<p> Rúbrica de Actividad. (Método: Análisis de producciones escritas). Ver Anexo.</p> <p> Registro en Cuaderno de Clase. (Método: Observación sistemática en clase).</p> <p> Exposición Oral. (Método: Observación sistemática en clase).</p>
-----------------------------	--

### 5.4.5 EVALUACIÓN

En este apartado, abordamos la Fase 2 del modelo y de las actividades planteadas: la evaluación. Esta fase no contiene actividades en sí, sino que es continua con las otras dos y simultánea, pues se concibe como parte intrínseca del proceso y de las propias actividades de enseñanza.

#### 5.4.5.1 Evaluación de los alumnos.

En primer lugar, la evaluación se identifica con las siguientes características: continua, formativa e integradora. Abordando la primera, el modelo descrito está pensado para integrarse en una posible programación didáctica ya existente o en desarrollo, en la que la evaluación se concibe como proceso continuo y no meramente puntual. Son las propias actividades planteadas las que nos aportan datos e información del nivel de logro del proceso de aprendizaje del alumno, realizando la evaluación durante el proceso y no de manera meramente puntual al final de una unidad didáctica. Por otro lado, el propio diseño del modelo en dos fases (Fase 0 y Fase 1) lleva implícito el espíritu de una evaluación inicial y diagnóstica (Fase 0) que permita detectar las dificultades y ajustar la siguiente fase para mejorar y optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, contribuyendo adicionalmente a conseguir una evaluación formativa. Por último, el flujo coherente de información desde la recogida de datos mediante los instrumentos de evaluación, pasando por los Criterios de Evaluación, Estándares de Aprendizaje Evaluables y sus Competencias Clave asociadas, nos permite evaluar las Competencias Clave integradas con la evaluación de los contenidos. (Consultar en Anexo el punto 8.1 Cuadro Resumen Actividades, donde se detallan los

Criterios de Evaluación, la concreción de los Estándares de Aprendizaje Evaluables y la relación de estos con las Competencias Clave, así como los instrumentos de evaluación utilizados para medir el grado de desempeño de los mismos). De esta forma, contribuimos a la consecución de los objetivos establecidos por etapa y al desarrollo de las competencias clave.

En el diseño de la evaluación de la propuesta didáctica presente en este trabajo se ha tenido en cuenta la viabilidad de incorporar el modelo de actividades propuesto en una programación didáctica preexistente o en vías de desarrollo. Por ello, los instrumentos de evaluación utilizados han sido seleccionados teniendo en cuenta este criterio. Según el método o procedimiento de recogida de la información, distinguimos entre la Observación sistemática en clase o el Análisis de producciones de los alumnos. En el primero, dispondremos del instrumento Registro en Cuaderno de clase (RC), asumiendo que es un instrumento de evaluación muy extendido, y de la Exposición Oral (EO), que evaluará puntualmente las exposiciones orales de los grupos de alumnos en la sesión 02 de la Fase 1. Igualmente, la información recogida a través de la observación de las exposiciones orales podrá sumarse a las otras posibles situaciones similares (de expresión verbal y pública al grupo clase) que se producirán a lo largo del curso y que también serán susceptibles de ser evaluadas. Para el segundo método de recogida de información, dispondremos de una herramienta diseñada para estas actividades en forma de Rúbrica (consultar Anexo punto 8.3 Rúbrica Actividades). Estas rúbricas no son exclusivas para las actividades particularizadas y desarrolladas en el presente trabajo (actividades basadas en la ciudad de Albacete), sino que pueden generalizarse para la misma actividad en otro contexto y tipo de problemas. En dicha rúbrica se describen los EAE involucrados y trabajados, permitiendo así que el hipotético docente pueda asignar un nivel de logro a cada EAE, e integrarlo en su evaluación. De esta manera la evaluación de las actividades contribuyen a generar el perfil competencial para cada alumno.

En segundo lugar, en la evaluación de la propuesta no se incluye un criterio de calificación, pues dicho criterio es dependiente de la programación didáctica en la que se inscriba la hipotética propuesta. De manera adicional, y para el caso particularizado que se ha descrito en un centro educativo en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha, una posible vía podría ser la ponderación de cada uno de los Estándares de Aprendizaje

Evaluables según su clasificación en tres grupos: Básicos, Intermedios y Avanzados. La consecución de todos los estándares de tipo Básico por parte del alumno sería garante de la Suficiencia en la calificación total.

Por otro lado, se hace necesario incidir en que la propia estructura y secuenciación de fases y actividades del modelo no es rígida, y es susceptible de adaptarse para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. En la propuesta particularizada descrita anteriormente, se ha detallado un esquema en el que se realiza una Fase 0 (2 sesiones) y posteriormente una Fase 1 (2 sesiones). Esta Fase 0 de trabajo con Geogebra está concebida como trabajo previo y evaluación inicial, antes de realizar las actividades de problemas contextualizados en el medio urbano de la Fase 1. Sin embargo, otras posibles configuraciones son posibles. Por ejemplo, podrían intercalarse las fases : Fase 0 (1 sesión trabajo Geogebra) - Fase 1 (sesión 01) - Fase 0 (sesión trabajo Geogebra) - Fase 1 (sesión 02); de esta forma, en la segunda sesión de trabajo con Geogebra se podrían trabajar conceptos que han de ser reforzados o ampliados tras la primera sesión de la Fase 1.

#### **5.4.5.2 Evaluación de la propuesta.**

Por último, y atendiendo al principio de evaluación formativa, la propuesta didáctica y, por ende, el modelo propuesto han de ser susceptibles de ser evaluados para su mejora y constante revisión. Para ello, se propone un método de evaluación mediante rúbrica, la cual contendrá las siguientes entradas o criterios (cada una dispondrá de un nivel de consecución de logro: Insuficiente, Suficiente, Adecuado, Excelente; ver Anexo):

- Temporalización (los niveles detallan si la temporalización de las sesiones y actividades ha sido correcta o no).
- Contenidos, estándares de aprendizaje evaluables y competencias clave (los niveles detallan el grado de logro en general del grupo clase de la adquisición de las competencias a través de los estándares)
- Actividades, metodología y agrupamientos (los niveles detallan el grado de éxito o eficacia de las actividades planteadas, su método y el tipo de agrupamiento para el buen desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje).
- Recursos y materiales didácticos (los niveles detallan su grado de eficacia).
- Instrumentos de evaluación (los niveles detallan la eficacia de estos a la hora de



recoger y obtener información objetiva y veraz).

- Atención a la diversidad (los niveles detallan si los planteamientos previos han resultado ser eficaces y adaptables a una determinada situación).

## 6. CONCLUSIONES Y VALORACIÓN CRÍTICA

En el presente trabajo se ha descrito una propuesta de innovación didáctica en la enseñanza de la Geometría en Secundaria a través de la creación de un modelo para generar actividades basadas en una metodología activa, mediante el apoyo del medio urbano y arquitectónico como hilo conductor y fuente de contexto, inspiración y conexión con la realidad para las mismas.

A lo largo de la elaboración de la propuesta (tras un proceso de ida y vuelta entre investigación y proposición), podemos enumerar una serie de aportaciones y hallazgos encontrados que consideramos relevantes para la enseñanza de la Geometría en Secundaria, tanto por su contribución a la superación de dos de los principales obstáculos que la limitan (la falta de comprensión de los conceptos y de motivación en su aprendizaje) como por su aportación en relevancia y pertinencia del propio campo de la Geometría.

En primer lugar, destacar la importancia de no desequilibrar el peso del conocimiento y la comprensión de los conceptos geométricos entre sus formas teórica y práctica, procurando no priorizar sólo la primera y persiguiendo que los alumnos sean capaces de resolver problemas geométricos que se les planteen, tanto por el desarrollo de sus propias competencias como por la mejora en el aprendizaje de estos conocimientos al realizarlos de una forma más significativa. Esto puede hacerse mediante actividades interdisciplinares que busquen conexiones con otras áreas de la Matemática, u otras ciencias o campos, como el Arte (arquitectura en nuestro caso, pero también pintura, escultura, etc.), y que compongan un amplio abanico de situaciones donde los alumnos puedan explorar, observar y manipular propiedades y conceptos de las figuras geométricas.

En segundo lugar, y al hilo de lo anterior, la importancia del medio visual para el proceso de aprendizaje de conocimientos y conceptos geométricos, así como para mejorar la

habilidad del alumno para razonar y validar las fórmulas geométricas. En el presente trabajo se han utilizado dos herramientas informáticas de gran peso visual pero diferentes entre sí. La primera, el programa Geogebra, uno de los mayores referentes de programas de geometría dinámica, cuyo principal punto fuerte es la manipulación y observación dinámica de figuras geométricas y sus respectivas propiedades, se muestra como gran aliada para superar muchos de los obstáculos surgidos en la enseñanza tradicional de la Geometría. Por otro lado, la aplicación informática Google Maps, que con su facilidad de uso y la cantidad, diversidad y accesibilidad de información que pone a nuestro alcance, es una efectiva herramienta para llevar la realidad del medio urbano al aula, actuando de valiosa "ventana" a la ciudad o "lienzo" sobre el que plantear nuestras situaciones y problemas didácticos.

Siguiendo el punto anterior, concluimos con la importancia de esa búsqueda y labor de creación e investigación del docente en la confección de una metodología basada en actividades y problemas inmersos en un contexto significativo y relevante para el alumno, que fomenten la creatividad, el ingenio y la iniciativa, a fin de que construya su propio conocimiento, frente al tradicional método deductivo cimentado en la memorización de conceptos, teoremas y fórmulas. Por ello, los principios y características de la anteriormente descrita teoría de la Educación Matemática Realista han resultado de gran ayuda como base teórica para la generación de este modelo.

La pertinencia de estos hallazgos se hace visible al traer a colación la relevancia y necesidad de la propuesta del presente trabajo. En primer lugar ante la problemática concretizada en dos grandes obstáculos en la enseñanza de la Geometría: las dificultades en la comprensión de los conceptos y la falta de motivación de los alumnos (y por ende, la del profesorado). Esta problemática es generada por una metodología tradicional caracterizada por la preferencia por la memorización de conceptos y propiedades y la automatización de los procesos en la resolución de problemas. En segundo lugar, pero no menos importante, por la relevancia e importancia del área de la Geometría como campo de conocimiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como en el desarrollo del educando, concretamente en cómo este se comunica y relaciona con el entorno, favoreciendo la conexión con el mundo en el que vive, ya que el conocimiento de esta materia influye en determinadas capacidades, como son

la percepción visual y la comprensión del espacio tridimensional, o el razonamiento lógico para su posterior aplicación en otras materias de la Matemática (Barrantes et al., 2014).

Por otro lado, una vez concluida la propuesta didáctica, podemos revisar la consecución de los objetivos inicialmente planteados. En un primer orden, podemos definir como alcanzado (con una serie de potencialidades y limitaciones que comentaremos más adelante) el principal objetivo de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la etapa de Secundaria mediante el diseño de un modelo para generar actividades con una metodología activa basada en los principios de la teoría de la Educación Matemática Realista y el uso de herramientas informáticas. En un segundo orden, podemos dar por satisfecho el objetivo de hacer uso de las herramientas tecnológicas disponibles para la obtención de información del mundo real, así como del análisis de datos en un entorno virtual controlado, mediante la aplicación de las herramientas informáticas Geogebra y Google Maps. Adicionalmente, y aunque no se haya llevado a la práctica, este modelo contribuye a aumentar la motivación y el interés del alumno por los contenidos de la asignatura y su propio proceso de aprendizaje, así como por el medio urbano y el contexto físico-social-cultural donde vive, así como por su patrimonio cultural e histórico. Además, a través de actividades diseñadas mediante el modelo descrito, contribuimos a superar determinados obstáculos presentes en el panorama educativo de la enseñanza de la Geometría, tales como la presentación y trabajo de contenidos sin conexión con el mundo real, o la reducción de dicha enseñanza a la mera aplicación automática de fórmulas. Por último, se ha alcanzado también el objetivo referente a la aplicación particular del modelo en una situación contextualizada: curso de 3º de la ESO, para la asignatura Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas, en un centro de enseñanza secundaria en la ciudad de Albacete, Castilla-La Mancha, a través de la ejemplificación de la propuesta anteriormente descrita.

A continuación, pasamos a describir algunas de las fortalezas y debilidades encontradas en el proceso de creación de la propuesta didáctica. Como fortaleza, podemos nombrar la capacidad del modelo descrito de servir como inspiración y guía para una propuesta didáctica concreta y particular en cualquier centro de enseñanza secundaria, debido a la flexibilidad a la hora de integrarse en una hipotética programación didáctica, tanto en organización y temporalización (al no ser un modelo rígido y demasiado específico), como en

medios y diversidad de recursos (al proponer diferentes niveles o escenarios de aplicación). Otra fortaleza evidente es la capacidad del modelo de generar actividades en las que el alumno pueda realizar un aprendizaje significativo, mediante los procesos de resolución de problemas contextualizados en el medio urbano en los que el estudiante pueda desarrollar su nivel de comprensión y conocimientos matemáticos, así como algunas de las competencias clave descritas en el currículum de secundaria y expuestas anteriormente.

Por otro lado, un posible punto débil del modelo puede ser la dificultad de aplicar dichas actividades para alcanzar el aprendizaje de determinados contenidos del currículum de secundaria, y más concretamente Bachillerato, ya que la generación de situaciones basadas en contextos reales del medio urbano resulta más compleja por la relación con estos contenidos. Otra posible debilidad se podría definir como la cara opuesta pero indisoluble de otra de sus posibles fortalezas, que es la utilización de dos herramientas informáticas (y sobre todo la combinación de ambas), Geogebra y Google Maps, que podría actuar como condicionante para llevar a la práctica las actividades. La respuesta en la metodología del modelo ante la misma ha sido doble: por un lado, la utilización de recursos ya disponibles en Geogebra; y por otro, la utilización de otros recursos (material impreso personalizado) o las diferentes maneras de utilizar Google Maps (tanto de manera más activa y directa para el alumno en el aula de informática como de manera más discursiva y guiada a través del recurso pizarra más proyector).

Siguiendo con el punto anterior, se exponen algunas limitaciones que han acotado o condicionado el presente trabajo. En primer lugar señalaríamos la limitación supuesta por la ausencia de la posibilidad de llevar a la práctica (o la complejidad a la hora de hacerlo en relación al tiempo estipulado para el presente trabajo) las actividades generadas por el modelo, las cuales podrían haber servido para su mejora y ajuste. En otro orden, una limitación autoimpuesta en aras de conseguir una mayor flexibilidad y por tanto una mayor grado de aplicabilidad del modelo en el aula, ha sido la aplicación parcial de la metodología de resolución de problemas, en tanto que se deja a discreción del docente el cómo y el cuándo trabajar determinados conceptos (fase 0) en relación a la resolución de problemas mediante las actividades (fase 1). Tanto fase 0 (trabajo con Geogebra) como fase 1 (actividades contextualizadas con Google Maps) se conciben como sesiones complementarias, siendo la

fase 0 de tipo auxiliar, evaluación inicial y posible refuerzo.

Fruto de la reflexión sobre las limitaciones del propio trabajo, nacen otras sobre posibles ampliaciones o líneas de trabajo futuras. Una posible línea de trabajo interesante podría ser el trabajo de investigación y estudio en el diseño de dichas actividades que aúnen tanto el recurso Geogebra como el recurso Google Maps, resultando en una situación didáctica basada en herramientas informáticas de geometría dinámica basadas en un contexto real muy interesante. Sin embargo, es anticipable un grado de complejidad bastante alto que pueda alejar y condicionar la posible puesta en práctica de dicho modelo. Otra posible línea de trabajo es abandonar el medio urbano como contexto y buscar otro campo de conocimiento (utilizando la propia herramienta Google Maps) que sirva de base para el diseño de las actividades. No obstante, ello queda muy condicionado por el propio perfil del docente que lleve a cabo la concreción. Se nos hace necesario recalcar que esta es precisamente una de las fortalezas del modelo, el diseño, desarrollo, creación y puesta en práctica de las actividades será completamente diferente según el docente y por tanto el perfil personal que lo lleve a cabo, pudiendo surgir sinergias y conexiones con otras disciplinas de interés u otros campos de conocimiento. Otra interesante línea de trabajo sería aquella que buscara ampliar el modelo mediante la aplicación de este a través de la metodología de aprendizaje basado en proyectos, en la cual los alumnos tendrían que llevar a cabo una investigación más extensa sobre el problema o alguna situación o elemento interesante de su ciudad.

Por último, y como broche conclusivo del presente trabajo, se hace pertinente destacar la aportación del desarrollo de la propuesta didáctica descrita como oportunidad personal para explorar y experimentar en la generación de ideas innovadoras en el ámbito de la educación de la matemática, tanto útiles como motivadoras para una futura práctica profesional.

## 7. REFERENCIAS

- Alsina, A. (2009) . El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. *Investigación en Educación Matemática*, XIII, 119-127.
- Barrantes, M., y Zapata, M.A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71.
- Barrantes, M., y Balletbo, I. (2012a). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria. *Campo Abierto*, 31(2), 139-153.
- Barrantes, M., y Balletbo, I. (2012b). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, 8(1), 25-42.
- Barrantes, M., Balletbo, I., y Fernández, M.A. (2014). *Enseñar Geometría en Secundaria*. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, Buenos Aires, Argentina.
- Bressan, A., Zolkower, B., y Gallego. Ma. F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta*. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.
- Caulín, A. (2014). El depósito de agua en el parque "La fiesta del árbol", (1935-1946). *Al-Basit*, 59, 309-346.
- Corrales, C. (2004). Salvador Dalí y la cuestión de las dimensiones. *Suma*, 47, 99-108.
- Corrales, C. (2008). Escher I: las matemáticas para construir. *Suma*, 49, 101-108.
- Decreto 40/2015, de 15 de junio de 2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha.

- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21<sup>st</sup> Century* (pp. 37-51). Kluwer Academic Publishers.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- García, M. (2005). El Tolmo de Minateda: historia y matemáticas. *Suma*, 51, 41-50.
- Gómez-Chacón, I. M., y Maestre, N. A. (2008). Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. *Experiencias de Aula y Propuestas Didácticas*, 17(1), 107-121.
- Gorgorio, N., Artigues, F. I., Banyuls, F., Moyanos, D., Planas, N., y Roca, M. (2000). Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones. *Suma*, 33, 59-71.
- Gracia, E. (1995). Representación del espacio en el plano. *UNO*, 4, 29-40.
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, M.V. (eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. (pp. 145-169). Comares.
- Martín. (2008). El Greco en otra dimensión. *Suma*, 59, 67-72.
- Mercado, A. I., y Custodio, M. Z. (2005). Diseñando camisetas: un viaje por la geometría nazarí. *Suma*, 49, 33-35.
- Mesquita, A. L. (1992). The Types of Apprehension in Spatial Geometry: Sketch of a Research. *Structural Topology*, 18, 19-30.

Millán, A. (2004). Leon Battista Alberti, la ingeniería y las matemáticas del Renacimiento. *Suma*, 47, 93-97.

Mora, A. (2007). *Geometría Dinámica en Secundaria*. [Ponencia] XIII JAEM, Granada.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (2006). *Ministerio de Educación, Cultura y Deporte* «BOE» núm. 106, de 04 de mayo de 2006. Referencia: BOE-A-2006-7899.

Ley 7/2010, de 20 de Julio, de Educación de Castilla-La Mancha. «DOCM» núm. 144, de 28 de julio de 2010, «BOE» núm. 248, de 13 de octubre de 2010. Referencia: BOE-A-2010-15624.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Ministerio de Educación, Cultura y Deporte* «BOE» núm. 25, de 29 de enero de 2015. Referencia: BOE-A-2015-738.

Orden de 15 de abril, de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes, por la que se regula la evaluación del alumnado en la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha. «DOCM» núm. 80, de 27 de abril de 2010.

Pérez, S., y Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. *Investigación en Educación Matemática*, XI, 295-300.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. «BOE» núm. 3, de 03 de enero de 2015. Referencia: BOE-A-2015-37.

Reeuwijk, M. (1997). Las Matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana de las Matemáticas. *UNO*, 12, 9-16.



Thibaut, E. (2004). Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional. *Suma*, 47, 11-18.

Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de Procesos Cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 521-525. DOI 10.1007/978-94-007-4978-8.





## 8. ANEXOS

### 8.1 Cuadro Resumen Actividades.





A continuación, se incluye un cuadro resumen con la relación de contenidos trabajados en cada sesión, así como los criterios de evaluación y sus correspondientes estándares de aprendizaje evaluables, y la relación de estos con cada una de las competencias y los instrumentos de evaluación utilizados.

**Tabla 2.** *Cuadro Resumen Actividades*

Fase 0
Sesión 01
Contenidos:
<p>Bloque de Geometría:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorema de Tales. Aplicación a la resolución de problemas. En concreto, cálculo de alturas inaccesibles.</li> <li>• Semejanza. Razón de semejanza. Escalas.</li> <li>• Perímetro y Áreas de figuras planas.</li> </ul> <p>Bloque de Procesos, métodos y actitudes matemáticas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para facilitar la comprensión de propiedades geométricas y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.</li> </ul>

Criterios de Evaluación.	Estándares de Aprendizaje Evaluables	I.E.	C.C.
<b>Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes matemáticas.</b>			
8. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	8.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.		CD
	8.3. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.		CM CD
<b>Bloque 3: Geometría.</b>			
2. Utilizar los Teoremas de Tales y de Pitágoras para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.		CM
	2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.		CM
<b>Sesión 02</b>			
<b>Contenidos:</b>			
Bloque de Geometría: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometría del espacio.</li> <li>• Volúmenes y áreas de cuerpos geométricos.</li> </ul> Bloque de Procesos, métodos y actitudes matemáticas:			

<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para facilitar la comprensión de propiedades geométricas y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.</li> </ul>			
Criterios de Evaluación.	Estándares de Aprendizaje Evaluables	I.E.	C.C.
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes matemáticas.			
8. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	8.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.	RC	CD
	8.3. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.	RC	CM CD
Bloque 3: Geometría.			
5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.	RC	CM
	5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.	RC	CM
Fase 1			
Sesión 01			
Contenidos:			
Bloque de Geometría: <ul style="list-style-type: none"> <li>Áreas de figuras planas.</li> <li>Escalas.</li> </ul>			

<p>Bloque de Procesos, métodos y actitudes matemáticas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Planificación del proceso de resolución de problemas.</li> <li>• Estrategias y procedimientos puestos en práctica (uso del lenguaje apropiado, reformulación del problema, resolución de subproblemas, recuento exhaustivo, análisis inicial de casos particulares sencillos, búsqueda de regularidades y leyes).</li> <li>• Reflexión sobre los resultados (revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto adecuado, búsqueda de otras formas de resolución, planteamiento de otras preguntas).</li> <li>• Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos geométricos.</li> <li>• Práctica de procesos de modelización matemática, en contextos de la realidad cotidiana y contextos matemáticos.</li> <li>• Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.</li> </ul>			
Criterios de Evaluación.	Estándares de Aprendizaje Evaluables	I.E.	C.C.
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes matemáticas.			
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos necesarios, datos superfluos, relaciones entre los datos, contexto del problema) y lo relaciona con el número de soluciones.		CL
	2.2. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando la utilidad y eficacia de este proceso.		AA
	2.3. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre dicho proceso.		AA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y	5.1 Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones		CL CM

conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico y geométrico.		
6. Desarrollar procesos de modelización matemática (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos) a partir de problemas de la realidad cotidiana y valorar estos recursos para resolver problemas, evaluando la eficacia y limitación de los modelos utilizados.	6.1. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y utilizando los conocimientos matemáticos necesarios.	RB	AA CM
	6.2. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas.	RB	CM
	6.3. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto del problema real.	RB	CM CC
<b>Bloque 3: Geometría.</b>			
2. Utilizar los Teoremas de Tales y de Pitágoras para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.	RB	CM
	2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.	RB	CM
3. Calcular mediante ampliación o reducción, las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.	RB	CM

Sesión 02			
Contenidos			
<p>Bloque de Geometría:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Volúmenes y áreas de cuerpos geométricos.</li> </ul> <p>Bloque de Procesos, métodos y actitudes matemáticas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Planificación del proceso de resolución de problemas.</li> <li>• Estrategias y procedimientos puestos en práctica (uso del lenguaje apropiado, reformulación del problema, resolución de subproblemas, recuento exhaustivo, análisis inicial de casos particulares sencillos, búsqueda de regularidades y leyes).</li> <li>• Reflexión sobre los resultados (revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto adecuado, búsqueda de otras formas de resolución, planteamiento de otras preguntas).</li> <li>• Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos geométricos.</li> <li>• Práctica de procesos de modelización matemática, en contextos de la realidad cotidiana y contextos matemáticos.</li> <li>• Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.</li> </ul>			
Criterios de Evaluación.	Estándares de Aprendizaje Evaluables	I.E.	C.C.
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes matemáticas.			
1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1 Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.		CL
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos necesarios, datos superfluos, relaciones entre los datos, contexto del problema) y lo relaciona con el número de soluciones.		CL
	2.2. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los		AA

	problemas a resolver, valorando la utilidad y eficacia de este proceso.		
	2.3. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre dicho proceso.	RB	AA
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	5.1 Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico y geométrico.	RB	CL CM
6. Desarrollar procesos de modelización matemática (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos) a partir de problemas de la realidad cotidiana y valorar estos recursos para resolver problemas, evaluando la eficacia y limitación de los modelos utilizados.	6.1. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y utilizando los conocimientos matemáticos necesarios.	RB	AA CM
	6.2. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas.	RB	CM
	6.3. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto del problema real.	RB	CM CC
<b>Bloque 3: Geometría.</b>			
2. Utilizar el Teoremas de Tales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas	2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.	RB	CM

geométricos.			
5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.	5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.	RB	CM
	5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.	RB	CM

Elaboración propia.

## 8.2 Relación actividades Geogebra.

A continuación, se incluye una relación de actividades con Geogebra en base a diversos recursos didácticos disponibles en la página web de la herramienta, así como un breve desarrollo de las actividades en las distintas sesiones:

En la primera sesión:

### 1. "Figuras semejantes".

Autor: Alberto Ugarte.

Temporalización: 10 min.

### 2. "Altura de un edificio".

Autores: Alberto Ugarte y Mari Carmen.

Temporalización: 10 min.

### 3. "Problemas de perímetros".

Autor: Javier Cayetano Rodríguez.

Temporalización: 10 min.



#### **4. "Áreas y perímetros".**

Autor: Juli Jurado i Llamas.

Temporalización: 10 min.

En la segunda sesión:

#### **1. "Área y volumen de un paralelepípedo".**

Autor: Lenin Paulino.

Temporalización: 10 min.

#### **2. "Volumen y superficie del cilindro y el cono".**

Autor: Javier Cayetano Rodríguez.

Temporalización: 10 min.

#### **3. "Volumen y superficie de la esfera".**

Autor: Javier Cayetano Rodríguez.

Temporalización: 10 min.

#### **4. "Pirámides".**

Autor: Lenin Paulino.

Temporalización: 10 min.

Nota: Los recursos pueden encontrarse en la dirección: <https://www.geogebra.org/m/etd87kcu>

### 8.3 Rúbricas Actividades y Evaluación de la propuesta.

**Tabla 3. Rúbrica Actividad Sesión 1 Fase 1**

Rúbrica Actividades Sesión 1 Fase 1						
Nivel de logro:	1	2	3	4	EAE involucrados	Puntos (0-10)
Criterio						
Orden y organización	El trabajo se presenta desorganizado. Es difícil saber qué información está relacionada.	El trabajo se presenta en una manera organizada, pero puede resultar difícil de leer.	El trabajo se presenta de una manera ordenada y organizada que, por lo general, resulta fácil de leer.	El trabajo se presenta de una manera ordenada, clara y organizada que resulta fácil de leer.	B1_5.1	1
Diagramas y dibujos	Los diagramas y/o dibujos resultan difíciles de entender o son superfluos.	Los diagramas y/o dibujos resultan algo difíciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos resultan claros y fáciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos resultan claros y ayudan a la comprensión de los procedimientos.	B1_5.1	1
Razonamiento matemático	Existe poca evidencia de razonamiento matemático.	Existe alguna evidencia de razonamiento matemático.	Existe uso de razonamiento matemático efectivo.	Existe uso de razonamiento matemático complejo.	B1_2.1 B1_2.2	1
Estrategias / procedimientos (modelización matemática)	Apenas existe uso de una estrategia efectiva para resolver problemas.	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no de manera consistente.	Por lo general, existe el uso de una estrategia efectiva para resolver problemas.	Por lo general, existe el uso de una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	B1_6.1 B1_6.2 B1_6.3	3
Conceptos	La producción presenta un entendimiento muy escaso de los conceptos necesarios para resolver los problemas (o no aparece).	La producción presenta algún entendimiento del concepto necesario para resolver los problemas.	La producción presenta entendimiento consistente del concepto necesario para resolver los problemas.	La producción presenta completa comprensión y manejo del concepto necesario para resolver los problemas.	B3_2.1 B3_2.3 B3_3.1	4

**Tabla 4. Rúbrica Actividad Sesión 2 Fase 1**

<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="background-color: #8e7cc3; border-radius: 50%; width: 30px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-right: 10px;"> <span style="color: white; font-weight: bold; font-size: 1.2em;">RB</span> </div> <div style="text-align: center;"> <h3 style="margin: 0;">Rúbrica Actividades Sesión 2 Fase 1</h3> </div> </div>						
Nivel de logro:	1	2	3	4	EAE involucrados	Puntos (0-10)
Criterio						
Orden y organización	El trabajo se presenta desorganizado. Es difícil saber qué información está relacionada.	El trabajo se presenta en una manera organizada, pero puede resultar difícil de leer.	El trabajo se presenta de una manera ordenada y organizada que, por lo general, resulta fácil de leer.	El trabajo se presenta de una manera ordenada, clara y organizada que resulta fácil de leer.	B1_5.1	1
Diagramas y dibujos	Los diagramas y/o dibujos resultan difíciles de entender o son superfluos.	Los diagramas y/o dibujos resultan algo difíciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos resultan claros y fáciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos resultan claros y ayudan a la comprensión de los procedimientos.	B1_5.1	1
Razonamiento matemático	Existe poca evidencia de razonamiento matemático.	Existe alguna evidencia de razonamiento matemático.	Existe uso de razonamiento matemático efectivo.	Existe uso de razonamiento matemático complejo.	B1_2.1 B1_2.2	1
Estrategias / procedimientos (modelización matemática)	Apenas existe uso de una estrategia efectiva para resolver problemas.	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no de manera consistente.	Por lo general, existe el uso de una estrategia efectiva para resolver problemas.	Por lo general, existe el uso de una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	B1_6.1 B1_6.2 B1_6.3	3
Conceptos	La producción presenta un entendimiento muy escaso de los conceptos necesarios para resolver los problemas (o no aparece).	La producción presenta algún entendimiento del concepto necesario para resolver los problemas.	La producción presenta entendimiento consistente del concepto necesario para resolver los problemas.	La producción presenta completa comprensión y manejo del concepto necesario para resolver los problemas.	B3_2.1 B3_2.3 B3_3.1	3
Trabajo en grupo	El estudiante no pudo trabajar efectivamente con su compañero/a.	El estudiante trabajó con su(s) compañero(s), pero necesitó motivación para mantenerse activo.	El estudiante fue un participante activo, pero tuvo dificultad al escuchar las sugerencias de los otros compañeros y al trabajar en grupo durante la sesión.	El estudiante fue un participante activo, escuchando las sugerencias de sus compañeros y trabajando en grupo durante toda la sesión.		1

**Tabla 5. Rúbrica Evaluación de Implantación del modelo.**

Rúbrica Evaluación de la Implantación del modelo de actividades.					
Nivel de logro:	1 Insuficiente	2 Suficiente	3 Adecuado	4 Excelente	Puntos (0-10)
Criterio					
Temporalización	El número de sesiones ha resultado ser inadecuado (por insuficiencia o exceso).	El número de sesiones ha sido suficiente pero a costa de perjudicar fluidez y profundización.	El número de sesiones ha resultado adecuado, aunque han debido de realizarse ajustes.	El número de sesiones ha resultado ser idóneo.	1
Contenidos-EAE-Competencias Clave	No se ha comprobado un nivel suficiente en la adquisición de las CC a través de la consecución de los EAE y el uso de los contenidos para la misma.	Se ha comprobado un nivel suficiente en la adquisición de las CC a través de la consecución de los EAE y el uso de los contenidos para la misma, aunque con un gran margen de mejora.	Se ha comprobado un nivel correcto y adecuado en la adquisición de las CC a través de la consecución de los EAE y el uso de los contenidos para la misma.	Se ha comprobado un gran éxito en la adquisición de las CC a través de la consecución de los EAE y el uso de los contenidos para la misma.	3
Actividades, metodología, agrupamientos	El desarrollo de las actividades y los tipos de agrupamientos ha resultado ser insuficiente e inadecuado.	El desarrollo de las actividades y los tipos de agrupamientos ha resultado ser suficiente pero se han percibido numerosas limitaciones.	El desarrollo de las actividades y los tipos de agrupamientos ha resultado ser adecuado y efectivo.	El desarrollo de las actividades y los tipos de agrupamientos ha resultado ser idóneo, superando las expectativas iniciales.	3
Recursos y materiales didácticos	Los recursos y materiales han resultado ser insuficientes o inadecuados.	Los recursos y materiales han resultado ser suficientes, pero se han detectado numerosos obstáculos.	Los recursos y materiales han resultado ser adecuados, aunque aún tienen cierto margen de mejora.	Los recursos y materiales han resultado ser idóneos de manera inequívoca.	1
Instrumentos de evaluación	Los IE utilizados no han sido de utilidad para recoger información útil sobre el aprendizaje del alumnado.	Los IE utilizados han resultado ser suficientes pero hay muchos aspectos del aprendizaje de los que no se ha obtenido información alguna.	Los IE utilizados han resultado ser adecuados para la evaluación del aprendizaje.	Los IE utilizados han resultado ser una gran herramienta de evaluación y se han adaptado sin problemas a la programación didáctica.	1
Atención a la diversidad	El modelo no ha resultado ser efectivo ni adaptable a una (hipotética) situación de atención a la diversidad.	El modelo ha resultado ser suficiente ante una (hipotética) situación de atención a la diversidad, aunque de manera muy mejorable.	El modelo ha sido adecuado ante una (hipotética) situación de atención a la diversidad.	El modelo ha resultado ser muy flexible y efectivo ante una (hipotética) situación de atención a la diversidad.	1