UNIVERSIDAD A DISTANCIA DE MADRID
Facultad de Ciencias de la Salud y de la Educación

udima
UNIVERSIDAD A DISTANCIA DE MADRID

Razonamiento geométrico en maestras de Educación Infantil bajo el modelo Van Hiele: un estudio de caso

Tesis Doctoral
Elena Sánchez González
2026

UNIVERSIDAD A DISTANCIA DE MADRID
Facultad de Ciencias de la Salud y de la Educación

Razonamiento geométrico en maestras de Educación Infantil bajo el modelo Van Hiele: un estudio de caso

Tesis Doctoral presentada por:
Elena Sánchez González

Dirigida por:
Dr. Julián Roa González
Dr. José Luis Díaz Palencia

Madrid, abril 2026

A mis padres, Teodoro y María.
Gracias por acompañarme siempre.
Mamá, papá, os quiero.

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mis directores de tesis.

Al Doctor Julián Roa González, gracias por haber sido mentor, compañero, referente académico y guía constante a lo largo de este proceso, y siguiendo tu metáfora con la competición en natación, mi entrenador. Siempre me has dicho en estos años que el proceso del doctorado es una competición a contrarreloj, y cada brazada que dábamos era un metro menos, y sin duda, no he podido tener mejor entrenador al lanzarme de cabeza en todo esto. Haber contado con tu acompañamiento, exigencia y apoyo ha sido determinante para alcanzar esta meta.

Al Doctor José Luis Díaz Palencia, fuiste un regalo caído del cielo. Gracias por tu incorporación en un momento fundamental, por tu generosidad intelectual y por tu cercanía. Tu mirada crítica y tus aportaciones enriquecieron profundamente el avance y desarrollo final de este trabajo. Sin duda, has sido una pieza clave en todo este proceso.

A la Doctora Almudena Sánchez Sánchez, por comenzar la dirección con tanto cariño, cercanía, dedicación y por estar siempre disponible cuando fue necesario.

A los tres, gracias por la confianza depositada en mí y en este proyecto, por enseñarme a habitar el rigor metodológico y el pensamiento crítico, y por introducirme con generosidad en el mundo de la investigación.

A mi familia, a mi madre María y a mi padre Teodoro, gracias por la educación recibida, por vuestro esfuerzo constante y por el acompañamiento incondicional en cada reto personal y profesional, soy quien soy por vosotros. A mi hermano Álvaro, por ser siempre un respaldo seguro, por recordarme incluso en los momentos difíciles que no estaba sola y ejercer de hermano mayor en cada etapa de mi vida. Este logro también os pertenece.

Rafa, si echo la vista atrás, siempre estuviste cuidándome, desde que me esperabas en el metro a las seis de la mañana para ir juntos a entrenar. Nunca podré agradecerte lo suficiente todo el tiempo que has dedicado a hacerme la vida más fácil mientras yo me centraba en la tesis, por tu paciencia infinita, por haberme apoyado incondicionalmente en este proceso, por confiar en mí y darme la calma que necesitaba en todo momento. Estoy profundamente agradecida por todo lo que hemos construido y por todo lo que está por venir. Tu apoyo ha sido imprescindible. Esta meta es también tuya, nuestra, como tantas veces decías: -*"a ver si terminamos la tesis"*-.

Y, por supuesto, a Mosti, que llegaste a mi vida para llenarla de amor en forma de cuatro patas y recordarme, cada día, la importancia de detenerse y respirar.

A mi sobrino Marco, por aquella frase inocente que le dijo a su madre en la última fase de este proceso - *"¿tú te acuerdas de mi tía Elena?"*-. Sus palabras me atravesaron profundamente pero también me recordaron el valor de los sacrificios realizados y el impacto que este camino tiene también en quienes nos rodean. Prometo recuperar cada uno de los meses que no pudimos compartir.

A Elisa, compañera de camino, porque compartir esta etapa ha hecho más llevadero el recorrido. Solo quien atraviesa el proceso doctoral comprende plenamente sus luces y sus sombras y sin ti, este camino habría sido mucho más difícil.

A Sara, Natalia, Estíbaliz, Romy y compañeros de la Facultad de Educación, gracias por el apoyo cotidiano y el acompañamiento tanto personal como profesional. Agradecer también los momentos de desconexión que renovaban mi energía: José, David y Elena. Adrián, tus consejos y apoyo han sido fundamentales, gracias.

A mis colegas de la UAM —Rocío, Álvaro, Angélica y Ariadna— por creer en mí y abrirme las puertas al mundo académico. Y a Carlos de Castro, te estaré eternamente agradecida por aquella conversación que sembró la semilla de esta investigación.

A todas mis amistades y familiares, por darme el espacio que necesitaba sin pedir explicaciones, a pesar de no entender del todo bien "lo que se tarda en hacer una tesis", y por apoyarme en mi desaparición social. Vero, Cris, Montse y Bianca; sois mi familia elegida y mi recarga de energía. Gracias a todos por estar pendientes de mí, por vuestra comprensión y acompañamiento durante todos estos años.

Deseo expresar un agradecimiento muy especial al centro educativo Colegio Valdefuentes, que generosamente abrió sus puertas y cedió sus espacios para el desarrollo de la formación en la que se fundamenta esta investigación. Sin su confianza, disponibilidad y compromiso con la mejora educativa, este trabajo no habría sido posible. Mi más sincero reconocimiento también a las veintitrés maestras que participaron de manera voluntaria, por su implicación, su honestidad y su disposición para reflexionar sobre su propia práctica. Su participación constituye la esencia y el verdadero valor de esta tesis.

Este agradecimiento es, además, profundamente significativo en lo personal, ya que este centro no solo ha sido el escenario de esta investigación, sino también el lugar donde crecí como maestra. Poder regresar desde la investigación al espacio donde comenzó mi desarrollo profesional ha supuesto, sin duda, uno de los mayores privilegios de este proceso.

Finalmente, mi agradecimiento a la Universidad a Distancia de Madrid (UDIMA), a la Unidad de Doctorado y al Decanato, por facilitar las condiciones necesarias para culminar este proceso desde la serenidad y disfrutando de la llegada a la meta.

Concluir esta tesis ha supuesto no solo un logro académico, sino también un aprendizaje vital que reafirma mi compromiso con la investigación y con la educación. Nada de ello habría sido posible sin la red de apoyo que me ha acompañado en cada etapa del camino. Estoy tremendamente feliz y orgullosa de finalizar esta etapa.

ÍNDICE

RESUMEN 17
INTRODUCCIÓN 20
CAPÍTULO 1: TEMA DE ESTUDIO 32
1.1 Contexto y motivación del tema de estudio 32
1.2 Expectativas y Preguntas de investigación 33
1.3 Justificación 36
1.4 Objetivos de investigación 47
1.4.1 Objetivo General 1 47
1.4.1.1Objetivos Específicos 47
1.4.2 Objetivo General 2 47
1.4.2.1Objetivos Específicos 47
1.4.3 Objetivo General 3 48
1.4.3.1 Objetivos Específicos 48
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO 49
2.1. La educación matemática en la etapa de Educación Infantil 49
2.1.1 El sentido espacial en la educación matemática infantil 51
2.1.2 La geometría en el Real Decreto 95/2022 de Educación Infantil 52
2.1.3 La geometría en el Decreto 36/2022 de Educación Infantil 55
2.2 La educación matemática en los planes de estudios del Grado de Maestro de Educación Infantil. 55
2.2.1 La geometría en la formación docente de Educación Infantil 58
2.2.2 La importancia de la formación permanente del profesorado. 60
2.2.3 La importancia de la didáctica en la enseñanza de la geometría en Educación Infantil 63
2.3 La geometría y sus dimensiones 67
2.3.1. Competencias matemáticas en el conocimiento del espacio 68
2.3.2 Dificultades y concepciones en la enseñanza de la geometría 71
2.3.3 Teorías y modelos sobre aprendizaje y enseñanza de la geometría 73
2.3.3.1 Enfoques didácticos en la enseñanza de la geometría 74
2.3.3.2 Ubicación del Modelo Van Hiele dentro de los Enfoques Didácticos 78
2.4 El modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría 80
2.4.1 Origen y evolución del modelo 81
2.4.2 Insight 83
2.4.3 Niveles de Razonamiento geométrico 83
2.4.3.1 Nivel 1: Visualización/reconocimiento 84
2.4.3.2 Nivel 2: Análisis 85

2.4.3.3 Nivel 3: Deducción informal 87
2.4.3.4 Nivel 4: Razonamiento o deducción formal 88
2.4.3.5 Nivel 5: Razonamiento Abstracto o rigor 89
2.4.3 Propiedades de los Niveles de Razonamiento: 91
2.4.3.1 Secuencialidad 91
2.4.3.2 Jerarquía 92
2.4.3.3 Recursividad 92
2.4.3.4 Lenguaje 93
2.4.3.5 Desajuste 93
2.4.4 Fases de Aprendizaje para el razonamiento geométrico 94
2.4.4.1 Fase 1: Información 94
2.4.4.2 Fase 2: Orientación dirigida 95
2.4.4.3 Fase 3: Explicitación 96
2.4.4.4 Fase 4: Orientación libre 96
2.4.4.5 Fase 5: Integración 97
2.4.5 La evaluación del modelo 100
2.4.5.1 Pruebas diagnósticas de Niveles Van Hiele 101
2.5 Producción científica sobre el modelo Van Hiele y la geometría 103
2.5.1 Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española. 104
CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO 107
3.1. Enfoque metodológico 109
3.1.1. Identificación de la estrategia y enfoque de investigación. 112
3.1.2 Fases del método fenomenológico hermenéutico. 113
3.1.2.1 Primera fase: Etapa previa o clarificación de presupuestos. 113
3.1.2.2 Segunda fase: Recoger la experiencia vivida. 114
3.1.2.3 Tercera fase: Reflexionar acerca de la experiencia vivida-etapa estructural. 114
3.1.2.4 Cuarta fase: Escribir-reflexionar acerca de la experiencia vivida. 115
3.1.3 Investigación cualitativa: estudio de caso 116
3.1.3.1 Características de los estudios de caso. 117
3.2. Técnicas e instrumentos de recolección de datos 118
3.2.1 Instrumentos para recolección de datos 118
3.2.1.1 Cuestionario inicial. 118
3.2.1.2 Escala" Actitud ante las matemáticas-EAM" 119
3.2.2 Técnicas y estrategias para la recolección de datos. 124
3.2.2.1 Producciones escritas de las maestras (tareas geométricas) 124
3.2.2.2 Medios audiovisuales: videograbaciones y fotografía. 124

3.2.2.3 Diarios reflexivos de clase. 125
3.2.2.4 Observación participante 125
3.3. Técnicas de análisis de datos 126
3.3.1 Protocolo de análisis e interpretación cualitativa de los datos 127
3.3.1.1 Transcripción 127
3.3.1.2 Lectura holística y reducción fenomenológica 128
3.3.1.3 Codificación 129
3.3.1.2 Dimensiones y categorías de análisis cualitativo 131
3.4 Triangulación de datos 132
3.4.1 Estrategias para la triangulación 133
3.5 Redacción del informe y reflexión Final 134
3.6. Consideraciones éticas 134
3.6.1 Tratamiento de la información y la confidencialidad. 134
3.6.1.1 Códigos éticos 135
3.6.1.2 Custodia y difusión de resultados. 135
3.7. Procedimiento: diseño y fases de la investigación 138
3.7.1 Diseño de la investigación y cronograma 139
3.7.2 Duración del programa 140
3.7.3 Contexto del estudio 140
3.7.4 Situación y entorno 141
3.7.5 Participantes 142
3.7.5. 1 Edad 142
3.7.5.2 Experiencia en aula 142
3.7.5.3 Formación pedagógica 143
3.7.4 Institución educativa en la que se ha formado 143
CAPÍTULO 4: DISEÑO DEL PROGRAMA *"Tocando la geometría"* 144
4.1 Objetivo general del programa 144
4.1.1 Objetivos específicos del programa 144
4.2 Módulos de instrucción y justificación de la selección de contenidos 145
4.3 Descripción de las actividades 147
CAPÍTULO 5: RESULTADOS 194
5.1 Resultados del programa *"Tocando la geometría"* 195
5.1.1 Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele 196
5.1.1.1 Fase 1: información 198
5.1.1.2 Fase 2: orientación dirigida. 201
5.1.1.3 Fase 3: explicitación 208
5.1.1.4 Fase 4: orientación libre 215
5.1.1.5 Fase 5: integración 222

5.1.2 Niveles de Razonamiento geométrico Van Hiele 226
5.1.2.1 Sesiones 1-2 227
5.1.2.2 Sesiones 3-4 232
5.1.2.3 Sesiones 5-6 238
5.1.2.4 Sesiones 7-8 244
5.1.3 Dimensiones de la geometría 248
5.1.3.1 Geometría unidimensional. 249
5.1.3.2 Geometría bidimensional 251
5.1.3.3 Geometría tridimensional...256
5.1.4 Síntesis integradora de los resultados: recursos, Fases y evolución del razonamiento geométrico 259
5.1.4.1 Niveles de Razonamiento alcanzados 259
5.1.4.2 Dimensión geométrica que más ha avanzado 260
5.2 Resultados perceptuales y emocionales 261
5.2.1 Resultados del análisis del Cuestionario inicial. 261
5.2.2 Resultados Escala” Actitud ante las matemáticas-EAM”..................266
5.2.2.1 Relaciones entre los factores actitudinales hacia las matemáticas...272
5.2.2.2 Conexión entre la Escala y el modelo Van Hiele 274
5.3 Recursos didácticos y agrupamientos 276
5.3.1 Agrupamientos 276
5.3.2 Recursos empleados...278
CAPÍTULO 6: DISCUSIÓN y CONCLUSIONES 295
6.1 Conclusiones relacionadas con el marco metodológico 295
6.2 Conclusiones relacionadas con las preguntas de investigación, expectativas y objetivos de la tesis doctoral 297
6.2.1 Conclusiones relacionadas con la Expectativa General 1, Pregunta 1 y Objetivo General 1 297
6.2.2 Conclusiones relacionadas con: la Expectativa General 2; Pregunta 2,3 y 4; y Objetivo General 2 299
6.2.3 Conclusiones relacionadas con: la Expectativa General 3; Pregunta 5 y 4; y Objetivo General 3 302
6.3 Conclusiones en relación con los objetivos del programa 304
6.4 Limitaciones del estudio 306
6.5 Proyecciones y líneas futuras...309
6.6 Conclusión final 310
6.7 Recomendaciones finales..311
Para la formación docente...311
Para los centros y administraciones educativas 312

Para futuras investigaciones 313
CAPÍTULO 7. CONTRIBUCIONES DERIVADAS DE LA TESIS 314
7.1 Artículos 314
7.2 Contribución en Congresos 329
7.3 Formaciones 338
7.4. Implementación del modelo en asignaturas de Grado 341
7.5 Difusión del modelo y de la investigación a través de la Redacción UDIMA Media 343
REFERENCIAS 344
ANEXOS 363
Anexo I: Instrumentos de recogida de información. 363
Formulario inicial 363
Escala de Actitudes hacia las Matemáticas- EAM 363
Cuaderno de Bitácora 365
Anexo II. Transcripción de las sesiones. 367
Sesión 1 y sesión 2 368
Sesión 3 y sesión 4 378
Sesión 5 y sesión 6 396
Sesión 7 y sesión 8 411
Anexo III. Recursos utilizados en el programa 420
Anexo IV: Comité de Ética 441
Conformidad Comité de Ético de Investigación y Docencia de la Facultad de Educación 441
Conformidad del centro 443
Modelo de consentimiento informado maestras participantes 444
Anexo V: Dossier interactivo para las maestras 447

**Nota 1:* Durante este trabajo se ha intentado utilizar un lenguaje no sexista, pero para agilizar su lectura y comprensión del texto, se ha empleado el género masculino como forma genérica.

**Nota 2:* Para la elaboración de las citas y del apartado de Referencias se han seguido las directrices establecidas en el *Manual de Publicaciones de la American Psychological Association (APA), 7.ª edición, versión en español*.

RESUMEN

La educación matemática atraviesa un momento de creciente interés en la comunidad investigadora, especialmente en el campo de la didáctica. En este contexto se evidencia la necesidad de profundizar en los conocimientos vinculados a la formación permanente del profesorado de forma general, y la etapa de Educación Infantil en particular. A pesar de su relevancia como lenguaje universal que permite describir y construir el mundo, así como de su papel fundamental en el desarrollo de otras áreas del pensamiento matemático, una de las áreas menos exploradas en este campo es la geometría.

El sistema educativo actual orienta su normativa curricular hacia adquisición de competencias desde un enfoque centrado en la comprensión activa y significativa del aprendizaje. Este planteamiento exige que el profesorado disponga de una base sólida de conocimientos disciplinares y didácticos que permita planificar y desarrollar procesos de enseñanza adecuados. En el ámbito de la geometría, el modelo de Van Hiele constituye un referente teórico-didáctico de especial relevancia, al facilitar el desarrollo de las competencias geométricas y ofrecer un marco estructurado para la práctica docente, orientando los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este contexto, la presente tesis doctoral persigue dos propósitos principales. En primer lugar, llevar a cabo un estudio documental sistemático del modelo de Van Hiele, con el objetivo de identificar tendencias, vacíos y posibles líneas de aplicación en la formación del profesorado. En segundo lugar, diseñar, implementar y analizar un programa formativo fundamentado en dicho modelo, dirigido a 23 maestras en activo de Educación Infantil, con el fin de describir y comprender la evolución de sus competencias geométricas.

El estudio planteado adopta un enfoque cualitativo de carácter fenomenológico-hermenéutico, recogiendo datos mediante observación, transcripción y análisis de producciones con el objetivo de explorar, describir y comprender en profundidad las experiencias vividas por las participantes.

Los hallazgos cualitativos muestran que, partiendo mayoritariamente de los niveles 1 (visualización) y 2 (análisis) del modelo Van Hiele, las maestras consolidaron el nivel 2 (análisis) y progresaron hacia el nivel 3 (deducción informal). Este desarrollo evidenció

cambios significativos en la forma de describir y justificar propiedades geométricas, contribuyendo a la mejora de su competencia geométrica.

La presente tesis doctoral aporta una doble contribución a la comunidad investigadora del área de Didáctica de las Matemática, por un lado, presenta un análisis bibliométrico que examina las publicaciones sobre el modelo Van Hiele en España. Por otro lado, ofrece evidencias empíricas sobre la eficacia de un programa formativo breve y estructurado para la mejora del razonamiento geométrico de un grupo de maestras de Educación Infantil, confirmando el valor del modelo Van Hiele como herramienta procesual para la programación y planificación de experiencias de enseñanza-aprendizaje en geometría.

Finalmente, esta investigación pretende contribuir en la mejora de la formación del profesorado, fortaleciendo su dominio conceptual y metodológico, y facilitando el acceso a herramientas didácticas transferibles a la práctica educativa. Asimismo, ofrece orientaciones para el diseño de programas de formación continua en geometría y para el desarrollo de futuras investigaciones en este campo.

Palabras clave: geometría; formación permanente del profesorado; maestras en activo, Educación Infantil; modelo Van Hiele, educación matemática; estudio de caso.

ABSTRACT

Mathematics education is attracting increasing attention within the research community, particularly in the field of mathematics education. In this context, there is a growing need to deepen our understanding of continuing professional development for teachers in general, and for those working in Early Childhood Education in particular. Despite its relevance as a universal language for describing and constructing the world, as well as its fundamental role in the development of other areas of mathematical thinking, geometry remains one of the least explored domains in this field.

Current educational systems emphasise competence-based curricula grounded in active and meaningful learning. This approach requires teachers to possess a solid foundation of both content knowledge and pedagogical knowledge, enabling them to effectively plan and implement teaching processes. In the field of geometry, the Van Hiele model represents a highly relevant theoretical and didactical framework, as it supports the development of geometric thinking and provides a structured approach to teaching and learning.

Within this framework, this doctoral thesis pursues two main objectives. First, to conduct a systematic literature review of the Van Hiele model in order to identify research trends, gaps, and potential applications in teacher education. Second, to design, implement, and analyse a training programme based on this model, involving 23 in-service Early Childhood Education teachers, with the aim of describing and understanding the development of their geometric thinking.

The study adopts a qualitative, phenomenological-hermeneutic approach, collecting data through observation, transcription, and analysis of participants' productions in order to explore and interpret their lived experiences in depth.

The findings indicate that, although participants initially operated mainly at levels 1 (visualisation) and 2 (analysis) of the Van Hiele model, they consolidated level 2 and progressed towards level 3 (informal deduction). This progression was reflected in significant changes in the way they described and justified geometric properties, contributing to the development of their geometric thinking.

This doctoral thesis makes a twofold contribution to the field of Mathematics Education. On the one hand, it presents a bibliometric analysis of research on the Van Hiele model in Spain. On the other hand, it provides empirical evidence on the effectiveness of a short, structured training programme in enhancing the geometric reasoning of a group of Early Childhood Education teachers, highlighting the value of the Van Hiele model as a process-oriented tool for designing and planning teaching and learning experiences in geometry.

Finally, this research contributes to the improvement of teacher education by strengthening teachers' conceptual and methodological knowledge and by providing transferable didactical tools for classroom practice. It also offers guidelines for the design of continuing professional development programmes in geometry and for future research in this area.

Keywords: geometry; teacher professional development; in-service teachers; Early Childhood Education; Van Hiele model; mathematics education; case study.

INTRODUCCIÓN

Vivimos en una sociedad caracterizada por la tecnificación, la globalización y el acceso inmediato a grandes cantidades de información y la irrupción constante de nuevas herramientas digitales, destacando la inteligencia artificial generativa. Este contexto presenta grandes oportunidades para el aprendizaje y la comunicación, pero también plantea desafíos relevantes, como la difusión de información no verificada y la dificultad para distinguir entre contenidos fiables e información no veraz (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, 2025). Frente a este escenario, la capacidad para comprender, analizar y utilizar el conocimiento matemático se convierte en un elemento esencial para la ciudadanía, ya que proporciona instrumentos de razonamiento lógico, pensamiento crítico y resolución de problemas que son necesarios para desenvolverse en la vida personal, profesional y social, tal y como señala el *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], (2000) de Estados Unidos. En esta línea, Rodríguez Rincón et al. (2024) destacan el potencial valor del modelo Van Hiele para promover el desarrollo de las competencias geométricas (en este trabajo, el término "competencias geométricas" se entiende como el conjunto de conocimientos, habilidades y procesos implicados en la comprensión, uso y aplicación de la geometría, en estrecha relación con el desarrollo del razonamiento geométrico.), contribuyendo así al cumplimiento del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4, *Educación de Calidad*, recogido en la Agenda 2030.

Si se reconoce que las competencias matemáticas constituyen una condición básica para la participación activa y crítica en la sociedad actual, resulta indispensable promover su adquisición desde las primeras etapas educativas. Entre estas primeras competencias, la geometría posee un papel fundamental, pues el desarrollo del pensamiento espacial permite al estudiantado enfrentar de manera eficaz situaciones del mundo contemporáneo mediante el uso de estrategias de visualización, representación y razonamiento lógico-espacial (Crompton y Ferguson, 2024). Diversos estudios subrayan que las bases del pensamiento matemático se consolidan durante la etapa de Educación Infantil y que las experiencias tempranas ricas y significativas favorecen no solo el rendimiento académico futuro, sino también actitudes positivas hacia la matemática (Alsina, 2017; Clements y Sarama, 2009). Por tanto, la enseñanza de las matemáticas en esta etapa no puede reducirse a propuestas aisladas y meramente lúdicas o anecdóticas, sino que ha de concebirse como un proceso competencial que integre contenidos, procesos, actitudes y lenguaje matemático (Alsina, 2019).

En este contexto, la enseñanza de las matemáticas en la etapa de Educación Infantil enfrenta al reto de ofrecer experiencias significativas y variadas que impulsen el desarrollo del pensamiento lógico y espacial del alumnado. En este proceso, la geometría adquiere un lugar destacado. Lejos de ser un contenido meramente formal que deba posponerse a cursos posteriores, la geometría en Infantil favorece el desarrollo de la visualización, orientación espacial, descripción y clasificación de formas, que son la base del pensamiento matemático avanzado y constituye un contenido esencial para la construcción del razonamiento espacial, la percepción de formas y la comprensión del entorno (Clements y Battista, 1992). Además, proporciona un espacio privilegiado para fomentar la comunicación oral y la argumentación, competencias de creciente relevancia en una sociedad en la que se valora y demanda la capacidad de explicar y justificar las propias ideas y la capacidad de tomar decisiones fundamentadas (Alsina, 2017).

Sin embargo, la literatura muestra que la geometría ha recibido una atención limitada frente a otros contenidos matemáticos, y que el profesorado de Educación Infantil presenta carencias tanto en conocimientos geométricos como en estrategias didácticas, lo que dificulta el proceso de enseñanza, generando sentimientos de inseguridad a la hora de diseñar o enfrentarse a actividades significativas de geometría para su alumnado (Alsina, 2017; Clements y Sarama, 2009; Sánchez González et al., 2024a). Ante esta situación, la formación docente se revela como un factor decisivo para mejorar la calidad de la enseñanza de la geometría y garantizar propuestas didácticas rigurosas, significativas y ajustadas a las necesidades del alumnado en sus primeras experiencias con el conocimiento matemático.

La literatura distingue entre la formación inicial y la formación permanente, siendo esta última una oportunidad clave para actualizar y profundizar en aquellos contenidos que no han sido suficientemente abordados durante la etapa universitaria o en la práctica profesional. Este hecho adquiere especial relevancia cuando se analiza la enseñanza de la geometría en los niveles iniciales de escolarización, área que representa un desafío pedagógico tanto por su potencial para el desarrollo del pensamiento lógico-espacial como por las dificultades históricas que ha presentado en relación con su comprensión, enseñanza y evaluación (Baroody et al., 2019; Watts et al., 2018).

En este contexto, diversos estudios realizados en España han analizado la situación de la formación inicial en el área de Didáctica de las Matemáticas en los grados universitarios que habilitan para ejercer como maestros de Educación Infantil (Alsina, 2020a; Nolla et al., 2021). Estas investigaciones evidencian la preocupación por la escasa presencia de asignaturas vinculadas a esta área de conocimiento, que se ofertan en los Grados de Educación Infantil de las universidades españolas, así como por la dispersión y ambigüedad en los contenidos recogidos en los programas formativos (Méndez et al., 2021).

El plan de estudios del Grado de Maestro en Educación Infantil vigente en España se encuentra regulado por la Orden Ministerial ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, la cual establece los requisitos para la verificación de los títulos que habilitan el ejercicio profesional. Los créditos de los planes de estudio destinados a la Didáctica de la Matemática oscilan entre 6 ECTS y 15 ECTS, lo que representa un rango entre el 2.5 % y el 6.25 % del total de créditos (240 ECTS).

Asimismo, en la mencionada normativa, dentro del módulo dedicado a las didácticas específicas, se establece que el futuro docente debe "conocer estrategias didácticas para desarrollar representaciones numéricas y nociones espaciales, geométricas y de desarrollo lógico" (Orden Ministerial ECI/3854/2007, p. 53737). Además, entre los objetivos generales de la titulación, se incluye la necesidad de que el profesorado asuma que el ejercicio docente requiere perfeccionamiento continuo y adaptación a los cambios científicos, pedagógicos y sociales, así como el conocimiento de los objetivos, contenidos curriculares y criterios de evaluación de la Educación Infantil (Orden Ministerial ECI/3854/2007, p. 53736).

El Real Decreto 95/2022, del 2 de febrero de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil en España, organiza el aprendizaje del alumnado de esta etapa en tres áreas globalizadoras (*Crecimiento en Armonía; Descubrimiento y Exploración del Entorno; y Comunicación y Representación de la Realidad*). Sin embargo, aunque estas áreas abordan el desarrollo global del niño, la contribución específica de los saberes matemáticos no se presenta de manera explícita y muestra lagunas significativas respecto a la presencia y concreción de los contenidos geométricos, numéricos, de medida y estadísticos. Esta falta de claridad contrasta con los avances de la investigación contemporánea en educación matemática infantil, que subraya la necesidad de un tratamiento sistemático, progresivo y didácticamente fundamentado de dichos contenidos desde edades tempranas (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022).

El currículo vigente transfiere al profesorado la responsabilidad de concretar los aprendizajes matemáticos dentro de estas áreas globalizadas. No obstante, tal como se ha señalado en apartados anteriores, la formación inicial de los maestros de Educación Infantil presenta limitaciones en cuanto a la profundización de conocimientos matemáticos y didácticos específicos, debido a su carácter principalmente generalista. En consecuencia, la escasa preparación en esta área dificulta que el profesorado disponga de criterios sólidos para tomar decisiones curriculares fundamentadas.

En relación con las necesidades de formación, el Comité Español de Matemáticas (CEMat,2021) propone que el profesorado de Educación Infantil debe ser capaz de promover el desarrollo de los cinco sentidos matemáticos: algebraico, espacial, estocástico, de la medida y numérico (*Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*). No obstante, la carga reducida de asignaturas de didáctica de la matemática en los planes de estudio dificulta la adquisición de competencias suficientes para afrontar este reto profesional.

Los resultados de investigaciones recientes, tanto en España como en otros países y en concreto, Estados Unidos, han permitido sistematizar y organizar el conocimiento matemático adecuado para la etapa de Educación Infantil. Estos estudios demuestran que la formación del profesorado es un factor determinante para garantizar una enseñanza de calidad y para favorecer el éxito académico futuro de los estudiantes, especialmente en Infantil y Primaria, donde se consolidan los cimientos del pensamiento matemático (Alsina, 2020b). En consecuencia, la formación continua en esta área se convierte en una necesidad urgente para el profesorado, particularmente en etapas de carácter generalista, como es la Educación Infantil.

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) de Estados Unidos, organismo integrado por profesionales dedicados a la enseñanza y la investigación en educación matemática, desarrolló un marco de referencia compuesto por principios, estándares y ejes curriculares que se apoyan en la evidencia científica sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este marco, ampliamente reconocido a nivel internacional, ha contribuido a consolidar un consenso global acerca de los objetivos, enfoques y criterios didácticos que deben orientar la educación matemática en las distintas etapas del sistema educativo.

En este sentido, el NCTM (2003) distingue dos tipos de estándares aplicables a todos los niveles educativos, incluida la Educación Infantil: los estándares de contenido, entre los que se incluye la geometría, y los estándares de proceso, que destacan la relevancia de las formas en que se construye, comunica y valida el conocimiento matemático. Estos últimos comprenden cinco procesos interrelacionados: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación, consideradas pilares esenciales para el desarrollo de un pensamiento matemático significativo desde las primeras edades.

El Comité Español de Matemáticas (CEMat, 2021) plantea que los nuevos desafíos a los que se enfrenta el profesorado de Educación Infantil están vinculados, por un lado, con la necesidad de reconocer y poner en valor el conocimiento disciplinar asociado a los distintos sentidos matemáticos y su relevancia en el desarrollo integral del alumnado; y, por otro, con la capacidad de seleccionar y utilizar recursos didácticos adecuados a las características y necesidades propias de esta etapa educativa. Aunque los planes de formación inicial presentan limitaciones temporales y curriculares, esta realidad exige compensar las carencias formativas que puedan derivarse de una preparación insuficiente en el ámbito de la educación matemática.

En este contexto, Berciano (2023) destaca que uno de los objetivos centrales de la formación inicial del profesorado de Educación Infantil debería ser que, al finalizar sus estudios, los futuros docentes sean capaces de desarrollar un proceso de metacognición sobre su propio aprendizaje de la didáctica de las matemáticas. Esta reflexión debería permitirles reconocer sus necesidades formativas y planificar acciones de formación continua que favorezcan su desarrollo profesional en esta área. Dichas acciones deberían atender, según Hill et al. (2008), a las dos grandes dimensiones que configuran la formación docente: la disciplinar y la didáctica.

Es evidente que el profesorado de Educación Infantil (alumnado entre 0-6 años) debe dar respuesta a una realidad educativa cada vez más compleja y exigente. Entre sus responsabilidades se encuentra tomar decisiones fundamentadas respecto a cuestiones como qué contenido matemático enseñar, por qué y para qué enseñarlo, en qué momento introducirlo, cómo secuenciarlo y con qué enfoque abordarlo. La formulación y resolución de estas preguntas no constituye una tarea trivial, sino un proceso que requiere criterios teóricos claros y conocimiento especializado. En este sentido, la Didáctica de la Matemática se presenta como el área disciplinar capaz de ofrecer respuestas fundamentadas, proporcionando marcos conceptuales y herramientas metodológicas que orientan la toma de decisiones docentes (Ball y Bass, 2000).

Numerosos autores destacan que la calidad de la enseñanza está estrechamente vinculada con el conocimiento disciplinar y didáctico que posee el profesorado, especialmente en etapas iniciales como la Educación Infantil (Carrillo et al., 2018; Clements y Sarama, 2011; Ma, 2011; Muñoz-Catalán et al., 2022). Por ello, desarrollar una formación docente que integre estos saberes resulta imprescindible para promover experiencias matemáticas significativas desde los primeros años de escolaridad. No obstante, asumir este enfoque implica transformaciones tanto en las creencias como en las prácticas del profesorado, y exige contar con un conocimiento sólido de la matemática elemental que permita comprender los contenidos en profundidad y enseñar de manera eficaz.

Esta situación evidencia la necesidad de fortalecer tanto la formación inicial como la formación permanente del profesorado de Educación Infantil en el ámbito de las matemáticas, y de manera particular, en el desarrollo del sentido geométrico. En el estudio realizado por Alsina (2020a) En el contexto español, se observa que los planes de estudio del Grado en Maestro de Educación Infantil incluyen asignaturas relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas (aunque con diferentes denominaciones dependiendo de las propias universidades); sin embargo, su carga lectiva es reducida. En este sentido, los créditos destinados a esta área oscilan entre 6 y 15 ECTS, lo que representa entre el 2.5 % y el 6.25 % del total del plan de estudios (240 ECTS). Además, la mayoría de las universidades analizadas (11 de 17) dedica únicamente 6 créditos, lo que confirma que la tendencia predominante en los títulos oficiales es asignar un peso mínimo a esta formación, sin contemplar una especialización específica en el área. Asimismo, se identifican casos en los que la formación en Didáctica de las Matemáticas no aparece de manera explícita en el plan de estudios, como ocurre en el Grado en Educación Infantil de Mondragon Unibertsitatea (Mondragon Unibertsitatea, s. f.).

Como consecuencia, el énfasis formativo suele centrarse en contenidos aritméticos o en enfoques metodológicos de carácter general, relegando la enseñanza y el aprendizaje de la geometría a un lugar secundario. Esta situación dificulta la adquisición de conocimientos disciplinares y didácticos que permitan al profesorado planificar experiencias geométricas significativas para el alumnado.

Desde el marco normativo, la Ley Orgánica 3/2020, de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE), destaca la importancia de promover desde las primeras etapas educativas el desarrollo de competencias matemáticas básicas, y establece que la formación del profesorado debe orientarse a garantizar la adquisición de estas competencias (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2020). Sin embargo, a pesar de este marco regulador, la oferta de programas específicos de formación continua centrados en la enseñanza de la geometría en Educación Infantil continúa siendo limitada y fragmentaria. Esta escasez dificulta una actualización docente sistemática y coherente, especialmente en un ámbito que requiere conocimientos disciplinares sólidos y propuestas didácticas fundamentadas (Alsina, 2019).

El interés por la formación permanente del profesorado es muy antiguo, pero la preocupación por saber cómo, de qué modo, con qué modelos y la consciencia de que este conocimiento debe analizarse y actualizarse es mucho más reciente si lo comparamos con otros ámbitos de investigación y evaluación educativa. En el estudio de Manzanares Moya y Galván- Bovaira (2012) se pone de manifiesto la escasez de investigaciones sobre este tipo de experiencias en el panorama educativo español, así como la necesidad de construir una cultura de centro vinculada a una cultura de formación, concretada en itinerarios formativos coherentes con la identidad pedagógica de cada institución.

En esta línea, los autores identifican trabajos centrados en ámbitos de intervención específicos (Comunidad de Madrid, 2019; Imbernón, 1998), pero destacan la limitada presencia de experiencias de colaboración entre las estructuras de formación continua y los centros responsables de la formación inicial del profesorado, aspecto que apenas ha sido abordado en la investigación (Dios Montes y de Villar Álvarez, 2004).

Por tanto, la presente tesis doctoral aborda la formación de un grupo de maestras de Educación Infantil pertenecientes a un mismo centro educativo, utilizando para su diseño y puesta en marcha el modelo Van Hiele. Este modelo de razonamiento geométrico, ampliamente validado internacionalmente, se compone de dos elementos principales. Tal y como señalan los autores Jaime y Gutiérrez (1990), la primera parte es de carácter descriptivo, ya que identifica una secuencia jerárquica de tipos de razonamiento denominados "*Niveles de Razonamiento*", a través de los cuales la capacidad de razonamiento de los individuos progresa desde que se inician en su aprendizaje hasta que alcanzan un desarrollo intelectual en este campo. La segunda parte del modelo facilita al profesorado las directrices sobre cómo pueden ayudar al alumnado para alcanzar con más facilidad los niveles, por medios de las "*Fases de Aprendizaje"*. Estas fases constituyen una guía para planificar experiencias educativas que favorezcan el desarrollo del razonamiento geométrico de manera gradual y fundamentada.

Aunque el modelo Van Hiele ha sido aplicado tradicionalmente al aprendizaje del alumnado, se recalca que diversas investigaciones (Alsina, 2017; Jaime y Gutiérrez, 1995) destacan su potencial para estructurar programas de formación docente, permitiendo no solo diagnosticar el nivel de razonamiento geométrico de maestras y maestros, sino también diseñar itinerarios formativos ajustados a sus necesidades específicas.

Alsina (2019, 2020a, 2020b) subraya que, en el marco de la investigación en educación matemática infantil, una de las líneas de investigación que requiere mayor atención es el análisis de conocimientos que un profesional debe tener para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea lo más idónea posible y de calidad. Sin embargo, diversos estudios han puesto de manifiesto que una parte significativa del profesorado de esta etapa presenta dificultades para superar el enfoque centrado exclusivamente en el reconocimiento visual de las figuras geométricas, lo cual limita su capacidad para promover en el alumnado una comprensión más profunda, analítica y estructurada de los conceptos espaciales.

Este problema se ve intensificado por dos factores: por un lado, la escasa presencia de formación específica en geometría dentro de los planes de formación inicial; y, por otro, la falta de modelos didácticos que respondan a las particularidades cognitivas y metodológicas propias de esta etapa educativa. En conjunto, estas limitaciones dificultan que los futuros docentes desarrollen competencias sólidas para diseñar y gestionar experiencias geométricas significativas en Educación Infantil.

Partiendo de estas premisas, la presente tesis doctoral adopta dos enfoques complementarios. En primer lugar, se realiza un estudio documental sistemático sobre las publicaciones españolas vinculadas al modelo Van Hiele, con el propósito de identificar tendencias, vacíos y oportunidades de aplicación en la formación del profesorado. En segundo lugar, se desarrolla un estudio de caso centrado en la formación geométrica de un grupo de 23 maestras de Educación Infantil, que han participado de forma voluntaria, pertenecientes a un centro educativo de la Comunidad de Madrid.

Para la intervención con la muestra, se obtuvieron previamente las autorizaciones pertinentes del Comité de Ética del Departamento de Educación de la Universidad a Distancia de Madrid (UDIMA), del Equipo Directivo del centro educativo y de las propias participantes, garantizando así el cumplimiento de los principios éticos de la investigación educativa.

Con el fin de analizar sus percepciones y actitudes hacia esta área del conocimiento, se empleó la "*Escala Actitud ante las Matemáticas-EAM"* elaborada por *Auzmendi* (1992). La fase diagnóstica se completa mediante la elaboración de un cuestionario inicial en Google Forms, basado en el modelo adaptado de Shavelson y Stern (1981/1983). Este instrumento permitió recoger información relativa a percepciones y conocimientos vinculados a la educación matemática en general y a la geometría en particular, además de obtener datos sociodemográficos y profesionales de las participantes.

El programa formativo titulado *"Tocando la geometría"* consistió en la implementación de ocho sesiones de una hora de duración cada una. Su diseño se elaboró atendiendo a las cinco Fases de Aprendizaje propuestas por el modelo, incorporando principalmente actividades manipulativas orientadas al desarrollo de diferentes dimensiones geométricas y para favorecer el tránsito entre los Niveles de Razonamiento geométrico del profesorado participante.

El presente trabajo se configura como un estudio de caso cuyo propósito es analizar en profundidad el desarrollo del razonamiento geométrico en un grupo de maestras de Educación Infantil, a partir de una intervención formativa basada en el modelo Van Hiele. La investigación adoptó un enfoque cualitativo de carácter fenomenológico-hermenéutico, lo que permitió explorar e interpretar en profundidad las experiencias formativas vividas por las maestras.

Este tipo de investigación resulta especialmente pertinente cuando se pretende examinar fenómenos educativos situados en un contexto real, en el que los límites entre el fenómeno de estudio y el entorno en el que se producen no están claramente definidos (Guevara et al., 2020; Stake, 1995). El estudio de caso se caracteriza por el análisis exhaustivo de una o varias unidades con el fin de comprender sus dinámicas internas, los procesos de cambio que experimentan y los significados que construyen sus protagonistas. En este sentido, su aplicación resulta adecuada para profundizar en las prácticas, concepciones y experiencias de las maestras participantes en torno a la geometría, favoreciendo una comprensión integral de los factores que inciden en su desarrollo profesional en este ámbito.

Asimismo, esta investigación se sustenta en un enfoque fenomenológico, cuyo objetivo es describir y comprender la experiencia vivida por las maestras durante el proceso formativo (Van Manen, 1998). Este enfoque se complementa con una perspectiva hermenéutica, que permite interpretar los significados y sentidos que emergen a lo largo de dicha experiencia. La combinación de ambos enfoques posibilita una comprensión integral de los procesos que tienen lugar en el grupo de maestras a medida que construyen y transforman su razonamiento geométrico, atendiendo tanto a lo que experimentan como a las interpretaciones que elaboran sobre su propio aprendizaje. Para la recogida de datos se utilizaron escalas, formularios y cuestionarios, así como técnicas de observación y análisis de producciones generadas durante el proceso formativo (Creswell y Poth, 2018).

Esta investigación pretende contribuir a cubrir el vacío existente en la literatura sobre formación permanente específica en geometría para maestras de Educación Infantil, evidenciando el potencial del modelo Van Hiele como guía metodológica para el desarrollo profesional docente. Los resultados obtenidos ofrecen orientaciones relevantes para el diseño de futuras intervenciones formativas y para la mejora de la enseñanza de la geometría en las primeras etapas educativas, favoreciendo la construcción de experiencias pedagógicas fundamentadas y coherentes con las necesidades reales del profesorado.

Este diseño descriptivo responde a la necesidad de generar evidencia empírica acerca de cómo es posible mejorar el razonamiento geométrico del profesorado de Educación Infantil mediante intervenciones formativas breves y estructuradas. Además, ofrece un marco metodológico replicable que puede constituir la base para futuras investigaciones y para el desarrollo de programas de formación docente orientados a esta área específica del conocimiento matemático. El análisis se ha llevado a cabo utilizando el software Microsoft Excel365 (v.2510) y el programa de análisis cualitativo MaxQDA (v.24.9.1) para el procesamiento y codificación de los datos cualitativos.

Finalmente, con el propósito de orientar al lector, se ofrece a continuación un breve resumen de la estructura de la tesis. La información contenida en este trabajo se organiza en siete capítulos que se resumen a continuación:

En el *Capítulo 1* se contextualiza el tema de investigación y se presentan las expectativas del estudio, las preguntas de investigación y los objetivos generales y específicos que orientan el trabajo.

El *Capítulo 2* desarrolla el marco teórico, abordando la formación docente en matemáticas, la educación matemática en la etapa infantil, la enseñanza de la geometría en Educación Infantil y el modelo Van Hiele. Este modelo constituye uno de los pilares conceptuales de la investigación, por lo que se realiza una revisión sistemática de producciones científicas en torno a su uso. Esta revisión permite identificar una laguna respecto a estudios centrados en la formación geométrica de maestros en activo de Educación Infantil y en el desarrollo de su competencia geométrica. Asimismo, se analiza la importancia de conocer las percepciones del profesorado respecto a la enseñanza de la geometría antes de recibir formación formal en su propio centro educativo. El capítulo concluye con una reflexión sobre los distintos enfoques didácticos para la enseñanza de las matemáticas, con especial atención a la geometría, y se valora el papel del currículo tanto en los planes de estudio del Grado en Educación Infantil como en el Real Decreto vigente que regula esta etapa educativa.

En el *Capítulo 3* se describe la metodología de la investigación, detallando el diseño del estudio de caso, el enfoque fenomenológico-hermenéutico adoptado y la estructura del programa formativo. se explica la elaboración, aplicación y tratamiento de los cuestionarios y del resto de instrumentos, así como el diseño y desarrollo de las sesiones formativas. Finalmente, se describe el procedimiento de análisis de la información.

En el *Capítulo 4* se presenta el programa de formación "*Tocando la geometría"* describiendo sus objetivos, fundamentos, fases y actividades de implementación.

En el *Capítulo 5* se exponen los resultados obtenidos a partir del enfoque fenomenológico-hermenéutico, interpretando el proceso de desarrollo del razonamiento geométrico de las maestras participantes.

En el *Capítulo 6* recoge las conclusiones a partir de los principales hallazgos del estudio y sus aportaciones a la formación docente en geometría. Se señalan también las limitaciones de la investigación y se proponen futuras líneas de trabajo derivadas de los resultados obtenidos.

El trabajo concluye con el *Capítulo 7*, que recoge las publicaciones derivadas del estudio, las formaciones y su difusión.

Completan la Memoria de la tesis el apartado de las *Referencias* utilizadas y cinco volúmenes de *Anexos*, donde se recogen los instrumentos empleados en la recogida de información (Anexo I); las transcripciones de las sesiones (Anexo II); los recursos utilizados en el programa (Anexo III) y los documentos del Comité de Ética; (Anexo IV). Por último, un dossier interactivo para las maestras (Anexo V).

CAPÍTULO 1: TEMA DE ESTUDIO

En este capítulo se presenta una contextualización general del tema de investigación que fundamenta el desarrollo del presente estudio, situándolo en el marco teórico y educativo en el que se inscribe. Asimismo, se exponen las expectativas que orientan la investigación, junto con las preguntas de investigación y los objetivos generales y específicos que guían el trabajo y delimitan su alcance.

1.1 Contexto y motivación del tema de estudio

La presente tesis doctoral parte de la premisa de que *para enseñar geometría es requiere una comprensión profunda de esta área de conocimiento*. El conocimiento profesional del docente constituye un componente esencial del proceso de enseñanza y aprendizaje en cualquier etapa educativa; sin embargo, en Educación Infantil adquiere una relevancia particular, ya que se sientan las bases del pensamiento matemático que influirá en el futuro académico de los estudiantes. En este sentido, la geometría, entendida como una forma de interpretar, representar y describir el entorno, resulta clave para la alfabetización matemática temprana.

El origen de este estudio se vincula a la experiencia profesional acumulada durante doce años como maestra de Educación Infantil, así como al trabajo desarrollado posteriormente como docente universitaria en el Grado de Magisterio en Educación Infantil, impartiendo la asignatura *Desarrollo del pensamiento lógico-matemático y su didáctica*. Durante mi trayectoria como tutora de aula, la necesidad de mejorar mi propia práctica docente me llevó a profundizar en la didáctica de las matemáticas, con el propósito de superar un modelo basado únicamente en la reproducción de experiencias recibidas durante mi escolaridad. Este proceso formativo permitió reconocer no solo el potencial transformador de una enseñanza matemática fundamentada, sino también la existencia de carencias relevantes en la formación inicial del profesorado de Educación Infantil, especialmente en lo que respecta al conocimiento geométrico y a su enseñanza.

Esta toma de conciencia impulsó una iniciativa de trabajo colectivo dentro del centro educativo en el que ejercía: se organizaron actividades de formación interna para el claustro, se creó un departamento de matemáticas y se diseñó una línea común de actuación para la enseñanza de esta área en toda la etapa. La experiencia reveló el interés del profesorado por mejorar su competencia didáctica en matemáticas, pero también puso de manifiesto la ausencia de herramientas específicas y modelos que orientaran su desarrollo profesional.

De este recorrido personal y profesional surge la motivación de la presente investigación: explorar cómo el conocimiento geométrico de maestras de Educación Infantil puede desarrollarse mediante un programa formativo basado en el modelo Van Hiele, y aportar evidencias que contribuyan al diseño de propuestas sistemáticas para fortalecer la formación continua en esta área.

Fernández Bravo (2021) señala que enseñar implica partir del cerebro del que aprende, esta máxima invita a atender los procesos cognitivos de quienes aprenden, también cuando quienes aprenden es el propio profesorado. Bajo esta perspectiva, surge la necesidad de comprender cómo piensan, qué saben y qué necesitan aprender las maestras de Educación Infantil para desarrollar su razonamiento geométrico. En coherencia con ello, a continuación, se presentan las preguntas de investigación que guían este estudio.

1.2 Expectativas y Preguntas de investigación

Al tratarse de un estudio de caso con enfoque cualitativo, no se formula una "hipótesis" tipo (causa–efecto). En su lugar, se plantean supuestos de partida o "expectativas" que orientan la mirada investigadora, así como un conjunto de preguntas de investigación que guían la exploración del fenómeno estudiado.

Expectativa general 1

EG1: El estudio se sustenta en el supuesto de que la investigación sobre el modelo Van Hiele en el contexto español es abundante en los niveles de Primaria y Secundaria pero escasa en la formación del profesorado en etapas iniciales.

Expectativa general 2

EG2: El estudio se sustenta en el supuesto de que la implementación de un programa formativo breve y estructurado, fundamentado en las Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele y en actividades manipulativas de geometría en distintas dimensiones, puede favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico. Se espera que este proceso permita avanzar hacia niveles superiores del modelo.

Expectativas específicas derivadas del supuesto

EE2.1: Se prevé que el diagnóstico inicial evidencie un nivel de razonamiento geométrico elemental en la mayoría de las maestras participantes, situado predominantemente en los niveles 1 y 2 del modelo Van Hiele.

EE2.2: Se espera que la secuencia de actividades diseñada a partir de las fases del modelo Van Hiele favorezca progresiones hacia niveles superiores de razonamiento (niveles 3 y 4), con variaciones derivadas de la trayectoria formativa individual de cada participante.

EE2.3: Se anticipa que las actividades manipulativas, junto con el trabajo colaborativo, contribuyan al desarrollo de un lenguaje geométrico compartido y al intercambio de estrategias vinculadas a la enseñanza de esta área.

Expectativa general 3

EG3: El estudio se sustenta en el supuesto de que una formación docente fundamentada en evidencias empíricas generadas por la investigación en didáctica de las matemáticas contribuye de manera significativa a la mejora y optimización de los procesos de aprendizaje del alumnado".

Preguntas centrales de investigación

La presente tesis doctoral se organiza en dos grandes fases complementarias. En coherencia con ello, las siguientes preguntas de investigación se estructuran en dos bloques diferenciados: un primer bloque centrado en el estudio documental, y un segundo bloque relacionado con el estudio de caso y el impacto del programa formativo. Cada bloque se articula a partir de una pregunta central, acompañada de preguntas derivadas que la delimitan y precisan.

Bloque 1. Revisión documental

P1: ¿Qué estudios se han realizado en España sobre el modelo Van Hiele y su aplicación en la formación del profesorado, especialmente en Educación Infantil?

P1.1: ¿Cuántas publicaciones se han identificado y en qué periodos se han realizado?

P1.2: ¿Qué temáticas, enfoques metodológicos y contextos educativos abordan estos estudios?

P1.3: ¿Qué tendencias, vacíos y oportunidades se identifican en la investigación?

Bloque 2. Estudio de caso

P2: ¿Cuál es el nivel de razonamiento geométrico de las maestras participantes según el modelo Van Hiele?

P2.1: ¿En qué nivel del modelo Van Hiele se sitúa las maestras al inicio del programa?

P2.2: ¿En qué nivel del modelo Van Hiele se sitúa las maestras al final del programa?

P3.: ¿Qué concepciones y actitudes manifiestan hacia la geometría y su enseñanza antes de la intervención?

P4: ¿Cómo se desarrolla la experiencia formativa de las maestras a través de las Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele?

P4.1. ¿Qué actividades se realizaron y qué respuestas e interacciones generaron en las participantes?

P4.2. ¿Qué dificultades y progresos se observaron durante las distintas fases del programa?

P5: ¿Qué implicaciones tienen los resultados del estudio para la formación inicial y permanente del profesorado de Educación Infantil en geometría?

P5.1. ¿Qué necesidades formativas emergen de los resultados obtenidos?

P5.2. ¿Qué elementos del programa podrían incorporarse a planes formativos docentes?

P5.3. ¿Qué orientaciones se derivan para futuras investigaciones educativas en geometría?

Desde esta perspectiva, no solo surge el interés por comprender cómo aprende el profesorado, sino también la necesidad de generar conocimiento que permita mejorar su formación en geometría desde evidencias empíricas y propuestas didácticas fundamentadas.

1.3 Justificación

La literatura reciente muestra un creciente interés por el desarrollo profesional docente en matemáticas, sin embargo, los estudios coinciden en señalar que la formación continua específica en geometría es todavía escasa y que muchas de las iniciativas existentes tienen carácter puntual y poco sistemático (Alsina, 2017; Clements y Sarama, 2009), y en particular, en lo que respecta a la mejora del conocimiento geométrico de las maestras de Educación Infantil.

Esta investigación pretende contribuir, por un lado, a poner de manifiesto la situación actual del sentido geométrico del profesorado en activo de un centro educativo en la etapa de Educación Infantil, y por otro, proporcionar formación y contribuir a su mejora para que adquieran un mayor dominio de la materia, promoviendo e incentivando el trabajar la geometría con sus estudiantes de una forma más competencial a través de diversos recursos didácticos: manipulativos y tecnológicos.

La presente investigación se justifica por múltiples razones de orden teórico, didáctico y social. En primer lugar, estudios recientes como el de Ordóñez Martín-Caro et al. (2022); Clements y Sarama, (2011), arrojan pequeñas conclusiones, siendo una de las más claras el desajuste entre la formación del profesorado y la realidad en las aulas, respecto a la enseñanza de las matemáticas en las aulas de Educación Infantil, existiendo por tanto una brecha significativa en la formación geométrica del profesorado de Educación Infantil, lo que afecta directamente la calidad de las experiencias matemáticas que pueden ofrecer a su alumnado.

En el contexto internacional, algunos programas han mostrado el potencial de las intervenciones formativas de profesorado para fortalecer su razonamiento geométrico y sus competencias didácticas. Así, Fuys et al. (1988) diseñaron intervenciones basadas en el modelo Van Hiele para profesorado de distintos niveles educativos, encontrando mejoras significativas en su comprensión de conceptos geométricos. De manera similar, Clements y

Battista (1992) propusieron secuencias de actividades para profesorado que combinaban exploraciones manipulativas, discusión de propiedades y diseño de tareas para el alumnado.

En España, diversos autores han destacado la necesidad de reforzar la formación matemática del profesorado de Educación Infantil, con especial atención al área de geometría (Alsina, 2017). Se han llevado desarrollado experiencias de formación en centros educativos basadas en comunidades de práctica y reflexión conjunta, sin embargo, los estudios específicos centrados en geometría y en el uso explícito del modelo Van Hiele siguen siendo escasos. Las investigaciones de Gutiérrez y Jaime (1998); de Jaime y Gutiérrez (1995) constituyen referentes tempranos en la aplicación del modelo al profesorado, aunque su alcance ha sido limitado y su continuidad poco documentada.

A pesar de estos aportes, persisten vacíos relevantes. La mayoría de los estudios se han realizado sobre muestras reducidas, enfocadas en un aspecto concreto del conocimiento geométrico (p.ej., conocimiento de figuras planas, incluso de tan solo una figura) y rara vez incluyen evaluaciones longitudinales que permitan valorar el impacto de la formación en las prácticas de aula. Además, pocos estudios documentan con detalle cómo se implementan de forma concreta las fases del modelo Van Hiele en procesos de formación docente, y son aún menos los que abordan dicha implementación en el contexto específico de la Educación Infantil.

Por otro lado, aunque el modelo Van Hiele ha sido ampliamente validado en contextos escolares, son todavía escasos los estudios que abordan su aplicación en la formación del profesorado de etapas tempranas, especialmente desde un enfoque mixto que permita articular Niveles de Razonamiento con prácticas pedagógicas reales. Un antecedente relevante en el ámbito español lo constituye la tesis doctoral de López de Silanes (2012), cuyo trabajo alcanzó una notable repercusión y fue posteriormente publicado en formato de libro, lo que permitió dar continuidad a su impacto académico. Su investigación analizó de manera exhaustiva la enseñanza de la geometría en España desde Educación Primaria hasta Bachillerato, centrándose especialmente en el nivel de razonamiento geométrico del alumnado.

En los últimos años, el modelo Van Hiele se ha consolidado internacionalmente como una de las referencias teóricas más utilizadas para describir y promover el desarrollo del razonamiento geométrico, como muestran los estudios de Aravena y Caamaño (2013), Chavarría-Pallarco (2020); Fabres (2016) y Maguiña Rojas (2013). Sin embargo, en su mayoría, se centran mayoritariamente en alumnado de Educación Primaria y Secundaria, y apenas documentan experiencias sistemáticas de formación del profesorado de Educación Infantil.

En relación con el profesorado, cabe destacar la tesis de Afonso Martín (2003) en la que se analizó el nivel de razonamiento de acuerdo con el modelo Van Hiele, en profesorado de Educación Primaria y Secundaria en activo; así como la tesis de Escudero Dominguez (2024), que pone de relieve el valor del conocimiento del profesor sobre los contenidos y el uso del lenguaje en la enseñanza de los cuerpos geométricos por parte del profesorado de Educación Infantil, si bien se apoya en otro modelo teórico. Esta situación pone de manifiesto la necesidad de una revisión exhaustiva que permita conocer qué se ha investigado, con qué enfoques y cuáles son los vacíos existentes en la literatura española sobre el modelo Van Hiele y la formación del profesorado.

Al mismo tiempo, la mejora de la enseñanza de la geometría en Educación Infantil depende en gran medida de la formación del profesorado. Estudios como el de Escudero et al., (2021) ha evidenciado que las maestras presentan carencias tanto en el dominio de contenidos geométricos como en el manejo de estrategias didácticas específicas, y que la formación inicial resulta insuficiente para abordarlas de manera sólida y sistemática. En este contexto, la formación continua se convierte en una vía privilegiada para actualizar y fortalecer sus competencias profesionales en esta área.

Desde una perspectiva didáctica, comprender cómo piensan geométricamente las maestras resulta fundamental para diseñar propuestas formativas eficaces, adaptadas y ajustadas a sus necesidades reales y capaces de promover procesos de progresión conceptual. Asimismo, la triangulación entre instrumentos cuantitativos (como las pruebas de niveles geométricos), e instrumentos cualitativos (observaciones y transcripciones), constituye un enfoque metodológico enriquecedor que permite captar no solo el nivel alcanzado por las maestras participantes, sino también los procesos de cambio que experimentan a lo largo de la formación.

Tal y como señalan Barrera y Reyes (2015), el profesor debe crear un escenario favorable para que sus estudiantes alcancen niveles superiores de comprensión mediante una selección adecuada de problemas, es decir, tareas que supongan un reto intelectual y no solo dificultades procedimentales o de cálculo. Este planteamiento coincide con lo expuesto por

Van Hiele (1999), quien afirma que el progreso en el razonamiento geométrico depende de la variedad y calidad de las experiencias propuestas.

De manera complementaria, Alsina (2017) subraya que la riqueza de las tareas matemáticas que se ofrecen en la Educación Infantil está directamente relacionada con la formación del docente, quien necesita dominar los contenidos y su didáctica para diseñar experiencias que promuevan la comprensión profunda y el pensamiento espacial. En consecuencia, cuanto mayor sea la diversidad de problemas y situaciones geométricas que enfrenten los estudiantes, mayor será su oportunidad de construir conceptos significativos, siempre que el profesorado esté adecuadamente preparado para guiar ese proceso.

La formación del profesorado en matemáticas constituye un tema de especial relevancia en el campo de la investigación en educación matemática. En la última década, la didáctica de las matemáticas, particularmente en Educación Infantil, ha experimentado avances significativos, como evidencian los progresos en la producción científica del área (Alsina ,2019). No obstante, persisten importantes limitaciones en la preparación inicial del profesorado.

Entre los aspectos más críticos se encuentra la escasa carga horaria dedicada a la formación matemática en los estudios universitarios de Magisterio. Tal como señalan Ruiz y Bosch (2007), el número de horas destinadas a esta formación resulta insuficiente para afrontar las necesidades profesionales reales. Alsina (2020a) concluye que los créditos de los planes de estudio destinados a la Didáctica de la Matemática oscilan entre 6 ECTS y 15 ECTS, lo que representa un rango entre el 2.5 % y el 6.25 % del total de créditos (240 ECTS). La mayoría de las universidades analizadas (11 de 17) dedica 6 créditos del plan de estudios, lo que confirma que la tendencia predominante más generalizada en los títulos universitarios oficiales de Maestro en Educación Infantil en España es dedicar el 2.5 % del total de créditos total a esta área, y sin que exista una especialización específica en esta área. En consecuencia, el perfeccionamiento profesional queda mayoritariamente relegado a la iniciativa individual del profesorado a través de cursos de formación externa.

Ante esta situación, Alsina (2019) resalta la necesidad de investigar la delimitación del conocimiento y las destrezas necesarias para enseñar matemáticas en la etapa de Educación Infantil, considerando la naturaleza generalista de los profesores en este nivel. Esto plantea el reto de diseñar propuestas de formación continua que fortalezcan el conocimiento matemático-didáctico del profesorado desde una perspectiva específica, rigurosa y aplicable a las prácticas de aula.

Según las observaciones de Alsina y Delgado-Rebolledo (2022), para que una enseñanza sea eficaz es necesario que el profesorado disponga de una extensa gama de conocimientos que abarquen lo disciplinar y lo didáctico, junto con experiencias prácticas que permitan articularlos en situaciones reales de aula. Esta diversidad de saberes resulta imprescindible para garantizar una alfabetización matemática efectiva en el alumnado, especialmente en edades tempranas.

No obstante, las investigaciones centradas en la identificación del conocimiento del profesorado de Educación Infantil con la enseñanza de las matemáticas siguen siendo escasas, ya que la mayor parte de los estudios se han centrado en las etapas de Educación Primaria y Secundaria (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016). En esta misma línea, Lee (2010) destaca la necesidad de fortalecer la formación inicial y permanente del profesorado de Educación Infantil, con el fin de asegurar una preparación sólida que responda a las exigencias actuales del campo matemático y a las necesidades educativas del alumnado de esta etapa.

En la actualidad, la investigación sobre las problemáticas asociadas a la enseñanza y aprendizaje de la geometría constituye un eje fundamental dentro de la educación matemática. Diversos estudios han señalado que muchas de estas dificultades están estrechamente relacionadas con las concepciones, creencias y la formación del profesorado (Afonso, 2004), lo que evidencia el papel decisivo del conocimiento docente en la calidad de las experiencias geométricas que se ofrecen al alumnado. Asimismo, Duval (1998) subraya que la enseñanza de la geometría presenta una complejidad cognitiva particular, derivada de los procesos de visualización, análisis y tratamiento de representaciones que requiere este campo, lo que convierte su enseñanza en un reto tanto epistemológico como didáctico.

Aunque el Real Decreto 95/2022 define los saberes básicos de la Educación Infantil para el segundo ciclo, su tratamiento de la geometría es relativamente restrictivo: se recoge la dimensión de la posición en el espacio, sin que se articulen de modo explícito contenidos mínimos sobre figuras geométricas, transformaciones u otras dimensiones del razonamiento geométrico más allá de la exploración espacial. Esta limitación entra en tensión con los hallazgos de la investigación sobre el desarrollo del sentido geométrico en edades tempranas. Numerosos autores han desarrollado propuestas didácticas orientadas a favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en Educación Infantil. Entre ellos, Alsina (2022b) aporta orientaciones específicas para el trabajo de los contenidos espaciales y figurales en las primeras edades. Asimismo, Fernández (2013) señala que diversos estudios han identificado los Niveles de Razonamiento implicados en la visualización geométrica, lo que subraya la importancia de comprender cómo progresa el pensamiento espacial en el alumnado.

En este marco, destaca el modelo de Van Hiele, que establece cinco Niveles de Razonamiento geométrico (Van Hiele y Van Hiele, 1958) y propone cinco Fases de Aprendizaje para alcanzar niveles superiores. Cabe resaltar que esta teoría está orientada a ofrecer herramientas para apoyar la actividad docente, en forma de orientaciones para diseñar escenarios de aprendizaje que promuevan la comprensión de las ideas geométricas. En este sentido, Barrera y Reyes (2015) enfatizan que el lenguaje constituye un elemento clave en el tránsito entre los niveles, ya que posibilita describir, argumentar y conceptualizar de manera progresiva los objetos y relaciones geométricas.

En la etapa de Educación Infantil, la mayoría del alumnado sitúa en el nivel 1 de razonamiento geométrico (visualización) y, en algunos casos, pueden llegar a alcanzar el nivel 2 (análisis), según la interpretación del modelo de Van Hiele aplicada a estas edades (Gutiérrez, 2012). Esta progresión implica que el profesorado debe poseer una competencia geométrica situada, al menos, uno o dos niveles por encima de la de sus estudiantes, de modo que pueda planificar situaciones de enseñanza que favorezcan avances reales en su desarrollo conceptual.

En investigaciones como la de Clemente y Llinares (2013), se identifican características específicas del conocimiento geométrico en estudiantes que se preparan para ser maestros, centrándose en analizar la comprensión del alumnado. Este enfoque evidencia la importancia de estudiar el conocimiento docente, pero también revela que la mayoría de las investigaciones se orientan hacia la formación inicial, dejando menos explorado el análisis de la competencia geométrica en profesorado en activo.

En esta misma línea, la revisión realizada sobre el modelo Van Hiele realizada por Sánchez González et al. (2024a), muestra que, aunque el modelo constituye una referencia teórica consolidada, las publicaciones en el ámbito español son aún escasas, especialmente en relación con su aplicación en la formación permanente de maestras de Educación Infantil. Esta falta de estudios sistemáticos pone de manifiesto la necesidad de investigar cómo se puede desarrollar el razonamiento geométrico del profesorado en ejercicio mediante propuestas formativas estructuradas.

Estos resultados se alinean con lo planteado por Alsina (2019), quien señala diversos focos prioritarios hacia los que debería orientarse la investigación en Educación Infantil en las próximas décadas. Tal y como se puede observar en la Tabla 1, entre ellos, destaca la necesidad de profundizar en el conocimiento profesional docente, en el análisis de las prácticas de aula vinculadas a las matemáticas y en el estudio de propuestas didácticas que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático desde edades tempranas, incluyendo el razonamiento geométrico.

Tabla 1

Focos de investigación en educación matemática infantil

Ámbitos de investigación	Agendas de investigación
A. Análisis didáctico	A.1. Perspectivas teóricas y componentes del análisis didáctico.
	A.2. Análisis de contextos de enseñanza y/o recursos didácticos: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos, juegos, recursos tecnológicos y gráficos.
B. El estudiante para profesor, el profesor y el formador de profesores. Aprendizaje y desarrollo profesional	B.1. Aprender el conocimiento y destrezas útiles para enseñar matemáticas.
	B.2. Planificación y gestión de la enseñanza en diversos contextos de enseñanza y su influencia en el desarrollo de la comprensión.
	B.3. Evaluación formativa (del profesor) y formadora (del alumno).
	B.4. Relación entre la teoría y la práctica como elemento para el desarrollo profesional del formador e investigador.
	B.5. Sistema de creencias del estudiante para profesor, el profesor y el formador de profesores.
C. Construcción y organización del conocimiento matemático: contenidos y procesos	C.1. Lo que influye en la construcción y el desarrollo de los contenidos y los procesos matemáticos. Conexiones entre contenidos y procesos matemáticos.
	C.2. Organización del conocimiento matemático (contenidos y procesos) en el currículo. Alfabetización matemática.
D. Interacción, contexto y práctica del profesor	D.1. Interacción, participación y comunicación en el aula.
	D.2. Práctica del profesor. Reflexión sobre la propia práctica.

Nota. Focos de investigación en educación matemática infantil (Alsina, 2019, p. 188).

Toda la evidencia presentada justifica la necesidad de desarrollar un estudio centrado en el profesorado en activo de Educación Infantil y, específicamente, en su formación en geometría, tomando como marco teórico el modelo Van Hiele. La presente investigación constituye así una contribución relevante al campo de la formación docente en esta área, dado que se enfoca en un nivel educativo poco explorado y atiende a la competencia geométrica desde una perspectiva didáctica y profesional.

Con este propósito, el estudio analiza los recuerdos, actitudes, expectativas y conocimientos geométricos de un grupo de maestras de Educación Infantil antes y después de participar en un programa de formación-intervención. El objetivo es identificar sus concepciones y Niveles de Razonamiento geométrico, así como favorecer la recuperación y el fortalecimiento de dicho conocimiento mediante experiencias formativas estructuradas.

Por lo tanto, la presente investigación responde a una doble necesidad. En primer lugar, desarrolla un estudio sistemático de las publicaciones españolas sobre el modelo Van Hiele, con el propósito de ofrecer una panorámica actualizada del campo e identificar tendencias, vacíos y oportunidades de investigación. En segundo lugar, esta tesis contribuye a cubrir dicho vacío mediante el diseño y evaluación de un programa de formación en geometría dirigido a maestras de Educación Infantil en activo, estructurado explícitamente a partir del modelo Van Hiele y con un seguimiento sistemático de sus efectos sobre el conocimiento y la práctica docente. El programa incorpora actividades geométricas en dimensiones unidimensional, bidimensional y tridimensional, favoreciendo un desarrollo progresivo del razonamiento geométrico. La selección de los contenidos geométricos abordados (geometría unidimensional, bidimensional y tridimensional) responde a una decisión didáctica fundamentada en el nivel real de razonamiento geométrico del profesorado participante. Diversas investigaciones recientes evidencian que tanto estudiantes como futuros docentes presentan dificultades en geometría, situándose frecuentemente en niveles iniciales caracterizados por un reconocimiento global de las formas sin análisis de sus propiedades (Mukuka y Alex, 2024; Süzen y Kula Ünver, 2025). Desde el modelo de Van Hiele, este hecho se asocia al predominio del nivel 1 (visualización), lo que requiere propuestas formativas que favorezcan el tránsito hacia el nivel 2 (análisis) mediante la identificación de propiedades, la clasificación y el uso de lenguaje geométrico preciso (Ndungo et al., 2025; Simasiku y Rabaza, 2026).

En coherencia con este planteamiento, y a partir del diagnóstico inicial realizado, la organización de los contenidos se estructuró atendiendo no solo a su potencial para favorecer el tránsito entre niveles de razonamiento geométrico, sino también al carácter progresivo y cíclico del aprendizaje en el sistema educativo español, en el que los conceptos se amplían y complejizan de manera gradual. Tal y como señala Bruner (1972), citado en Carrillo Yáñez y Muñoz Catalán (2018), la enseñanza debe organizarse en espiral, trabajando los contenidos en distintos momentos madurativos, pero cada vez con mayor profundidad. Así, la geometría unidimensional se aborda como base para la comprensión de la bidimensional, al proporcionar elementos fundamentales como líneas y ángulos; a su vez, la geometría bidimensional sienta las bases para la tridimensional, al permitir comprender cómo las figuras planas se transforman y estructuran en cuerpos geométricos. De este modo, cada nivel no supone una ruptura, sino una reelaboración y ampliación de los significados previamente construidos, favoreciendo una comprensión progresivamente más compleja de la geometría (Süzen y Kula Ünver, 2025; Ndungo et al., 2025).

Este planteamiento permite, por primera vez, integrar en una misma tesis el análisis del estado del conocimiento sobre el modelo Van Hiele en España y su aplicación práctica en un contexto real de formación docente. Con ello, se espera contribuir a:

- Mejorar la comprensión de la investigación existente sobre el modelo Van Hiele en el ámbito español.

- Aportar evidencias empíricas sobre la eficacia del modelo para el desarrollo profesional del profesorado de Educación Infantil.

-Formular orientaciones fundamentadas para el diseño de futuras acciones formativas en geometría en esta etapa educativa.

Además, es necesario señalar que el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil, presenta una carencia evidente respecto al sentido geométrico, especialmente en relación con las transformaciones u operaciones que permiten modificar la posición —giros, simetrías, translaciones— y la forma —deformaciones, composición y descomposición de figuras—. Esta ausencia contrasta con los resultados de la investigación en educación matemática infantil, que subraya el papel de estos contenidos en el desarrollo del pensamiento espacial desde edades tempranas.

En consecuencia, los planes de formación dirigidos al profesorado en ejercicio/en activo, deben garantizar el aprendizaje de estos conocimientos geométrico-didácticos, puesto que, como señala la literatura especializada, el docente no puede enseñar aquello que no conoce. La formación permanente, por tanto, ha de estar cuidadosamente planificada y orientada no solo a la adquisición de nuevos saberes matemáticos y didácticos, sino también a proporcionar herramientas que ayuden al profesorado a reflexionar sobre la necesidad de cambiar sus prácticas y cómo hacerlo de forma progresiva y competencial. En este sentido, la competencia matemática, definida por la OECD (2018, citada en Alsina, 2022c), se entiende como:

> La capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, hechos e instrumentos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y a tomar los juicios y las decisiones fundamentadas que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (p. 75).

En el contexto español, Alsina (2025) ha publicado recientemente una revisión sistemática sobre educación matemática infantil en la que concluye que las agendas más investigadas son el desarrollo del pensamiento matemático infantil y la formación inicial del profesorado, mientras que temas como la evaluación, la formación permanente o el ciclo 0-3 siguen siendo escasamente abordados. Estas conclusiones coinciden con los hallazgos de Sánchez González et al. (2024a), quienes detectan un vacío en la investigación sobre formación del profesorado en activo, y con Sánchez González et al. (2025), que identifican la necesidad de formación específica para los maestros en ejercicio.

De igual manera, resulta pertinente destacar el papel del formador de profesores de matemáticas, entendido como la persona que, en contextos de formación inicial o permanente, tiene como tarea ayudar al profesorado a desarrollar y mejorar la enseñanza de las matemáticas (Pérez-Montilla et al., 2025). El formador guía al futuro docente hacia la construcción de conocimiento y experiencia vinculados a las distintas etapas del proceso de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, aunque existen estudios centrados en formadores de otras etapas educativas, la revisión sistemática no ha identificado investigaciones específicas sobre formadores en matemáticas en el ámbito de Educación Infantil (Rojas y Deulofeu, 2015).

Asimismo, en el ámbito de las creencias del futuro maestro, del profesor en ejercicio y del formador, los estudios siguen siendo escasos y se centran mayoritariamente en la formación inicial, especialmente en dimensiones afectivas como las actitudes, percepciones o emociones hacia las matemáticas. Sin embargo, estas dimensiones actúan como elementos mediadores del aprendizaje y del desarrollo profesional del docente de Educación Infantil, reforzando la necesidad de investigar en formación permanente (Alsina, 2025).

En conclusión, esta investigación adquiere relevancia social y educativa al contribuir a la mejora de la preparación matemática de las maestras de Educación Infantil en un área tradicionalmente relegada, promoviendo una enseñanza de la geometría más rigurosa, significativa y fundamentada desde los primeros años del sistema educativo, favoreciendo una transposición didáctica adecuadamente sostenida en la investigación.

En coherencia con las necesidades detectadas en la literatura, la normativa vigente y la relevancia social de fortalecer la formación geométrica del profesorado de Educación Infantil la presente investigación establece los siguientes objetivos, orientados tanto a la comprensión del estado actual del conocimiento como a la evaluación de una intervención formativa basada en el modelo Van Hiele.

1.4 Objetivos de investigación

1.4.1 Objetivo General 1

OG1: Analizar el estado del arte de la investigación y de las aplicaciones del modelo Van Hiele en España, con especial atención a su uso en Educación Infantil y en la formación del profesorado.

1.4.1.1Objetivos Específicos

OE1.1: Localizar, delimitar y catalogar la producción científica española relacionada con el modelo Van Hiele en educación matemática, considerando diferentes niveles educativos y contextos formativos.

OE1.2: Analizar sistemáticamente la producción recopilada, identificando temáticas, enfoques metodológicos, niveles educativos abordados y contribuciones al desarrollo del sentido geométrico.

OE1.3: Identificar vacíos, tendencias y necesidades emergentes en la literatura española sobre el modelo Van Hiele, con énfasis en su aplicación en Educación Infantil y su integración en la formación inicial y permanente del profesorado.

1.4.2 Objetivo General 2

OG2: Diseñar, implementar y analizar un programa de formación basado en el modelo Van Hiele, orientado al desarrollo del razonamiento geométrico de maestras de Educación Infantil

1.4.2.1Objetivos Específicos

OE2.1: Identificar el nivel inicial de razonamiento geométrico de las maestras participantes, utilizando los niveles del modelo Van Hiele como referencia.

OE2.2: Diseñar un programa formativo fundamentado en las Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele, con actividades de geometría unidimensional, bidimensional y tridimensional

OE2.3: Implementar el programa con el grupo participante, promoviendo procesos de reflexión profesional, análisis de la práctica y colaboración entre iguales.

OE2.4: Analizar sus conocimientos, percepciones y experiencias previas en relación con la enseñanza de la geometría.

1.4.3 Objetivo General 3

OG3: Reflexionar sobre los resultados del programa de formación y sus implicaciones para la formación docente inicial y permanente del profesorado de Educación Infantil.

1.4.3.1 Objetivos Específicos

OE3.1: Evaluar el progreso de las maestras en su razonamiento geométrico en la intervención, identificando cambios en relación con los niveles del modelo Van Hiele.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

El presente capítulo tiene como finalidad establecer el marco teórico que sustenta esta investigación. Para ello se revisan los principales enfoques conceptuales y empíricos relacionados con la formación del profesorado de Educación Infantil en contenidos geométricos, prestando especial atención al modelo Van Hiele como herramienta para el desarrollo del conocimiento profesional docente.

A partir de la revisión bibliográfica, se abordan en primer lugar, las bases de la educación matemática en Educación Infantil y la importancia de la geometría en estas etapas tempranas. En segundo lugar, se examina la formación docente, tanto inicial como permanente, en las necesidades formativas específicas vinculadas a la didáctica de la geometría. Posteriormente, se presentan las teorías y modelos de aprendizaje de la geometría, destacando el modelo Van Hiele por su potencial explicativo y su aplicabilidad en la formación de maestras. Finalmente, se sintetizan las aportaciones más relevantes con el fin de construir el marco conceptual que orienta esta investigación.

Este recorrido permitirá identificar vacíos en la literatura y justificar la pertinencia del estudio, cuyo propósito es analizar y mejorar el conocimiento geométrico de un grupo de maestras de Educación Infantil mediante una intervención formativa estructurada a partir del modelo Van Hiele.

2.1. La educación matemática en la etapa de Educación Infantil

La investigación en educación matemática en la etapa de Educación Infantil ha experimentado un crecimiento significativo en los últimos años. Según Alsina (2025), el número de estudios publicados en España ha aumentado de manera notable especialmente a partir de 2014, consolidándose a partir de 2020 gracias a la articulación de una red de investigadores que trabajan de forma coordinada en este ámbito.

En el contexto internacional, esta tendencia también se refleja en la constitución de grupos especializados que impulsan el estudio del pensamiento matemático temprano. Entre ellos destaca el grupo *Early Years Mathematics (EYM),* perteneciente al *Congress of European Research in Mathematics Education (CERME),* donde existe una creciente participación de investigadores españoles, como se observa en el análisis realizado por Edo (2016). Asimismo, cabe mencionar las *POEM Conferences on Early Mathematics Learning,* congresos internacionales que reúnen a investigadores centrados en la educación matemática en la primera infancia (Alsina et al., 2022a).

En el contexto español, también se ha producido un incremento notable de la producción científica vinculada a la educación matemática infantil a partir de la creación, en 2011, del *Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI)* dentro de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* La actividad de dicho grupo ha favorecido la consolidación de investigaciones en este ámbito, tal como evidencian las publicaciones derivadas de sus trabajos (Alsina, 2019; Alsina, 2025).

La adquisición y el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades se han convertido en un área clave para investigadores y educadores, quienes buscan comprender cómo el alumnado construye su conocimiento matemático desde etapas iniciales y cómo promover un pensamiento lógico, creativo y significativo. La educación matemática en Educación Infantil constituye la base sobre la que se edifican los futuros aprendizajes, pues parte de los conocimientos intuitivos e informales que el alumnado trae a la escuela y busca que logren desenvolverse en situaciones cotidianas que requieren el uso del conocimiento matemático, es decir, el desarrollo de competencias. En relación con los aprendizajes matemáticos, diversos organismos han establecido orientaciones que sitúan los procesos como ejes fundamentales del currículo. Entre ellos, el NCTM (2003) y Clements y Sarama (2015) destacan cinco estándares de procesos matemáticos esenciales para el desarrollo del pensamiento: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación. Estos ejes son considerados pilares fundamentales para una educación matemática competente desde edades tempranas.

Según Alsina (2020b), el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil pueden comprenderse a través de tres dimensiones clave: las finalidades de la enseñanza (que responden a *por qué* y *para qué* se enseña), la organización de la enseñanza (que aborda *qué* y *cuándo* se enseña) y las prácticas de enseñanza (que determinan *cómo* se enseña). Estas dimensiones permiten analizar y orientar de manera integrada el sentido educativo de las matemáticas en la infancia y la toma de decisiones didácticas en el aula.

En el caso español, la normativa vigente que organiza la enseñanza de la Educación Infantil —marco en el que se sitúa esta investigación— subraya la importancia de trabajar las nociones matemáticas desde un enfoque globalizado, significativo y vinculado a la vida cotidiana del alumnado mediante el juego, la exploración y el uso de materiales manipulativos. En los apartados 2.1. y 2.2 se realizará un análisis exhaustivo de esta dimensión vinculada a las finalidades y a la organización de la enseñanza; mientras que el apartado 2.2 abordará la dimensión didáctica (prácticas educativas), centrada en el *cómo se enseña* y en los conocimientos profesionales que debe poseer el maestro de Educación Infantil, focalizando la atención en el tema central de este estudio: la geometría (apartado 2.3).

Desde esta perspectiva, las matemáticas en Educación Infantil deben entenderse como un conjunto de sentidos o bloques de conocimiento, referidos tanto a contenidos como a procesos (NCTM, 2003). Tradicionalmente, estos bloques han sido definidos a partir de autores como Chamorro (2005), quien distingue la lógica, el número y la aritmética, la geometría y la medida. Evolucionando esta visión, Alsina et al. (2022) conceptualizan dichos bloques como sentidos matemáticos, ampliándolos a cinco dimensiones fundamentales: numérico, algebraico, espacial, de la medida y estocástico, cada uno con implicaciones específicas para la construcción del pensamiento matemático desde las primeras edades.

2.1.1 El sentido espacial en la educación matemática infantil

Dentro de las matemáticas, la geometría ocupa un lugar debido a su estrecha relación con el desarrollo del sentido espacial y con la capacidad del alumnado para percibir, representar y transformar el entorno. El sentido espacial en las edades iniciales no sólo constituye una base para que el alumnado pueda explicar el mundo que les rodea, sino también para generar conexiones entre diferentes ideas matemáticas y entre las matemáticas y otras disciplinas como el arte, las ciencias, la tecnología, el diseño, las ciencias sociales, etc. (Alsina et al., 2022a).

En edades tempranas, el trabajo con formas, posiciones y relaciones espaciales favorece no solo aprendizajes matemáticos posteriores sino también el desarrollo de competencias transversales como la orientación, la expresión gráfica y la comunicación (Clements, 2004a). El sentido espacial hace referencia a las nociones espaciales, desplazamiento, geometría, posición-figura, y además involucra diferentes acciones:

visualización, localización, orientación, cambio de dimensiones, elaboración de mapas, transformaciones, diseño, composición y descomposición, entre otras (Alsina et al., 2022).

Para alcanzar y promover el sentido espacial, Canals (1997) señala que el individuo debe desarrollar capacidades como el uso de un lenguaje asociado y adecuado al sentido espacial para poder describir esas relaciones y descubrimientos. Sin embargo, la investigación evidencia que, en la práctica de aula, la geometría suele recibir menos atención que otros contenidos matemáticos, predominando actividades centradas en el conteo o el número. Esta descompensación curricular limita las oportunidades de aprendizaje geométrico y espacial del alumnado y pone de manifiesto la necesidad de reforzar la formación del profesorado para lograr un equilibrio entre los distintos sentidos matemáticos.

En consecuencia, el profesorado de Educación Infantil debe ser capaz de diseñar situaciones de enseñanza que generen experiencias espaciales significativas, favoreciendo la exploración, la manipulación, la comunicación y el razonamiento geométrico. Sin embargo, esta tarea solo puede desarrollarse de manera adecuada si cuenta con una sólida formación matemática y didáctica, lo que refuerza la pertinencia de promover acciones formativas específicas en geometría para maestros de esta etapa educativa.

2.1.2 La geometría en el Real Decreto 95/2022 de Educación Infantil

La normativa que regula la Educación Infantil se enmarca en la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE) .Específicamente, el Real Decreto 95/2022 de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil (MEFP, 2022), constituye el marco legal que orienta la acción educativa y define los principios pedagógicos, áreas de conocimiento y competencias que deben desarrollarse en el alumnado de 0 a 6 años. Este Real Decreto establece las bases para favorecer el máximo desarrollo integral del alumnado, atendiendo a sus necesidades evolutivas e introduciendo aprendizajes vinculados a la construcción significativa de la realidad, entre los que se incluye la aproximación a los contenidos matemáticos.

Alsina (2013) llevó a cabo un análisis exhaustivo sobre la presencia de las matemáticas en la Orden ECI/3960/2007, normativa que regulaba la Educación Infantil antes de la implantación de la LOMLOE. Dicho análisis se contrastó con diversas propuestas curriculares internacionales, especialmente con los estándares para la educación matemática del NCTM (2003), lo que permitió identificar discrepancias y carencias significativas en relación con el tratamiento de los contenidos matemáticos en la etapa Infantil. A partir de estas conclusiones, y en coordinación con el Comité Español de Matemáticas (CEMat), se elaboró el documento *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria* (CEMat, 2021), en el que se proponen orientaciones específicas sobre los aspectos que deberían incorporarse al currículo de la educación matemática, con el objetivo de garantizar coherencia, continuidad y rigor en los aprendizajes desde las primeras etapas educativas.

En relación con la geometría, el documento propone el sentido espacial como eje fundamental para comprender y apreciar los aspectos geométricos de nuestro entorno. Dicho sentido se articula en torno a cuatro grandes ideas que deben trabajarse desde la Educación Infantil:

1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones, sus propiedades y relaciones.
2. Localización y sistemas de representación, vinculados a la orientación y el uso de mapas, planos y otras formas de representación espacial.
3. Movimientos y transformaciones, que incluyen traslaciones, giros, simetrías, deformaciones y composición y descomposición de formas.
4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica, entendidos como procesos que permiten interpretar, manipular mentalmente y justificar relaciones espaciales.

Estas ideas constituyen los principios que, según el *Comité Español de Matemáticas* - CEMat (2021), deberían guiar el diseño curricular y la enseñanza de la geometría desde las primeras etapas educativas para favorecer el desarrollo progresivo del sentido espacial.

En lo que respecta a las matemáticas en general, el Real Decreto 95/2022 presenta una formulación poco precisa y con un marcado sesgo hacia el ámbito numérico. Si bien hace referencia al desarrollo de habilidades matemáticas desde edades tempranas, el énfasis recae principalmente en la comprensión de conceptos numéricos, en las operaciones básicas, en la resolución de problemas y en la exploración de patrones. Asimismo, se fomenta el razonamiento lógico-matemático, la estimación y el uso de estrategias de cálculo mental. Sin embargo, la presencia explícita de otros sentidos matemáticos, como el espacial y el estocástico, resulta insuficiente, lo cual limita la visibilidad de áreas como la geometría y la medida, fundamentales en la construcción temprana del pensamiento matemático.

Alsina (2022a) realizó un nuevo análisis de los contenidos matemáticos presentes en el currículo de Educación Infantil, contrastando la legislación vigente con los avances de la investigación en educación matemática. En lo referente a la geometría, su estudio muestra que los conocimientos se identifican principalmente a través de los términos “espacial(es)” y “movimiento(s)”, que aparecen en cuatro y trece ocasiones respectivamente, en alusión a nociones espaciales generales y a desplazamientos relacionados con la exploración y la ubicación en el espacio. Sin embargo, el currículo no incluye referencias explícitas a conceptos fundamentales del sentido geométrico, tales como *figuras geométricas*, *posición*, *relaciones espaciales* o *geometría*, términos que no aparecen en ninguna ocasión vinculados al desarrollo de este dominio.

Asimismo, tampoco se mencionan las transformaciones geométricas, ni aquellas que modifican la posición de las figuras (giros o simetrías), ni las que alteran su forma (composición y descomposición), pese a ser contenidos ampliamente respaldados por la investigación sobre el desarrollo del sentido geométrico en la infancia. Esta ausencia contrasta con las aportaciones de numerosos autores que han descrito orientaciones didácticas específicas para promover la enseñanza y el aprendizaje de estos conocimientos tanto en el primer ciclo de Educación Infantil como en el segundo. Piaget e Inhelder (1948) señalaron que el desarrollo de la representación del espacio se inicia cuando el alumnado comienza a desplazarse por su entorno; a través de la percepción visual y táctil, progresivamente adquieren la capacidad de reconocer formas y diferenciar figuras. Años más tarde, el matrimonio Van Hiele ofreció una explicación más completa acerca de cómo el alumnado construye su conocimiento geométrico relativo a las figuras, formulando la Teoría de los Niveles de Razonamiento Geométrico (Van Hiele y Van Hiele, 1958). Según Alsina (2022a), tres de estos niveles comienzan a desarrollarse durante los dos ciclos de Educación Infantil: el Nivel 1 (visualización y reconocimiento), el Nivel 2 (análisis) y el Nivel 3 (orden y deducción informal).

La investigación concluye que, en relación con la geometría, el currículo vigente solo incorpora referencias a la posición en el espacio, vinculadas a la geometría espacial. Aunque este enfoque es necesario, resulta claramente insuficiente. No se incluyen aportaciones fundamentales sobre el trabajo con figuras geométricas, como el análisis de sus propiedades o las relaciones entre ellas, ampliamente descritas por Piaget e Inhelder (1948) y por Van Hiele y Van Hiele (1958). Del mismo modo, el currículo omite las transformaciones geométricas (como los giros, simetrías, traslaciones, composición y descomposición de figuras) pese a ser procesos clave del razonamiento espacial, respaldados por numerosos estudios (Alsina, 2006a, 2022a; CEMat, 2021; NCTM, 2003).

En consecuencia, la literatura especializada señala la necesidad de trabajar las nociones geométricas desde el movimiento, la manipulación y la representación gráfica, a través de contextos reales, materiales manipulativos, juegos, recursos literarios, tecnológicos y gráficos, e incluso mediante propuestas vinculadas al arte (Alsina, 2022b).

2.1.3 La geometría en el Decreto 36/2022 de Educación Infantil

En el territorio español existen 17 comunidades autónomas y 2 ciudades autónomas, cada una con su propio Boletín Oficial, en el que se desarrollan los currículos autonómicos a partir del Real Decreto que establece las enseñanzas mínimas.

En el caso de la Comunidad de Madrid, en la cual se desarrolla esta investigación, la normativa vigente es el Decreto 36/2022, de 8 de junio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Infantil. Este decreto incorpora criterios de evaluación vinculados a distintos ámbitos matemáticos, incluyendo referencias a figuras geométricas, numeración y al desarrollo de la competencia STEAM. Asimismo, introduce contenidos matemáticos adicionales en la sección de saberes básicos, lo que supone un refuerzo explícito del enfoque competencial en matemáticas dentro del currículo autonómico.

2.2 La educación matemática en los planes de estudios del Grado de Maestro de Educación Infantil.

Un aspecto relevante para garantizar una educación matemática de calidad en la Educación Infantil es la formación inicial de maestros. Esta preparación constituye la base sobre la que se construye la capacidad profesional para diseñar, gestionar y evaluar experiencias de aprendizaje matemático ajustadas a las necesidades del alumnado. Por ello, la formación inicial del maestro debe contemplar tanto la comprensión teórica de los contenidos matemáticos como su dimensión didáctica, proporcionando herramientas, recursos y estrategias que permitan promover el pensamiento matemático desde edades tempranas y asegurar prácticas pedagógicas adecuadamente fundamentadas.

Sin embargo, diversas investigaciones recientes han evidenciado la escasa presencia de la matemática y su Didáctica en la formación del futuro profesorado de Educación Infantil (Alsina, 2025). Así, por ejemplo, en un estudio comparativo sobre la presencia de la didáctica de la matemática y de contenidos matemáticos en los planes de estudio de 17 universidades españolas, Alsina (2020a) concluye que los créditos de los planes de estudio destinados a la Didáctica de la Matemática oscilan entre 6 ECTS y 15 ECTS, lo que representa un rango entre el 2.5 % y el 6.25 % del total de créditos (240 ECTS). La mayoría de las universidades analizadas (11 de 17) dedica 6 créditos del plan de estudios, lo que confirma que la tendencia predominante más generalizada en los títulos universitarios oficiales de Maestro en Educación Infantil en España es dedicar el 2.5 % del total de créditos total a esta área. En esta misma línea, Nolla et al. (2021), en un estudio con todas las universidades españolas, señalan la inexistencia de un consenso acerca del mínimo número de créditos que ha de dedicarse a la formación matemática y didáctico-matemática del futuro profesorado de Educación Infantil, lo que evidencia la falta de criterios comunes y un claro desequilibrio respecto a otras áreas formativas.

Además, se ha evidenciado que el conocimiento y las creencias del profesorado influyen de manera directa en las oportunidades de aprendizaje matemático que se ofrecen al alumnado de esta etapa (Alsina 2025; Sánchez González et al., 2025). Esta situación es especialmente relevante en Educación Infantil, donde las maestras suelen tener una formación inicial de carácter generalista y que, con frecuencia, presenta carencias en contenidos matemáticos específicos. A este hecho se suma que, en los Grados de Maestro de Educación Infantil, la formación en contenidos matemáticos es cuantitativamente irrelevante, lo que dificulta la adquisición de un conocimiento profesional sólido para enseñar matemáticas desde edades tempranas.

La literatura distingue entre formación inicial y formación permanente o desarrollo profesional: la primera se imparte en los grados universitarios de Maestro y proporciona una base general sobre didáctica de las matemáticas, aunque a menudo con una carga insuficiente de contenidos específicos de geometría. La segunda, tiene como finalidad actualizar y profundizar los conocimientos y competencias del profesorado en ejercicio. En este sentido, la investigación en didáctica de las matemáticas ha cobrado impulso gracias a modelos de análisis del conocimiento docente basados en el planteamiento de Shulman (1986), que introdujo el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) como elemento clave. Este enfoque subraya la importancia de identificar dificultades y concepciones previas del alumnado que condicionan el aprendizaje y la enseñanza (Arteaga Martínez y Arnal-Palacián, 2022).

En ese sentido, la legislación educativa española reconoce la formación matemática como un componente esencial en la preparación del profesorado de Educación Infantil. La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), modificada posteriormente por la LOMLOE (2020), establece en su artículo 92 que la profesión de maestro en Educación Infantil es una profesión regulada cuyo ejercicio requiere estar en posesión del correspondiente título oficial de Grado. Este marco legal sienta las bases para garantizar una formación inicial sólida y coherente con las exigencias profesionales propias de esta etapa educativa, reconociendo el papel central de la preparación didáctica para responder a las necesidades de aprendizaje del alumnado, entre ellas la alfabetización matemática.

En el desarrollo de esta ley, la Orden ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil, determina los objetivos y competencias que deben adquirir el futuro profesorado. Entre ellas, destaca la competencia número 11: "Reflexionar sobre las prácticas de aula para innovar y mejorar la labor docente. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo en los estudiantes." (Orden ECI/3854/2007, apartado 3).

Esta competencia subraya la necesidad de una actitud crítica hacia la propia práctica profesional, donde la reflexión, la innovación y la autonomía docente se convierten en principios clave del desarrollo profesional. Tales dimensiones resultan esenciales en la enseñanza de la geometría, puesto que su adecuada implementación en el aula exige que el profesorado no solo conozca los contenidos geométricos, sino que esté preparado para diseñar, adaptar y evaluar experiencias didácticas fundamentadas en el razonamiento espacial.

De igual modo, en el apartado 5 de la citada orden se establece que los planes de estudio deberán tener una duración de 240 créditos ECTS y estructurarse en módulos. Entre ellos, el módulo didáctico y disciplinar incluye la formación en Ciencias de la Naturaleza, Ciencias Sociales y Matemáticas, áreas que constituyen la base del conocimiento profesional del futuro profesorado. En este marco, la enseñanza de la geometría se concibe como un componente imprescindible para el desarrollo de la competencia matemática y para el diseño de experiencias educativas que favorezcan la exploración del entorno, la representación espacial y el pensamiento lógico, pilares fundamentales en la Educación Infantil.

Finalmente, esta orden está siendo objeto de revisión con el propósito de adaptarse a las nuevas demandas del contexto educativo actual, de acuerdo con los requisitos establecidos por el Real Decreto 822/2021, de 28 de septiembre, por el que se regula la organización de las enseñanzas universitarias y el procedimiento de aseguramiento de su calidad. La actualización de los títulos busca garantizar que los planes de estudio respondan a las necesidades reales de la formación del profesorado, incorporando una preparación más sólida y específica en áreas clave.

2.2.1 La geometría en la formación docente de Educación Infantil

La geometría constituye uno de los ejes fundamentales del currículo de matemáticas en Educación Infantil, ya que permite al estudiantado desarrollar habilidades de percepción espacial, reconocimiento de formas, orientación y representación del entorno. A través de experiencias geométricas tempranas, el alumnado adquiere herramientas cognitivas para comprender el espacio y establecer relaciones entre los objetos que lo rodean.

Sin embargo, diversos estudios evidencian que el profesorado suele dedicar menos tiempo, recursos e intencionalidad didáctica a la enseñanza de la geometría que, a otros contenidos matemáticos, como el número y el conteo (Clements y Sarama, 2011). Esta desproporción refleja la necesidad de reforzar la formación geométrica del profesorado, tanto en el plano conceptual como en el metodológico.

La falta de formación específica en geometría constituye uno de los factores determinantes de esta situación. Diversas investigaciones (Alsina, 2017, 2025; Sánchez González et al., 2024b) evidencian que muchas maestras presentan concepciones parciales o reduccionistas de la geometría, basadas casi exclusivamente en el reconocimiento visual de figuras planas, sin incorporar otros componentes fundamentales como las relaciones espaciales, las transformaciones geométricas o el razonamiento deductivo informal. Estas limitaciones condicionan directamente en la calidad de las experiencias de aprendizaje que se ofrecen al alumnado y en la posibilidad de fomentar un pensamiento espacial y geométrico sólido desde edades tempranas.

El conocimiento geométrico del profesorado no se limita a la comprensión de conceptos y propiedades geométricas, sino que incluye también la capacidad de seleccionar tareas adecuadas, anticipar las posibles dificultades del alumnado y promover procesos de razonamiento espacial. En este sentido, la formación del profesorado debe integrar tres dimensiones complementarias: el conocimiento del contenido (qué es la geometría y cuáles son sus componentes fundamentales), el conocimiento didáctico del contenido (cómo enseñar geometría a alumnado de Infantil) y las actitudes y creencias hacia la geometría (cómo percibe el profesorado esta área y su relevancia en la etapa). Estas tres dimensiones conforman un marco integral de conocimiento profesional que debe ser atendido tanto en la formación inicial como en la formación continua del profesorado, ya que condicionan de manera directa la calidad de las experiencias geométricas que se ofrecen en el aula.

La formación permanente se presenta, por tanto, como una oportunidad para que las maestras puedan revisar, ampliar y reorganizar sus conocimientos geométricos, así como desarrollar nuevas estrategias de enseñanza y actualizarse en enfoques didácticos fundamentados en la investigación educativa. Diversos programas de formación específicos en geometría han mostrado resultados positivos tanto en la mejora conceptual del profesorado como en la calidad de las experiencias que ofrecen a su alumnado (Clements, 2004b; Clements y Sarama, 2011). Estas evidencias refuerzan la necesidad de diseñar acciones formativas que permitan a las maestras abordar la geometría de manera rigurosa, competencial y adaptada al desarrollo del alumnado de Educación Infantil.

La geometría constituye un instrumento fundamental para el desarrollo del pensamiento espacial y del razonamiento. No obstante, su presencia en la educación matemática se ha visto progresivamente reducida y, en muchos casos, simplificada al reconocimiento básico de figuras. Entre las causas de esta tendencia, Villani (2001) señala la incorporación de nuevos contenidos en el currículo y la disminución del tiempo dedicado a su enseñanza. Además, la influencia del movimiento de las matemáticas modernas desplazó el papel de la geometría euclidiana, priorizando la lógica y la teoría de conjuntos. Frente a este escenario, las tendencias educativas actuales defienden el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas como vía para que el alumnado construya conocimiento geométrico mediante la exploración y la experiencia directa.

Las tendencias educativas actuales promueven el aprendizaje matemático a través de la resolución de problemas como vía para construir conocimiento, especialmente en geometría, donde la exploración y la experiencia directa resultan esenciales (Clements y Sarama, 2011). Esta perspectiva exige que el profesorado de Educación Infantil cuente con un conocimiento geométrico sólido y con competencias didácticas que le permitan diseñar experiencias variadas y significativas. Por ello, se hace necesario implementar programas de formación permanente que fortalezcan las competencias geométricas del profesorado, integrando tanto los aspectos conceptuales como los metodológicos, como se plantea en la presente investigación a partir del modelo Van Hiele.

2.2.2 La importancia de la formación permanente del profesorado.

El interés por la formación permanente del profesorado es muy antiguo, pero la preocupación por saber cómo, de qué modo, con qué modelos y la consciencia de que este conocimiento debe analizarse y actualizarse, es mucho más reciente si lo comparamos con otros ámbitos de investigación y evaluación educativa.

En el estudio realizado por Manzanares Moya y Galván-Bovaira (2012) se indica que hay pocas referencias sobre este tipo de estudios en nuestro panorama educativo, encontrando estudios vinculados a ámbitos de intervención (Comunidad de Madrid, 2019; Imbernón, 1998); y afirma que son escasas las experiencias de colaboración entre las estructuras de formación continua y los centros dedicados a la formación inicial del profesorado que hacen de esta cuestión un posible foco de interés en investigación (Dios Montes y de Villar Álvarez, 2004).

En el marco de la revisión y actualización de la formación inicial docente, distintas entidades especializadas en educación matemática han aportado orientaciones relevantes. Además de la labor de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), el Comité Español de Matemáticas (CEMat,2021) ha subrayado la necesidad de fortalecer la preparación del profesorado de Educación Infantil en matemáticas, tanto desde la dimensión conceptual como desde la didáctica.

Según el CEMat (2021), los retos actuales del profesorado de Infantil se centran, principalmente, en dos aspectos: primero, reconocer y valorar el conocimiento disciplinar asociado a los distintos sentidos matemáticos y su papel en el desarrollo del pensamiento infantil; y segundo, disponer de recursos didácticos adecuados a las características de esta etapa educativa, que permitan articular experiencias matemáticas significativas desde edades tempranas.

Dada la limitada carga horaria de la formación inicial docente, Berciano (2023) plantea que uno de sus objetivos prioritarios debería ser que las futuras maestras y maestros desarrollen procesos de metacognición sobre su propio aprendizaje en didáctica de las matemáticas. Esto implica que analicen críticamente sus conocimientos y habilidades, identifiquen necesidades de mejora y planifiquen acciones de desarrollo profesional continuo, orientadas a fortalecer su conocimiento disciplinar y didáctico.

En esta línea, Hill et al. (2008) distinguen dos dimensiones esenciales en la formación docente: el conocimiento disciplinar, relacionado con la comprensión del contenido matemático, y el conocimiento didáctico, referido a las estrategias para enseñarlo de manera adecuada al alumnado. Desde esta perspectiva, Berciano (2023) subraya la necesidad de que los Maestros de Educación Infantil participen en procesos continuos de formación que fortalezcan ambas dimensiones, incorporando aspectos conceptuales, metodológicos y actitudinales como los recogidos en la Tabla 2.

Tabla 2

Dimensiones y descripción para la formación de maestras de Educación Infantil en matemáticas

Dimensión	Descripción
Conocimiento disciplinar profundo de las bases de la matemática	Fundamentalmente centrados en la comprensión de la interrelación entre los contenidos y los procesos matemáticos (NCTM, 2000).
Conocimiento de marcos teóricos de enseñanza-aprendizaje de la matemática	Análisis de sus características y transposición al aula.
Conocimiento amplio de herramientas de investigación	Descripción y manejo de herramientas que planteen y favorezcan la reflexión sistemática de la práctica docente matemática en el aula.
Manejo crítico de herramientas que ayuden a la práctica docente	Basada en la observación sistemática de la práctica docente y detección de evidencias, por medio de rúbricas validadas a nivel internacional.
Creación de propuestas docentes innovadoras	Adaptación de innovaciones realizadas en otros contextos socioculturales transferibles a la realidad de aula, que hayan sido planteadas y analizadas.
Conocimiento de técnicas de evaluación y reflexión crítica de innovaciones	Dando lugar a un ciclo de revisión sistemática de implementación de aspectos docentes relevantes en el ámbito de las matemáticas.
Adquisición de herramientas y recursos docentes	Cada vez más amplia que le permitan abordar con seguridad distintos contextos de aula.
Formación sobre cómo abordar de modo satisfactorio las distintas necesidades de la realidad de las aulas	Basada en dar respuesta a una sociedad cada vez más compleja y diversa.

Nota. información extraída de Berciano (2023).

La educación matemática en la etapa de Educación Infantil exige profesionales con una formación sólida y con conciencia de la necesidad de crear contextos educativos de calidad que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático desde los primeros años (Alsina, 2006a, 2015; Alsina y Berciano, 2018; Alsina y León, 2016; Alsina y Martínez, 2016; Björklund y Barendregt, 2016; de Castro, 2011; de Castro et al., 2015; Clements y Sarama, 2015; Edo, 2012; Varol et al., 2012). En esta línea, Olmos y Alsina (2021) identifican tres finalidades clave en la investigación sobre los conocimientos profesionales del profesorado de Infantil para promover dicho desarrollo.

La primera finalidad consiste en abrir nuevos itinerarios educativos a través de la innovación y la investigación, incorporando propuestas, recursos y experiencias que favorezcan el rediseño de espacios, materiales y prácticas vinculadas al juego y la exploración. La segunda se centra en despertar la conciencia sobre la relevancia de la formación inicial y continua, entendiendo la investigación y la formación como vías para superar creencias erróneas que asocian las matemáticas únicamente con etapas educativas superiores (Castro y Castro, 2016), y reconocer que el profesorado de Infantil debe dominar tanto el conocimiento disciplinar como el didáctico. La tercera finalidad pretende dignificar la labor docente en esta etapa, a menudo interpretada como meramente preparatoria, pese a que las "primeras matemáticas" constituyen la base de los aprendizajes posteriores (Alsina, 2006a, 2015; Baroody et al., 2019; de Castro, 2011; Clements y Sarama, 2015; Edo, 2012; Geist, 2009).

La literatura científica muestra que la mayoría de los estudios en educación matemática se han centrado en el profesorado de Educación Primaria y Secundaria, siendo aún escasas las investigaciones dirigidas al conocimiento del profesorado de Educación Infantil (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016). Con el propósito de atender esta carencia, Alsina y Delgado (2022) proponen el *Modelo de Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil* (CEM-EI), compuesto por dos dominios principales: el Conocimiento Matemático en Educación Infantil (CM-EI), que alude al conocimiento específico y estructurado necesario para promover el desarrollo de habilidades matemáticas en el alumnado; y el Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil (CDM-EI), que se refiere a los conocimientos psicopedagógicos sobre cómo aprenden y cómo deben enseñarse las matemáticas en esta etapa educativa.

2.2.3 La importancia de la didáctica en la enseñanza de la geometría en Educación Infantil

La didáctica es definida por Bardera (2000) como un conjunto de normas, criterios, recursos y procedimientos en el que el docente es el actor de la organización del proceso de aprendizaje, es decir, es el medio instrumental para desarrollar aprendizajes, y el estudiante el actor que debe apropiarse del conocimiento. La didáctica forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje, considerando la enseñanza complemento del proceso educativo que alude a la ciencia didáctica. En esta se unen dos grandes inquietudes tal y como señala Godino (1991), por un lado, el" saber a aprender "sobre el conocimiento, es decir, qué se aprende, y por otro lado" saber a enseñar", transmitir (qué se enseña); y que, por tanto, la programación de la enseñanza, el desarrollo del currículo y la práctica de la educación matemática deben ser tenidos en cuenta.

Desde el punto de vista etimológico, interpretado por Mallart (2001) la didáctica es un vocablo proveniente del griego *didaskein, didaktiké*, término asociado con enseñar, instruir y explicar con claridad. *Didaskalos* por otro lado indica a quien enseña, se asocia además a la expresión *didaxis* que significa competente para la docencia. Otras derivaciones del latín son los verbos *docere* como expresión a enseñar y *discere* en alusión a aprender, los cuales han dado el significado actual de docente (el que enseña) y discente (el que aprende).

En este sentido, cabe señalar el valor que otorga la organización profesional internacional que está comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) ya que establecieron los estándares y principios para la educación matemática, y las premisas para la orientación didáctica en las que debe cimentarse la enseñanza de las matemáticas para el desarrollo integral, garantizando un ejercicio didáctico de calidad. Se señalan a continuación los principios que garantizan su calidad, equidad y coherencia dentro del sistema educativo.

- Equidad: implica ofrecer a todos los estudiantes las mismas oportunidades de aprendizaje, asegurando adaptaciones adecuadas y la inclusión de contenidos motivadores que favorezcan el logro académico.

- Currículo: debe organizarse de manera coherente, relevante y progresiva, de modo que las concepciones matemáticas se construyan unas sobre otras, posibilitando el desarrollo de destrezas para el aprendizaje permanente y la resolución de problemas en niveles de creciente complejidad.

- Enseñanza: destaca la necesidad de que el profesorado conozca lo que los estudiantes saben y lo que necesitan aprender, orientando su práctica hacia la motivación y la comprensión. La eficacia del aprendizaje matemático está estrechamente relacionada con la calidad de la enseñanza recibida.

- Aprendizaje: se concibe como un proceso constructivo que parte de las experiencias previas del alumnado y requiere la valoración de sus habilidades procedimentales y conceptuales.

- Evaluación: entendiéndose como un componente integrado del proceso educativo que debe servir para apoyar el aprendizaje significativo, proporcionando información útil tanto para el profesorado como para el alumnado. Su función orientadora permite ajustar la enseñanza mediante evaluaciones iniciales, continuas y finales.

- Tecnología: se reconoce como un recurso que puede potenciar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ampliando las oportunidades de exploración, comprensión y éxito académico.

En este marco, los principios y estándares para la enseñanza de las matemáticas se estructuran en dos grandes categorías. Los *estándares de contenido* establecen los conocimientos específicos que los estudiantes deben adquirir; en el ámbito de la geometría, se refieren al análisis de las figuras geométricas, la formulación de argumentos sobre sus relaciones, y el uso de la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas. Por su parte, los *estándares de proceso* describen las formas de aplicar y desarrollar dichos conocimientos, enfatizando el razonamiento, la demostración, la comunicación, las conexiones y las representaciones.

En conjunto, estos principios y estándares constituyen una guía esencial para la mejora de la formación del profesorado y la promoción de oportunidades de desarrollo profesional. Desde esta perspectiva, el docente se considera la figura central del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, con la responsabilidad de planificar, implementar y reflexionar sobre experiencias de aprendizaje significativo que contribuyan al desarrollo integral del alumnado.

Por todo lo anteriormente expuesto, la didáctica de la geometría en la etapa de Educación Infantil debe dar respuesta a las necesidades de cómo el alumnado construye sus esquemas mentales del espacio. Para ellos Alsina (2019) propone:

- Programar actividades geométricas durante todo el curso, una o dos veces por semana, de forma cíclica, no lineal.

- Partir del entorno real.
- Trabajar las tres dimensiones desde el principio: línea, superficie y volumen.
- Trabajar una sola noción en cada actividad.
- Hacer siempre ejercicios de reconocer y construir.
- Expresar verbalmente la actividad y las relaciones que hacen, iniciando a el vocabulario geométrico correcto para que lo conviertan en uso habitual.
- Plantear actividades a partir de diferentes organizaciones: gran grupo, pequeños grupos, parejas, individual.
- Basar el aprendizaje del sentido geométrico a partir de actividades contextualizadas, en un enfoque grupal.
- Trabajar todas las nociones geométricas de tres maneras:
    - a partir del movimiento y la vivencia con el propio cuerpo a través de actividades psicomotrices.
    - a partir de la manipulación y la experimentación a través de talleres.
    - a partir de representaciones gráficas y plásticas de las propiedades trabajadas, tanto con lápiz y papel como con recursos informáticos.

Diversos estudios han evidenciado que el profesorado en ejercicio presenta limitaciones en el manejo didáctico de los contenidos matemáticos, siendo especialmente notables en el ámbito de la geometría. Ya González y Vílchez (2003) señalaban la existencia de estas debilidades, que se traducen en una escasa competencia para diseñar y promover experiencias de enseñanza coherentes con las demandas de esta área de conocimiento, con los Niveles de Razonamiento del alumnado y con las teorías contemporáneas sobre el desarrollo del sentido geométrico. En consecuencia, los maestros suelen abordar la enseñanza de la geometría basándose en sus propias creencias, recuerdos o intuiciones, sin un soporte teórico ni didáctico suficiente que oriente su práctica docente.

En la actualidad, la didáctica de las matemáticas ha evolucionado hacia un enfoque competencial, en el que la resolución de problemas se concibe como el eje vertebrador del aprendizaje. Este enfoque promueve que el alumnado investigue, establezca conexiones entre ideas, formule conjeturas, argumente y discuta posibles soluciones, fomentando así un aprendizaje activo y reflexivo. En consonancia con esta orientación, la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, (LOMLOE) incorpora estos procesos dentro de la competencia matemática, definiéndolos como sus «ejes». Asimismo, la ley denomina «saberes» a los bloques de contenido tradicionales, ahora organizados en torno a diferentes «sentidos», en una estructura que guarda similitud con los marcos internacionales de referencia, como los descritos por PISA o *El Council of Chief State School Officers* (CCSSO), una organización estadounidense sin ánimo de lucro comprometida con garantizar que todo el alumnado del sistema educativo público adquiera una formación que le prepare adecuadamente para la universidad, la vida profesional y personal, publicó en el año 2010 el documento titulado *Common Core State Standards (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010).* Este marco establece los estándares educativos comunes que describen los conocimientos y habilidades que los estudiantes deben comprender y ser capaces de aplicar desde las primeras etapas educativas, incluida la Educación Infantil.

En lo que respecta a la enseñanza de la geometría, *Los Common Core State Standards* (NGA & CCSSO, 2010) constituyen un marco curricular que define los conocimientos y habilidades que el alumnado debe desarrollar en matemáticas, incorporando tanto contenidos como prácticas matemáticas orientadas al razonamiento, la resolución de problemas y el uso de representaciones. Plantean que esta etapa debe centrarse en dos aspectos fundamentales. En primer lugar, en el uso de la geometría para comprender y representar objetos, direcciones y localizaciones en el entorno, así como las relaciones espaciales entre ellos. En segundo lugar, en el desarrollo de la capacidad para describir, analizar, transformar, componer y descomponer figuras geométricas, fomentando con ello la comprensión estructural y la exploración activa del espacio desde los primeros años de escolaridad.

2.3 La geometría y sus dimensiones

La geometría es una rama de las matemáticas que tiene como finalidad estudiar las características, propiedades y relaciones de las figuras del plano y el espacio. En concreto, se refiere a tres aspectos precisos: la posición, las formas, y los cambios de posición y forma (Canals, 1978). Una de sus funciones es describir las formas de los objetos reales a través de la observación. Por tanto, cuantos más conceptos se conozcan, y mayor vocabulario se tenga, mejor se podrá hacer la descripción de un objeto.

En el ámbito de la educación matemática, es habitual encontrar distintas acepciones relacionadas con el aprendizaje de la geometría, como "razonamiento geométrico", "pensamiento geométrico" o "sentido geométrico", cuyos significados no siempre se presentan de forma unívoca en la literatura. En este trabajo se adopta una diferenciación conceptual entre dichos términos. Así, el "razonamiento geométrico" se vincula específicamente con el modelo de Van Hiele, entendido como el desarrollo progresivo del pensamiento geométrico a través de niveles. Por su parte, el "pensamiento geométrico" se emplea en un sentido más amplio para referirse a las habilidades cognitivas implicadas en la comprensión y uso de conceptos geométricos. Finalmente, el "sentido geométrico" se considera una noción de carácter más global, vinculada a la competencia matemática y recogida en el marco legislativo español vigente.

Esta distinción permite mantener la coherencia con las fuentes teóricas de referencia y, al mismo tiempo, clarificar el uso de los términos a lo largo del estudio.

2.3.1. Competencias matemáticas en el conocimiento del espacio

Alsina (2019) distingue las competencias matemáticas en la construcción del conocimiento geométrico atendiendo a:

-Orientación y Posición: se refiere a las primeras relaciones espaciales para situarse uno mismo (orientación espacial) y para situar objetos entre ellos (organización espacial), efectuadas por criterios de orden, de proximidad-separación, ángulos, etc. y por tanto con el concepto de línea abierta y cerrada.

-Descripción de los elementos por sus formas: se refiere al estudio de las figuras en sus tres dimensiones. En este apartado se trabajan varios conceptos: línea recta y curva, polígono, concavidad y convexidad, superficie plana y curva; poliedro…

-Los cambios de posición y forma: Transformaciones, composición y giros: son los fenómenos geométricos referidos al reconocimiento en la vida real, en el entorno y en del arte, de las transformaciones geométricas como los giros, simetrías y traslaciones, el estudio de sus leyes de funcionamiento y de sus relaciones con las distintas familias de figuras y cuerpos. En la etapa de Educación Infantil principalmente se deberá trabajar las simetrías y los giros.

Y señala que estos tres tipos de competencias geométricas permiten:

-Descubrir en el entorno inmediato los aspectos geométricos del espacio relativos a la posición, formas y cambios de posición y forma.

-Construir progresivamente el propio esquema mental del espacio, integrando en el mismo los elementos de posición y de forma experimentados.

-Adquirir el primer conocimiento funcional de figuras y de cuerpos a partir de relaciones vivenciadas.

-Desarrollar la imaginación, creatividad y el gusto por la belleza de las formas.

-Adquirir seguridad personal en el mejor conocimiento del entorno, así como ilusión por la actividad matemática.

Por tanto, el uso preciso del lenguaje matemático en el aula constituye un elemento fundamental para la construcción de una base conceptual sólida en el alumnado. En Educación Infantil es habitual que el profesorado emplee los términos espontáneos que utilizan el alumnado en sus interacciones cotidianas. No obstante, transformar progresivamente ese vocabulario intuitivo en lenguaje matemático formal permite consolidar aprendizajes significativos y estructurados. Por ejemplo, cuando identifican que un cuadrado tiene “cuatro esquinas”, resulta pertinente aprovechar esa representación mental para introducir el término matemático “vértices”. De este modo, se favorece la transición del lenguaje cotidiano al lenguaje académico, fortaleciendo la comprensión conceptual y ampliando el repertorio lingüístico del alumnado desde experiencias que le resultan familiares.

La presente investigación otorga un papel central a la descripción, entendida como el primer paso en la adquisición del sentido geométrico. Las descripciones preceden a las clasificaciones y a las definiciones, y constituyen, por tanto, el punto de partida del análisis geométrico. En consecuencia, el proceso de enseñanza se aborda desde una perspectiva descriptiva, que permite al profesorado guiar la observación, la comparación y la comunicación de las propiedades de las formas, elementos esenciales de lo que se puede denominar una geometría descriptiva inicial. El objetivo último es la adquisición del lenguaje formal matemático, que constituye la base para avanzar hacia niveles superiores de razonamiento geométrico.

Las figuras geométricas son entidades delimitadas en el plano o en el espacio y constituyen el objeto de estudio de la geometría, una de las ramas fundamentales de las matemáticas. Estas formas pueden poseer área o volumen según el número de dimensiones que las definan, abarcando desde elementos simples como puntos y líneas hasta estructuras más complejas como triángulos, rectángulos, cubos o esferas. Todas ellas comparten la característica de tener un tamaño finito y presentan componentes tales como lados o aristas, caras y vértices, que permiten su descripción y clasificación. Las figuras geométricas se organizan, por tanto, en función de su dimensionalidad, lo que facilita su comprensión y su introducción gradual en las primeras etapas educativas.

Dentro del conocimiento matemático se encuentra el geométrico, este comienza a construirse en el llamado *periodo representacional*, que abarca la etapa de 2 a 14 años y (Piaget e Inhelder, 1948), este periodo se subdivide en dos fases, siendo la primera, la que en esta investigación corresponde a las edades pertenecientes a la Educación Infantil en educación, en dónde el alumnado inicia su capacidad de interiorizar propiedades geométricas a partir de la observación, elaborando imágenes mentales que permiten representar objetos y relaciones espaciales. Es en este momento cuando pueden adquirir de forma óptima nociones fundamentales vinculadas a las posiciones y a las formas (volumen, superficie y línea) mediante actividades que integran simultáneamente diversas nociones geométricas.

La relevancia de este proceso se vincula con el entorno cotidiano, pues la geometría modela el espacio que percibimos, permitiendo designar y representar, mediante el lenguaje geométrico, los cuerpos, sus formas, dimensiones y posiciones (Guerrero, 2010). En consecuencia, la enseñanza de la geometría resulta esencial para el desarrollo del razonamiento espacial, entendido como herramienta para describir y comprender el mundo.

Desde los primeros años de vida, el alumnado construye conocimiento geométrico a través del contacto directo con el espacio, identificando objetos, posiciones y relaciones. En Educación Infantil (etapa no obligatoria, pero clave en el desarrollo matemático) este aprendizaje debe atender al aspecto formativo, funcional e instrumental, ya que contribuye a desenvolverse en otras áreas del currículo escolar (Alsina, 2019).

En este contexto, el docente adquiere un papel central: es quien organiza y guía las experiencias de aprendizaje, por lo que debe poseer un conocimiento profundo del papel de la geometría en la formación humana. No se trata únicamente de transmitir contenidos, sino de diseñar situaciones en las que el alumnado explore el espacio, las figuras, las formas y sus relaciones, favoreciendo la comprensión de propiedades que configuran modos propios de sentido geométrico (García y López, 2008).

2.3.2 Dificultades y concepciones en la enseñanza de la geometría

Muchos de los problemas relacionados con la enseñanza de la geometría derivan de las concepciones, creencias y formación del profesorado (Afonso, 2003). Estos factores influyen de manera decisiva en la forma en que los docentes abordan la enseñanza de la geometría y, en consecuencia, en cómo el alumnado la percibe y aprende.

En esta línea, Blanco y Barrantes (2003) señalan que los recuerdos y experiencias previas sobre la geometría y su proceso de enseñanza-aprendizaje constituyen el principal factor que condiciona las concepciones del futuro profesorado. Asimismo, Barrantes y Blanco (2004) y Vargas y Gamboa (2012) destacan que el profesorado, influido por dichas concepciones y por su formación inicial, tradicionalmente centrada en contenidos numéricos, tiende a reproducir en su práctica docente estrategias y recursos similares a los que experimentó como estudiante.

En muchos casos, estas experiencias previas condicionan su práctica docente y dificultan la implementación de propuestas de aprendizaje que orienten al alumnado hacia el descubrimiento de la geometría como un ámbito generador de conocimiento, lo que conduce a que este contenido sea frecuentemente relegado o considerado de menor relevancia. Además, la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre el papel y en la memorización de figuras y fórmulas; sin contar con objetos, ni formas, ni ejemplos reales que permitan captar mejor los contenidos, es decir, las clases de geometría generalmente son dictadas de manera abstracta. Una de las dificultades en el aprendizaje de la geometría radica en la dependencia de representaciones prototípicas de las figuras. En este sentido, los estudiantes tienden a identificar los objetos geométricos en función de su apariencia habitual, lo que puede generar errores conceptuales cuando las figuras se presentan en posiciones o configuraciones no prototípicas. Esto fenómeno ostensivo se produce cuando los estudiantes reconocen con facilidad figuras geométricas en su forma estándar, pero presentan dificultades cuando estas aparecen rotadas o modificadas, evidenciando una comprensión basada en la imagen y no en sus propiedades definitorias (Ozkan y Bal, 2017). Esta situación pone de relieve la necesidad de diferenciar entre el objeto geométrico y sus representaciones, evitando que la ostensión limite el desarrollo del pensamiento geométrico. En este sentido, se hace necesaria una enseñanza que promueva la transformación de los objetos y la variación de sus representaciones, con el fin de favorecer una comprensión más profunda de sus propiedades.

En esta línea, Alsina (2006b) destaca la importancia de avanzar desde el reconocimiento perceptivo hacia niveles más abstractos de comprensión, mediante el uso de diferentes representaciones y materiales que permitan al alumnado construir significados más allá de la apariencia de las figuras.

Además de la ostensión, en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría se presentan diversas dificultades ampliamente documentadas en la literatura tal y como se señala en Arteaga Martínez y Macías Sánchez (2016). La enseñanza de la geometría se apoya en los conocimientos espaciales espontáneos de los estudiantes para poder acercarles a la adquisición de los conocimientos geométricos, pero esos mismos conocimientos espaciales pueden ser obstáculos. En el aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de capacidades: la visualización y los procesos de razonamiento (cuyos conocimientos teóricos deben estar basado en la experiencias manipulativas y perceptivas para construir su sentido y habilidades visuales para ganar precisión, pudiendo así comprender la relación entre los elementos, propiedades y características. Duval (1998) en Arteaga Martínez y Macías Sánchez (2016) señala que los procesos cognitivos de visualización, razonamiento y construcción deben desarrollarse por separado. Dentro del currículo escolar, no olvidar que además de que hay varias formas de ver una figura, también hay formas de razonarlo y que tanto la visualización, como el razonamiento, debe ser desarrollado por un trabajo de diferenciación. Entre otras de las dificultades, destaca la tendencia del alumnado a reconocer las figuras en función de su apariencia prototípica, lo que limita la comprensión de sus propiedades (Fischbein, 1993), observándose una frecuente confusión entre el objeto geométrico y sus representaciones, dificultando los procesos de abstracción y generalización (Bosch y Chevallard, 1999).

A estas dificultades se suman la escasa formación específica del profesorado en didáctica de la geometría, el predominio de los contenidos aritméticos en los procesos de enseñanza y el uso de materiales manipulativos sin una adecuada reflexión didáctica (Alsina, 2006). Todo ello pone de manifiesto la necesidad de promover enfoques de enseñanza que favorezcan la comprensión conceptual, el razonamiento geométrico y la conexión entre diferentes representaciones.

Autores como Mwadzaangati y Kazima (2019) proponen el uso de metodologías enfocadas al desarrollo de una comprensión profunda de los principios geométricos, con su correspondiente aplicación práctica para minimizar la falta de capacidades para visualizar y manipular objetos tridimensionales y la carencia relacional entre formas bidimensionales y tridimensionales (Sulistiowati et al., 2019).

2.3.3 Teorías y modelos sobre aprendizaje y enseñanza de la geometría

El aprendizaje de la geometría en las primeras etapas ha sido objeto de estudio de diversas corrientes teóricas que intentan explicar cómo se construye el pensamiento espacial y geométrico y cuáles son las mejores formas de promoverlo. Estas teorías constituyen un referente imprescindible para fundamentar tanto la enseñanza a los niños y niñas como la formación del profesorado en activo.

Entre las perspectivas psicológicas destaca la tradición piagetiana, que concibe el desarrollo de las nociones espaciales como un proceso evolutivo vinculado al desarrollo cognitivo general. Según Piaget e Inhelder (1948), el alumnado progresa desde un pensamiento topológico inicial hacia formas más avanzadas de pensamiento proyectivo y euclídeo, en paralelo a su desarrollo intelectual. Esta visión ha sido matizada por investigaciones posteriores que evidencian que, con experiencias adecuadas, el alumnado puede alcanzar niveles más altos de razonamiento geométrico antes de lo previsto por Piaget.

Otra aportación importante es la de Fischbein (1993), quien subraya el papel de las intuiciones geométricas y la interacción entre conocimiento intuitivo y conocimiento formal en el aprendizaje de la geometría. Desde esta perspectiva, las experiencias concretas, manipulativas y visuales desempeñan un papel esencial en el desarrollo del sentido geométrico.

En el ámbito de la didáctica de las matemáticas, se han desarrollado modelos que describen y orientan la enseñanza de la geometría. Entre ellos destacan:

- El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (1958), que propone niveles de comprensión y Fases de Aprendizaje (objeto central de esta tesis).
- Las propuestas de Clements y Battista (1992) sobre el desarrollo del pensamiento espacial en la infancia.

- Modelos de progresión curricular que integran secuencias de aprendizaje basadas en la investigación (Clements a; Clements b, 2004).

Estos marcos teóricos coinciden en señalar que el aprendizaje de la geometría no es únicamente la adquisición de definiciones o propiedades, sino un proceso de construcción progresiva del razonamiento espacial y geométrico que requiere experiencias ricas, variadas y bien diseñadas.

Para la formación del profesorado, estas teorías resultan igualmente relevantes, ya que permiten diseñar programas formativos coherentes con las etapas de desarrollo del sentido geométrico y con los procesos de enseñanza-aprendizaje basados en la investigación. En particular, el modelo Van Hiele se ha mostrado especialmente útil para diagnosticar y promover el progreso en los Niveles de Razonamiento geométrico tanto de estudiantes como del profesorado.

2.3.3.1 Enfoques didácticos en la enseñanza de la geometría

La enseñanza de la geometría ha sido abordada desde diversos enfoques didácticos que responden a distintas concepciones sobre el aprendizaje matemático y el papel del profesorado y del alumnado en la construcción del conocimiento. Analizar estos enfoques resulta fundamental para comprender las prácticas educativas que predominan en el aula, así como para identificar propuestas que favorezcan el desarrollo del pensamiento espacial, la visualización y el razonamiento geométrico. En este apartado se revisan y fundamentan los principales enfoques didácticos en la enseñanza de la geometría, atendiendo a sus aportaciones teóricas y a sus implicaciones para la práctica educativa. Este recorrido teórico culmina con el modelo de Van Hiele, que integra aportaciones previas y ofrece un marco específico para comprender el desarrollo del razonamiento geométrico, convirtiéndose en una referencia clave para la enseñanza de la geometría.

2.3.3.1.1. Enfoque tradicional o Euclidiano

La geometría euclidiana es una forma de estudiar el espacio y las figuras que fue sistematizada por Euclides Se basa en describir y explicar las propiedades de puntos, rectas, planos y figuras (triángulos, cuadrados, circunferencias, etc.) tal y como los percibimos en un espacio plano y “normal”, como una hoja de papel o una pizarra. Su rasgo principal es que todo el conocimiento geométrico se construye de manera lógica y ordenada, partiendo de unas ideas básicas aceptadas como verdaderas (los postulados) y, a partir de ellas, deduciendo teoremas y propiedades mediante razonamientos. Los postulados de Euclides (explicados de forma simple son reglas básicas sobre cómo funciona el espacio) (Roa González, 2019):

1. Por dos puntos distintos pasa una recta.

2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.

3. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Si una línea recta corta dos rectas de forma que los ángulos interiores de un mismo lado son menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se encuentran en el lado en el cual los ángulos son menores que los dos ángulos rectos.

Algunas aplicaciones comunes de la geometría euclidiana o sus principios se encuentran en los siguientes campos: arquitectura y construcción; topografía y medición de terrenos, sistemas de Navegación y GPS, arte y diseño, y robótica y automatización, entre otros. Sin embargo, en la enseñanza escolar no se trabaja con los postulados de forma explícita, sino que se usan sus ideas de fondo de manera intuitiva y progresiva.

2.3.3.1.2 Enfoque constructivista o Piagetiano

Inspirado en la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, este enfoque considera que los estudiantes construyen activamente su conocimiento a través de la interacción con su entorno. Este enfoque promueve el trabajo con materiales concretos, exploración libre y descubrimiento guiado. Sin embargo, plantea que ciertos Niveles de Razonamiento no pueden alcanzarse hasta etapas de madurez cognitiva, lo cual ha sido cuestionado por modelos como el de Van Hiele. En este sentido, Braga (1991), y De la Torre (2003) manifiestan que el modelo de Van Hiele es de mayor virtualidad didáctica, pues señalan que la piagetiana es una teoría del desarrollo, no del aprendizaje

2.3.3.1.3 Enfoque socio constructivista o Vygotskiano

Este enfoque se centra en el papel del lenguaje, la mediación del docente y la interacción social en el aprendizaje. Por lo tanto, da prioridad a la necesidad del uso de trabajo colaborativo, la discusión en grupos, y el énfasis en el uso del lenguaje matemático.

Además, este enfoque está relacionado con el modelo Van Hiele ya que valoran el papel del lenguaje en el proceso de aprendizaje y la instrucción guiada en el aprendizaje.

2.3.3.1.4 Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) concibe el conocimiento como una práctica institucionalizada, inseparable de los contextos sociales en los que se produce y se transmite (Gascón, 2024). Desde esta perspectiva, la enseñanza y el aprendizaje se entienden como prácticas sociales que se desarrollan en el seno de diversas instituciones, como la escuela, la universidad o el aula. Por tanto, tal y como indican Roa-González y Hidalgo-Herrero (2020), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propone un modelo de *cuestionamiento del mundo* donde los estudiantes reconstruyen e investigan sobre la obra en cuestión.

La TAD sostiene que el conocimiento no debe analizarse de forma aislada, sino vinculado a las acciones que los sujetos realizan con él. En este sentido, toda actividad humana se organiza en torno a praxeologías, compuestas por cuatro elementos interrelacionados: las tareas, que definen qué se hace; las técnicas, que describen cómo se realiza la actividad; las tecnologías, que aportan las justificaciones y explicaciones de dichas técnicas; y las teorías, que constituyen el marco conceptual que fundamenta las tecnologías.

Desde este enfoque, la enseñanza implica necesariamente un proceso de transposición didáctica, mediante el cual el saber científico o académico se transforma en saber enseñado, en función de las condiciones y restricciones propias del contexto institucional. En consecuencia, la TAD ofrece un marco teórico sólido para analizar qué se enseña, cómo se enseña, por qué se hace de ese modo y con qué sentido, permitiendo una comprensión profunda de las prácticas didácticas dentro del sistema educativo.

2.3.3.1.5 Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

Entre los marcos teóricos relevantes en didáctica de las matemáticas, destaca la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1998, 2007), que constituye una de las aportaciones fundamentales para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Esta teoría se inscribe en una perspectiva constructivista, al considerar que el conocimiento matemático se construye mediante la interacción del alumnado con situaciones problemáticas diseñadas intencionalmente por el docente. En este marco, la noción de *"situación didáctica"* se entiende como un sistema de relaciones entre el alumnado, el saber matemático y el medio, orientado a favorecer la construcción del conocimiento. Brousseau distingue, además, diferentes tipos de situaciones: de acción, formulación y validación, que permiten estructurar el proceso de aprendizaje, así como el concepto de "*situación adidáctica*", en la que el alumnado interactúa de manera autónoma con el medio, sin intervención directa del docente, favoreciendo así la construcción significativa del conocimiento (Brousseau, 2007).

Desde esta perspectiva, el aprendizaje matemático no se concibe como una simple transmisión de contenidos, sino como un proceso de adaptación del sujeto a un medio que genera desequilibrios cognitivos y promueve la construcción de nuevos significados (Brousseau, 1998). Además, la teoría introduce conceptos clave como el contrato didáctico y la institucionalización del saber, que permiten comprender las dinámicas del aula y el papel del profesorado en la regulación del aprendizaje.

En el contexto español, esta teoría ha sido desarrollada y difundida por autores como Chamorro (2003), contribuyendo a su consolidación en la investigación en didáctica de las matemáticas. Asimismo, estudios más recientes continúan destacando su relevancia en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Gálvez Pérez y Block Sevilla, 2024).

No obstante, en el presente estudio se adopta el modelo de Van Hiele como marco específico para el análisis del aprendizaje geométrico, incorporando la Teoría de las Situaciones Didácticas como referencia complementaria dentro del panorama teórico de la disciplina.

2.3.3.1.6 Educación/Didáctica Realista Holandesa (Realistic Mathematics Education – RME)

Este enfoque, desarrollado en los Países Bajos por Freudenthal (recordando el inicio de este apartado, fue el director de tesis del matrimonio Van Hiele), promueve la matemática como una actividad humana. La geometría se enseña contextualizada en problemas reales y visuales por lo que es necesario el uso de situaciones significativas (contextos realistas), proceso de matematización progresiva (del contexto al formalismo) y un papel activo del estudiante en la construcción del conocimiento. Este enfoque conecta con el modelo Van Hiele ya que ambos enfatizan la instrucción progresiva y el rol del docente como guía para el proceso de enseñanza aprendizaje.

No obstante, el presente estudio se centra específicamente en el modelo de Van Hiele como marco de referencia para el análisis del aprendizaje geométrico.

2.3.3.2 Ubicación del Modelo Van Hiele dentro de los Enfoques Didácticos

Como se ha podido adelantar, el modelo Van Hiele se ubica dentro de un enfoque particular que integra elementos del constructivismo, del socio-constructivismo y la Didáctica Realista Holandesa. Por tanto, aunque no encaja de manera exclusiva en una sola corriente, sí se puede caracterizar por su enfoque didáctico propio:

- Raíces Constructivistas

El modelo Van Hiele asume que el conocimiento no se transmite directamente, sino que se construye progresivamente a través de niveles de pensamiento. Esto lo relaciona con el constructivismo piagetiano, en cuanto a que el aprendizaje geométrico requiere una reconstrucción activa del conocimiento por parte del estudiante, sin embargo, afirma que el paso entre niveles no depende exclusivamente de la madurez cognitiva, sino que puede ser provocado por una enseñanza adecuada. Esta diferencia lo posiciona más cerca de un constructivismo instruccional, donde la mediación docente y la planificación didáctica son claves.

- Componentes Socio-constructivistas: el modelo Van Hiele también comparte elementos con el socio-constructivismo Vygotskiano, ya que:
    - El lenguaje es central: cada nivel se caracteriza por un vocabulario propio, y el desarrollo conceptual va de la comunicación informal a la formal.
    - -El docente actúa como mediador, diseñando tareas o instrucciones planificadas y estructuradas previamente que permitan al estudiante reorganizar su pensamiento.
    - -La interacción social (discusión, argumentación, explicación) favorece el tránsito entre niveles.
- Influencia de la Didáctica Realista Holandesa (RME)

Van Hiele desarrolló su teoría en un contexto influido por la Didáctica Realista Holandesa, liderada por Hans Freudenthal (fue mentor de Pierre Van Hiele), aunque más adelante sus caminos teóricos se diferenciaron. Van Hiele se enfocó específicamente en la geometría y el desarrollo de niveles jerárquicos del pensamiento, mientras que RME abarca una perspectiva más amplia de toda la matemática escolar. Además, Freudenthal critica el uso de niveles rígidos, lo cual contrasta con la estructura secuencial del modelo Van Hiele.

Por lo tanto, el modelo de Van Hiele se considera especialmente adecuado para el estudio del aprendizaje geométrico, ya que proporciona una descripción estructurada del desarrollo del pensamiento geométrico a través de niveles progresivos de comprensión (Van Hiele, 1986). A diferencia de otros marcos teóricos en didáctica de las matemáticas, como la Teoría de las Situaciones Didácticas(no explica el desarrollo cognitivo), la Teoría Antropológica de lo Didáctico(no se centra en el aprendizaje geométrico), o ERM (no especifico de geometría) que ofrecen perspectivas más generales sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, el modelo de Van Hiele se centra específicamente en la naturaleza del conocimiento geométrico y en las dificultades asociadas a su aprendizaje.

Asimismo, este modelo establece una clara conexión entre el desarrollo cognitivo del alumnado y la intervención didáctica, proporcionando orientaciones para la enseñanza que permiten adaptar la práctica docente a los distintos niveles de comprensión (Crowley, 1987).

De este modo, resulta especialmente pertinente en contextos educativos iniciales, donde el aprendizaje de la geometría requiere una progresión gradual desde el reconocimiento visual hacia la comprensión de propiedades y relaciones (Clements y Battista, 1992).

2.4 El modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría

El desarrollo del sentido geométrico ha sido objeto de estudio de diversas corrientes pedagógicas y psicológicas a lo largo del siglo XX. En este contexto, el modelo propuesto por Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, ambos profesores e investigadores, constituye uno de los referentes teóricos más relevantes para comprender el desarrollo del razonamiento geométrico. En este apartado del capítulo, se explorarán los fundamentos del modelo Van Hiele, su evolución histórica, los niveles que lo componen, y su aplicabilidad en contextos educativos diversos.

A continuación, se presenta en la Figura 1 y Figura 2, una imagen de los autores del modelo, utilizado en la educación matemática para mejorar el razonamiento de la geometría:

Figura 1

Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof en el año 1956

Nota. Extraído de ICHME-8 (16–20 September 2024, Warsaw, Poland). Pierre van Hiele: From mathematics teacher and textbook author to developer of the level theory of mathematical thinking. Van Hiele in relation to Tatiana Afanassjewa and Hans Freudenthal.

Figura 2

Pierre Van Hiele en el año 2005

Nota. Extraído de ICHME-8 (16–20 September 2024, Warsaw, Poland). Pierre van Hiele: From mathematics teacher and textbook author to developer of the level theory of mathematical thinking. Van Hiele in relation to Tatiana Afanassjewa and Hans Freudenthal.

2.4.1 Origen y evolución del modelo

Tiene su origen en la década de los años 50 por las prácticas matemáticas desarrolladas por el matrimonio holandés compuesto por los investigadores y profesores en la etapa de secundaria Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof. Sus trabajos doctorales presentados en la Universidad de Utrech y dirigidas por Freundenthal, representan una de las contribuciones más significativas al campo de la educación matemática ya que sostiene que la comprensión de la geometría se desarrolla de manera gradual, jerárquica y secuencial, a través de una serie de Niveles de Razonamiento, caracterizados por una creciente complejidad en la manera de comprender las formas, sus propiedades y relaciones (Van Hiele, 1986). Tras la muerte repentina de Dina, Pierre se encargó de darle la mayor difusión a través del libro "*Structure and Insight : A theory of mathematics education"* (1986*)*, en el que se desarrolla toda la teoría relativa al proceso de crecimiento cognitivo de los estudiantes al aprender geometría.

Cada nivel representa una forma cualitativamente distinta de organizar el conocimiento, de modo que la progresión de un nivel a otro requiere experiencias de aprendizaje adecuadas y mediadas, y no solo por una simple acumulación de información. Este proceso, implica un cambio en la estructura del pensamiento, donde las propiedades y relaciones que en un nivel se perciben como hechos aislados se convierten en elementos organizados y deducibles en el nivel siguiente. De este modo, el enfoque didáctico del modelo ofrece no solo una descripción del desarrollo cognitivo en geometría, sino también orientaciones didácticas para facilitar una enseñanza más eficaz, conocidas como *Fases de*

Aprendizaje, señalando que el desarrollo del sentido geométrico puede estimularse mediante experiencias activas y significativas, especialmente a través de actividades manipulativas, exploratorias y lúdicas. Estas fases permiten que las personas transiten progresivamente entre niveles, construyendo una comprensión cada vez más profunda y formal de los conceptos geométricos.

Este modelo subraya que el progreso a través de los niveles no depende únicamente de la madurez del estudiante, sino principalmente de la instrucción adecuada y del uso de experiencias didácticas diseñadas estratégicamente. Es importante señalar, que este modelo fue diseñado para la geometría, y que, por tanto, extrapolarlo a otras áreas de las matemáticas sería sumamente complicado (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Esta teoría constituye una herramienta útil para analizar el proceso de aprendizaje de la geometría; en líneas generales permite explicar por qué los estudiantes, aunque reconocen las formas, tienen inconvenientes para definir, relacionar propiedades y argumentar o demostrar. Esto dio pie a que el matrimonio Van Hiele desarrollaran una didáctica que organizara los diferentes niveles de sentido geométrico que se deben recorrer ordenadamente, y por otro lado, la ruta a seguir para facilitar esa consecución.

El cuerpo de la teoría tiene diferentes objetivos como modelo didáctico, basado en actividades educativas: el primero de ellos es descriptivo, los autores consideran que existen diferentes niveles o etapas de entendimiento de las ideas geométricas; de manera secuenciada y ordenada y, por esta razón, como parte de la teoría, describen las características de cada uno de estos niveles. El segundo componente es instructivo, donde se establecen los pasos o pautas que un docente debe seguir para que los estudiantes evolucionen en su nivel de razonamiento geométrico a través de actividades o problemas específicos (López de Silanes, 2012).

Zalman Usiskin (1982), con la intención de analizar la capacidad teórica del modelo, diseñando y poniendo en marcha un cuestionario de 25 ítems, uno de los resultados finales fue la adecuación de los niveles para predecir resultados relacionados con la geometría. En ese mismo año, en un proyecto liderado por Fuys (en López de Silanes, 2012) se confirmó la utilidad de los niveles, y los periodos de transición entre un nivel y otro.

Señalar en este resumen histórico, que, en un primer momento, el modelo solo constaba de los niveles 2, 3 y 4 y fue en 1986 cuando Van Hiele añadió el nivel 1. Por otro lado, el nivel 5, añadido posteriormente, es considerado como un nivel extremadamente difícil y solo accesible en los cursos de las facultades de Matemáticas. (López de Silanes, 2012)

Este modelo además señala que la transición entre niveles no es automática, requiere de instrucción y experiencias de aprendizaje cuidadosamente diseñadas para facilitar el avance del estudiante de un nivel a otro. A continuación, se ofrece una descripción detallada de los componentes del modelo, enfatizando en los Niveles de Razonamiento y las Fases de Aprendizaje.

2.4.2 Insight

Este componente del modelo se traduce como la comprensión y hace referencia a los cambios presentados por la persona en su razonamiento, en un concepto específico, a lo largo de una intervención pedagógica, por medio del lenguaje, manifestando y empleando el nuevo conocimiento adquirido en nuevas situaciones (Van Hiele, 1986). Este hecho, destaca el momento en el que un individuo alcanza un nivel superior de razonamiento.

2.4.3 Niveles de Razonamiento geométrico

Los Niveles de Razonamiento, en Barrera y Reyes (2015), citado en Rubio Valenzuela (2020)**,** son aquellos niveles a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento del ser humano desde que inician su aprendizaje, hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en cierto campo. Cada nivel del modelo Van Hiele sugiere un enfoque específico para la enseñanza de la geometría, asegurando que los estudiantes no solo memoricen hechos o procedimientos, sino que realmente comprendan los conceptos a un nivel profundo y puedan aplicar su conocimiento de manera flexible y creativa. Es decir, tal y como señala Van Hiele (1986) los conocimientos del nivel superior deben ser extensiones de los conocimientos adquiridos en el nivel anterior, lo que contribuye a aumentar progresivamente el grado de comprensión y dominio del alumnado. Por tanto, la enseñanza efectiva según este modelo requiere que los educadores evalúen cuidadosamente el nivel de comprensión de cada estudiante y proporcionen experiencias de aprendizaje significativo que promuevan el avance al siguiente nivel.

A continuación, a partir de Afonso Martín (2003); Barrera y Reyes (2015); Burger y Shaughessy (1986), Clements y Batista (1992); Corberán et al. (1994); Crowley (1987); Fouz (2006); Gutierrez y Jaime (1998); Fuys et al. (1988); Jaime y Gutiérrez (1990); López de Silanes (2012); Tyschler (1988), Van Hiele (1957,1986), Van Hiele-Geldof (1957), Vílchez (2004), se exponen las características esenciales de los Niveles de Razonamiento geométrico:

Hay que señalar que, en esta tesis doctoral, se designan los niveles con los números del 1 al 5, corresponden con los niveles del 0 al 4 de otros autores, con el propósito de evitar ambigüedades y al no llegar a unanimidad entre ellos.

2.4.3.1 Nivel 1: Visualización/reconocimiento

En este nivel inicial de comprensión geométrica, la percepción de las figuras es global y holística, su razonamiento no se considera como matemático y se vincula con el razonamiento intuitivo informal. Las figuras geométricas se reconocen y describen como un todo indivisible, basándose principalmente en su apariencia visual. La descripción se centra en el aspecto físico o perceptual de las formas, sin identificar conscientemente los elementos que las componen ni las relaciones existentes entre ellos.

Aunque en este nivel no se comprenden las propiedades abstractas de las figuras, si hay capacidad para reconocerlas en distintos contextos y reproducirlas de manera intuitiva. Por ejemplo, dándoles un Geoplano o una hoja de papel, los estudiantes podrían construir o dibujar las figuras (Corberán et al., 1994). El lenguaje geométrico empleado suele ser impreciso y cotidiano, recurriendo a comparaciones con objetos del entorno para describir las figuras ("…se *parece a..", "…es como…"),* lo que evidencia una comprensión basada en la semejanza perceptiva más que en el análisis formal de atributos.

En este nivel no se posee aún la capacidad para realizar razonamientos deductivos ni para generalizar propiedades de figuras específicas a categorías más amplias. Tampoco se establecen relaciones lógicas o jerárquicas entre diferentes tipos de figuras geométricas. De manera resumida, este nivel se caracteriza porque las personas pueden (Rojas, 2005):

- Reconocer figuras geométricas simples como círculos, triángulos, cuadrados o rectángulos, sin entender sus propiedades formales, por ejemplo: puede identificar y reproducir un cuadrado, un rombo, un rectángulo; pero no es capaz de ver que el cuadrado es un tipo especial de rombo o que el rombo es un paralelogramo particular.

- Describir figuras de forma intuitiva y visual, por ejemplo, *"es un triángulo porque tiene tres lados"*.
- Identificar características perceptuales como el número de lados o la forma general, sin establecer relaciones más profundas entre las propiedades, es decir, sin establecer categorías.
- Manipular figuras concretas para observar cambios visibles, aunque sin comprensión teórica de esos cambios.
- Clasificar figuras de manera intuitiva y global, basándose en la forma y no en criterios geométricos formales.
- Utilizar un lenguaje geométrico elemental y no técnico, insuficiente para expresar con precisión las propiedades o relaciones geométricas.

En síntesis, en el nivel de visualización la comprensión geométrica se apoya en la percepción directa. Las figuras se interpretan como entidades completas, sin análisis de sus componentes ni de las relaciones entre ellos. Este nivel constituye el punto de partida sobre el cual se desarrolla el pensamiento analítico propio del siguiente nivel de razonamiento geométrico.

2.4.3.2 Nivel 2: Análisis

Las personas que se encuentran en este nivel comienzan a centrar su atención en las propiedades y componentes de las figuras geométricas, más allá de su forma global. A diferencia del nivel anterior, en este nivel desarrollan la capacidad de identificar, describir y clasificar las figuras según características específicas observables, pero sin establecer relaciones lógicas o formales entre ellas, lo que limita su comprensión estructural del sistema geométrico.

En este estadio del razonamiento, el aprendizaje se construye a través de la observación, la manipulación y la experimentación con figuras, lo que permite a los descubrir empíricamente propiedades de los objetos geométricos. Este reconocimiento evidencia una comprensión más analítica de las figuras, aunque todavía dependiente de la experiencia perceptiva. Las características fundamentales de este nivel pueden resumirse en los siguientes puntos:

- Son capaces de identificar los componentes y propiedades (condiciones necesarias) de las figuras y objetos geométricos, basándose en la observación y la experimentación.

- Describen las figuras de forma informal, enumerando sus propiedades, aunque sin establecer relaciones lógicas entre ellas ni clasificaciones, lo que les impide elaborar definiciones formales debido a la falta de conexión conceptual entre las propiedades identificadas. Por ejemplo, podrían definir un cuadrado como *"un polígono con cuatro lados iguales, dos pares de lados paralelos y ángulos de 90°"*. No obstante, este tipo de definiciones suelen presentar redundancias u omisiones, ya que no se comprenden las relaciones jerárquicas o de dependencia lógica entre las propiedades. Por ello, el razonamiento en este nivel se caracteriza por tratar las propiedades como entidades independientes, sin vincularlas dentro de un sistema coherente. Como consecuencia, los estudiantes no logran reconocer que una misma figura puede pertenecer a distintas clases geométricas (por ejemplo, *que un cuadrado es también un rectángulo y un paralelogramo*). Esta limitación refleja la ausencia de un pensamiento deductivo formal, propio de niveles superiores del modelo de Van Hiele.

- A través de la experimentación, pueden descubrir nuevas propiedades de las figuras y reconocer patrones comunes dentro de una misma familia geométrica, pudiendo formular definiciones informales de las figuras, generalmente como un listado de propiedades necesarias para su identificación.

En síntesis, el razonamiento en este nivel se orienta hacia la identificación y descripción empírica de las propiedades de las figuras, pero carece aún de la capacidad para establecer conexiones lógicas o clasificaciones jerárquicas entre ellas. De esta manera, el sentido geométrico se encuentra en una etapa de transición entre el reconocimiento visual y la comprensión relacional.

Este nivel representa un avance significativo en la estructuración del sentido geométrico, ya que sienta las bases para el desarrollo posterior del razonamiento deductivo.

2.4.3.3 Nivel 3: Deducción informal

Las personas que se encuentran en este nivel del modelo de Van Hiele, comienzan a establecer relaciones entre las propiedades de las figuras geométricas, comprendiendo las implicaciones y relaciones lógicas que existen entre ellas. Esta comprensión marca un avance significativo respecto al nivel anterior, ya que se pasa de la simple identificación empírica de propiedades a la comprensión de su interdependencia y al uso consciente de definiciones formales para describir las figuras. Quienes se encuentran en este nivel son capaces de:

- Clasificar las figuras geométricas de manera lógica, basándose en propiedades conocidas y comprendiendo cómo unas se derivan de otras. Empiezan a reconocer la importancia de las definiciones matemáticas y pueden formular definiciones formalmente correctas utilizando un lenguaje matemático formal, con precisión en la notación y en la estructura de los razonamientos, señalando las condiciones necesarias y suficientes que caracterizan una clase de figuras. Por ejemplo, pueden razonar que, si un triángulo tiene tres lados iguales, necesariamente tendrá también tres ángulos iguales.

- Comprender demostraciones geométricas presentadas por otras personas o en textos académicos. Aunque el razonamiento deductivo formal aún no se domina plenamente, las personas son capaces de adaptar o reproducir argumentaciones de forma coherente, reconociendo la estructura lógica de las demostraciones y la conexión entre premisas y conclusiones.

- Pueden relacionar las propiedades y tienen la capacidad de construir argumentos lógicos informales, pudiendo justificar sus afirmaciones de manera razonada, por ejemplo, al *explicar por qué la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°,* o al establecer correspondencias entre diferentes figuras y sus propiedades. No obstante, aunque logran deducir propiedades y realizar demostraciones parciales, tienden a tratar las propiedades como unidades independientes, sin reconocer aún la estructura formal que las vincula dentro de un sistema axiomático. En síntesis, el nivel de deducción informal constituye un punto de inflexión en el desarrollo del sentido geométrico. Las personas que alcanzan esta etapa ya pueden razonar de manera deductiva, formular definiciones precisas, clasificar figuras según criterios formales y establecer relaciones entre diferentes propiedades y figuras. Sin embargo, el razonamiento todavía se limita a un marco intuitivo y no completamente formalizado.

En consecuencia, este nivel representa una etapa de transición hacia el razonamiento plenamente formal, en el cual personas comienzan a utilizar los principios de la deducción de manera estructurada, pero todavía sin una comprensión completa del sistema teórico que los sustenta. A partir de aquí, se desarrolla el Nivel 4, donde el sentido geométrico alcanza una formalización lógica plena y una comprensión más abstracta de los fundamentos matemáticos.

2.4.3.4 Nivel 4: Razonamiento o deducción formal

En este nivel, el razonamiento geométrico alcanza una etapa de formalización lógica, en la que las personas transitan desde una comprensión intuitiva de la deducción hacia una fase plenamente estructurada. La comprensión de la geometría se consolida dentro de un sistema deductivo coherente donde los teoremas, postulados y definiciones se articulan jerárquicamente, y cada afirmación requiere una justificación formal.

Las personas que alcanzan este nivel son capaces de entender y realizar razonamientos lógicos formales, reconociendo la demostración como el medio para verificar la validez de una afirmación. A diferencia de los niveles anteriores, donde las argumentaciones podían apoyarse en la observación o la intuición, en este nivel se comprende la necesidad del razonamiento deductivo como fundamento del conocimiento matemático. Las demostraciones, incluso aquellas que implican varios pasos, son comprendidas en su totalidad y se valoran como una vía esencial para establecer la veracidad de los enunciados geométricos.

En esta etapa, las personas construyen sus propias demostraciones y no se limitan a memorizarlas. Además, pueden desarrollar diversas formas de demostración para un mismo teorema, comparando y contrastando los diferentes razonamientos que conducen a un mismo resultado.

Su razonamiento se caracteriza por la capacidad de analizar y justificar afirmaciones con base en principios formales, lo que implica una comprensión global y coherente del sistema geométrico.

En este nivel, las personas pueden abordar las mismas cuestiones que en etapas anteriores, pero razonan y justifican sus afirmaciones de manera rigurosa, empleando argumentos deductivos formales.

Las características fundamentales del nivel de deducción formal pueden sintetizarse en los siguientes puntos:

- Deducción y demostración formal: Se construyen y comprenden demostraciones lógicas completas, valorando la necesidad de justificar cada proposición dentro de un sistema deductivo estructurado.

- Flexibilidad en la demostración: Se entiende que un mismo resultado puede demostrarse mediante distintas secuencias lógicas o partiendo de proposiciones diferentes, lo que refleja un dominio avanzado del razonamiento deductivo y la estructura formal de la geometría.

En síntesis, el nivel de deducción formal representa una etapa de madurez en el sentido geométrico, caracterizada por el uso consciente y riguroso de la lógica, la comprensión del sistema axiomático y la capacidad de construir conocimiento matemático mediante la deducción. En este nivel, la geometría se concibe como un sistema teórico coherente en el que los conceptos, definiciones y teoremas se integran en una red estructurada de relaciones lógicas. Este estadio refleja un alto grado de abstracción y autonomía cognitiva, y sienta las bases para el pensamiento matemático plenamente formal del nivel siguiente.

2.4.3.5 Nivel 5: Razonamiento Abstracto o rigor

El avance hacia este nivel implica trascender la aplicación del razonamiento deductivo dentro de un único sistema axiomático para reflexionar sobre los propios fundamentos de la geometría. En el nivel de rigor o razonamiento abstracto las personas adquieren la capacidad de analizar, comparar y evaluar diferentes sistemas axiomáticos, alcanzando el grado más alto de abstracción y formalidad en el razonamiento geométrico. Alcanzar este nivel implica el desarrollo pleno del razonamiento matemático formal, junto con una visión global e integrada de la geometría. En este nivel superior del modelo de Van Hiele, los individuos son capaces de manejar distintos sistemas geométricos, compararlos entre sí y analizar sus fundamentos axiomáticos, evidenciando una comprensión profunda de las estructuras teóricas que sustentan la disciplina.

Quienes se encuentran en esta etapa poseen un alto nivel de abstracción y formalismo matemático. Son capaces de construir argumentos lógicos rigurosos, elaborar sus propias demostraciones y comprender las estructuras matemáticas subyacentes que definen las relaciones entre los distintos conceptos geométricos. El razonamiento en este nivel trasciende la representación visual: los conceptos se aplican a situaciones no concretas o no pictóricas, y las demostraciones se desarrollan a partir de un marco teórico formal.

En esta fase, las personas comprenden y utilizan axiomas, postulados y teoremas no solo como herramientas deductivas, sino también como objetos de análisis y reflexión crítica. Pueden reconocer la existencia de diversos sistemas axiomáticos, por ejemplo, la geometría euclidiana y las geometrías no euclidianas, analizar sus fundamentos y comparar sus estructuras lógicas. Este nivel de razonamiento permite concebir la geometría como un sistema de pensamiento abstracto, en el que las relaciones entre conceptos se estudian desde la lógica interna del propio modelo y no desde la experiencia empírica. Las características fundamentales de este nivel pueden resumirse en los siguientes puntos:

- Manejo avanzado del lenguaje y la simbología matemática: utilizan con precisión el lenguaje formal y los símbolos matemáticos, lo que les permite abordar la geometría desde un enfoque analítico, riguroso y estructurado.

- Comprensión y comparación de sistemas axiomáticos: se reconoce la existencia de distintos sistemas geométricos y se posee la capacidad de analizarlos, contrastarlos y evaluar su coherencia interna, comprendiendo cómo diferentes conjuntos de axiomas generan distintos tipos de geometrías.

- Abstracción y rigor conceptual: la geometría se trabaja de forma completamente abstracta, sin necesidad de apoyos visuales o ejemplos concretos, alcanzando el nivel más alto de formalización y precisión lógica del razonamiento matemático.

En síntesis, el nivel de rigor o formalización representa la culminación del razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele. En este estadio, la comprensión de la geometría se extiende más allá del dominio de las figuras y propiedades individuales, hacia el entendimiento de los sistemas teóricos que las sustentan, su coherencia interna y su validez lógica. Quienes alcanzan este nivel no solo aplican la deducción, sino que analizan críticamente los fundamentos del propio sistema deductivo, situando la geometría en el ámbito más abstracto del pensamiento matemático formal. En Corberán et al. (1994) se señala que este último nivel solo es alcanzable en los últimos cursos de una Facultad de Matemáticas y por tanto, didácticamente solo se tienen en cuenta los anteriores niveles.

En resumen, los Niveles de Razonamiento geométrico se caracterizan por las diferencias en los objetos de pensamiento que son el centro de su atención. Por ejemplo, en el Nivel 1 los objetos de pensamientos son figuras geométricas. En el Nivel 2 el estudiante opera sobre ciertas clases de figuras y descubre propiedades en esas clases. En el Nivel 3 las propiedades son el objeto sobre el cual los estudiantes actúan obteniendo ordenamientos lógicos de las mismas. En el Nivel 4 las relaciones ordenadas son el objeto que los estudiantes operan y en el Nivel 5 los objetos de pensamiento son los fundamentos de esas relaciones de ordenamiento (Fuys, et al., 1988).

El modelo Van Hiele no solo distingue diferentes niveles de comprensión geométrica, sino que también propone una metodología que se estructura en cinco fases esenciales del aprendizaje, fundamentales para asegurar una transición efectiva y profunda en el entendimiento geométrico. Las fases que postulan en su modelo son cinco y que deben desarrollarse de manera completa,

Además, cabe destacar tal y como señalan López de Silanes (2012) y Rojas (2005), muchos adultos no han avanzado de nivel porque no han tenido oportunidad de enfrentarse con experiencias que los ayuden a pasar al siguiente.

2.4.3 Propiedades de los Niveles de Razonamiento:

Una de las particularidades del modelo Van Hiele y que le concede consistencia y coherencia es que todos los niveles deben cumplir las siguientes cinco propiedades para que estén bien configurados y por tanto, faciliten el entendimiento del modelo:

2.4.3.1 Secuencialidad

El modelo Van Hiele concibe la comprensión geométrica como un proceso secuencial evolutivo y estructura a través de los niveles, en el que en cada uno de ellos se requiere una comprensión para pasar de una etapa a otra de forma progresiva, sin saltos, siendo cada nivel un grado de progreso en el razonamiento matemático que puede usar una persona (Corberán et al., 1994). Esto implica que no es posible alcanzar un nivel de razonamiento geométrico más avanzado sin haber interiorizado plenamente el anterior y por tanto, el docente debe ser consciente del nivel en el que se encuentran sus estudiantes y planificar la enseñanza de manera que promueva y favorezca ese ascenso gradual de las habilidades a adquirir.

2.4.3.2 Jerarquía

El progreso de un nivel a otro ha de realizarse en el orden preciso, el éxito depende más del contenido y de los métodos de instrucción que de la edad del estudiante, capacidades o destrezas; teniendo en cuenta que el aprendizaje se debe considerar como cíclico y aumentativo.

2.4.3.3 Recursividad

Esta es una de las propiedades más importantes del modelo ya que configura la estructura de los contenidos en los diferentes niveles, y es que los objetos o contenidos implícitos en un nivel pasan a ser explícitos en el siguiente. Es decir, siempre hay alguna característica o habilidad que los estudiantes están empezando a adquirir y no son conscientes, y por tanto, no lo usan de forma explícita. En la Figura 3 se resumen estas ideas:

Figura 3

Propiedad recursiva de los niveles

<table>
<tr><th>Periodos De aprendizaje</th><th>Niveles de Razonamiento</th><th>Elementos explícitos</th><th>Elementos implícitos</th></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">Nivel 1. Visualización</td><td rowspan="2">Figuras y objetos</td><td rowspan="2">Partes y propiedades de las figuras</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Periodo de aprendizaje 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivel 2. Análisis</td><td rowspan="2">Partes y propiedades de las figuras</td><td rowspan="2">Relaciones entre las partes y propiedades de las figuras y objetos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Periodo de aprendizaje 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivel 3. Deducción informal</td><td rowspan="2">Relaciones entre las partes y propiedades de las figuras y objetos</td><td rowspan="2">Deducción formal de teoremas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Periodo de aprendizaje 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivel 4. Deducción formal</td><td rowspan="2">Deducción formal de teoremas</td><td rowspan="2">Relación entre teoremas (sistemas axiomáticos)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Periodo de aprendizaje 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivel 5. Rigor</td><td rowspan="2">Relación entre teoremas (sistemas axiomáticos)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Nota. elaboración propia a partir de Afonso Martín (2003); Jaime y Gutiérrez (1990); López de Silanes (2012).

2.4.3.4 Lenguaje

Según las recomendaciones de los profesores Van Hiele, lo más adecuado es que el docente adapte el vocabulario matemático al nivel en el que se encuentran los estudiantes, para evitar que éstos adquieran un aprendizaje memorístico y temporal, y que, de forma gradual, se introduzca el nuevo vocabulario conviviendo ambos lenguajes durante algún tiempo para que, finalmente el específico gane terreno en sus explicitaciones. Las diferentes capacidades asociadas a cada uno de los Niveles de Razonamiento, no solo se observan en la forma de afrontar los problemas que se le plantean al alumnado sino también en el vocabulario que van empleando, ya que cada nivel conlleva un vocabulario específico. En niveles inferiores, el lenguaje es más descriptivo y basado en la percepción; en niveles superiores, se convierte en un lenguaje formal y matemático, utilizado para definir, teorizar y probar.

Así mismo, es importante destacar de cara al profesorado, que dos personas que razonan en diferentes niveles y que, por lo tanto, interpretan los argumentos expuestos de formas diferentes, no podrán entenderse, Por ejemplo, la misma palabra" demostrar". Esta palabra es entendida a partir del segundo nivel, en el que la persona realizar una serie de definiciones mediante ejemplos. En el tercer nivel ya se adquiere su demostración matemática a través de los razonamientos lógicos, aunque de manera informal y basado en la experimentación. Por último, una persona en el cuarto nivel entenderá por "demostrar" lo mismo que los matemáticos, es decir la organización de una secuencia de implicaciones formales basadas en las hipótesis del problema y en otros elementos del sistema axiomático (definiciones, otras propiedades ya demostradas, etc.) (Corberán et al.,1994).

2.4.3.5 Desajuste

A diferencia de teorías como la de Piaget, que enfatizan la madurez cognitiva como condición del aprendizaje, Van Hiele sostiene que el paso de un nivel a otro depende principalmente de la instrucción o materiales empleados. Es decir, una la enseñanza adecuada puede acelerar el desarrollo del sentido geométrico, y, al contrario. Esto confiere al rol del docente una responsabilidad central: crear secuencias didácticas que permitan a los estudiantes experimentar, reflexionar y estructurar progresivamente su pensamiento de acuerdo con el nivel en el que se encuentra el estudiante y utilizar los recursos ajustados al nivel, al igual que el lenguaje.

2.4.4 Fases de Aprendizaje para el razonamiento geométrico

A nivel didáctico y respondiendo a la pregunta de cómo se produce el paso de un nivel de razonamiento al siguiente y qué se puede hacer para impulsar ese paso, el modelo de Van Hiele proporciona al profesorado las cinco “Fases de Aprendizaje", que guían la instrucción, diseño actividades y organización de escenarios, con el objetivo de avanzar en los sucesivos niveles de pensamiento geométrico (Corberán et al., 1994). En esta parte instructiva se hace patente la capacidad expositiva y conductiva del profesor, que, bajo su criterio, puede utilizar multitud de recursos como manipulativos, geometría en la vida cotidiana, medición indirecta, informáticos, etc. (López de Silanes, 2012)

2.4.4.1 Fase 1: Información

Esta fase tiene una doble función: conocer el grado de capacidad que los estudiantes tienen sobre el tema, y ver qué tipo de razonamientos son capaces de hacer en ese ámbito. En esta primera fase el profesor debe conocer la correcta aplicación del modelo para identificar qué nivel de razonamiento son capaces de mostrar sus estudiantes; y, por otro lado, es necesario que el docente informe al alumnado sobre los contenidos que va a trabajar. En la fase de información, el objetivo es introducir a los estudiantes los conceptos, términos y propiedades fundamentales de la geometría de manera clara y accesible. Durante esta etapa, el docente presenta el vocabulario y las herramientas básicas que el alumnado necesitará para explorar y comprender las formas geométricas. Esta fase es crucial para asegurar que todos tengan una base común de conocimiento desde la cual construir su aprendizaje posterior. Se puede realizar mediante test o preguntas individualizadas utilizando actividades del nivel de partida.

En esta fase inicial se sientan las bases para el aprendizaje efectivo:

- Activa el conocimiento previo de los estudiantes, lo que es crucial para construir nuevos conocimientos matemáticos.
- Desarrolla habilidades de comunicación matemática al expresar lo que ya saben sobre un tema.
- Fomenta la curiosidad y motivación, aspectos fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas.

Se realizan observaciones, se generan preguntas y se introduce vocabulario específico. Algunas de las preguntas que puede formular el profesor son *¿Qué es un paralelogramo? ¿Qué es un cuadrado? ¿Qué es un rectángulo? ¿Qué tienen en común las figuras anteriores? ¿En qué son diferentes? ¿Es posible que un rectángulo sea un paralelogramo o que un paralelogramo sea un rectángulo?* Los objetivos son que el profesor determine cuáles son los conocimientos que el estudiante posee y que el estudiante perciba cuál es el rumbo que tomará el proceso de instrucción (Crowley, 1987).

2.4.4.2 Fase 2: Orientación dirigida

La orientación dirigida implica guiar a los estudiantes a través de actividades estructuradas que les ayuden a explorar y descubrir propiedades y relaciones geométricas. El propósito es ayudar a los estudiantes a conectar la información básica con situaciones concretas y prácticas, fomentando una exploración activa y dirigida de los conceptos geométricos. En esta fase se inicia el desarrollo del campo temático de estudio con mayor profundidad; plantear actividades debidamente secuenciadas, en las cuales los estudiantes puedan experimentar, realizar mediciones, descubrir, comprender, asimilar o aplicar los conceptos, propiedades y relaciones de los diversos objetos matemáticos que se desarrollan en los diferentes campos conceptuales de la geometría, que serán motivo de su aprendizaje en un determinado nivel de razonamiento geométrico.

Aquí es donde la importancia de la capacidad didáctica del docente más se va a necesitar, debe diseñar ejercicios y problemas que requieran que los estudiantes observen, manipulen y reflexionen sobre las formas y sus características. La actividad del profesor consiste en formular preguntas que tengan una respuesta concreta, pero de forma que la búsqueda de la respuesta favorezca la reflexión y la comunicación de ideas. Por ese motivo es importante ofrecerles actividades escrupulosamente dirigidas a esos fines.

Los estudiantes en esta fase exploran un tema de estudio a través de actividades propuestas y diseñadas cuidadosamente por el profesor y mejoran la capacidad de observación y análisis al explorar conceptos matemáticos de manera estructurada mediante el desarrollo de estas actividades, los estudiantes llevarán a cabo procesos del pensamiento matemático relevantes para cada nivel.

2.4.4.3 Fase 3: Explicitación

Es la fase central del proceso de aprendizaje, en la cual los estudiantes intercambian sus aprendizajes, experiencias entre pares con la guía del docente. El rol de docente es el de un mediador, orientador, modelador y facilitador del lenguaje geométrico que emplean los estudiantes para realizar las respectivas correcciones de acuerdo con el nivel de razonamiento geométrico. Su actuación va dirigida a corregir el lenguaje del alumnado y desarrollo de los contenidos. Es una fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias) entre los estudiantes participantes y en la que el papel del docente se reduce en cuanto a contenidos nuevos, por eso esta fase es fundamental para el desarrollo del pensamiento crítico y el razonamiento lógico, ya que los estudiantes aprenden a articular y defender sus ideas matemáticas. El estudiante es consciente de las relaciones que existen entre las propiedades de los objetos geométricos, trata de expresarlas verbalmente o por escrito y aprende el lenguaje técnico que acompaña a la materia. A partir de sus experiencias previas, durante el desarrollo de las actividades propuestas por el profesor, los estudiantes expresan e intercambian sus puntos de vista con el objetivo de construir relaciones.

La interacción entre alumnado es importante ya que les obliga a ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás. Aquí, se les anima a explicar sus razonamientos, a describir cómo llegaron a ciertas conclusiones y a justificar sus respuestas.

Esta fase contribuye significativamente al desarrollo lingüístico y cognitivo, por ello es una de las más importantes, ya que mejora la precisión en el uso del lenguaje matemático, desarrolla habilidades de argumentación y justificación matemática y fomenta el aprendizaje colaborativo y la construcción social del conocimiento matemático.

2.4.4.4 Fase 4: Orientación libre

En esta fase se consolida el lenguaje formal y se establecen definiciones y relaciones más abstractas. La orientación libre permite a los estudiantes aplicar de manera independiente lo que han aprendido en una variedad de contextos y con menos dirección del docente. En esta etapa, se les da más autonomía para explorar, experimentar y resolver problemas usando sus propios métodos y enfoques. Esta fase es esencial para fomentar la creatividad, la confianza en sí mismos y la capacidad de los estudiantes para aplicar sus conocimientos geométricos en situaciones nuevas y desconocidas. El estudiante aprende mediante la ejecución de tareas que tienen diferentes soluciones o son de respuesta abierta. Estas actividades deberán ser lo suficientemente abiertas, lo ideal son problemas abiertos, para que puedan ser abordables de diferentes maneras o puedan ser resueltos de varias maneras válidas conforme a la interpretación del enunciado. Aparecen actividades más complejas fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario. Esta idea les obliga a una mayor necesidad de justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más potente.

Es decir, en esta fase se potencian habilidades de nivel superior ya que desarrolla la creatividad matemática al enfrentar problemas más complejos y abiertos, mejora la capacidad de aplicar conocimientos en situaciones nuevas y fomenta el pensamiento crítico y la toma de decisiones en contextos matemáticos.

2.4.4.5 Fase 5: Integración

Finalmente, en la fase de integración, los estudiantes sintetizan y consolidan su aprendizaje, relacionando los conceptos geométricos con otras áreas del conocimiento y con aplicaciones prácticas en la vida real. Es decir, aquí, se resuelven problemas en contextos diversos que exigen transferir el conocimiento adquirido. El aprendizaje geométrico se conecta con el currículo más amplio y con experiencias cotidianas, permitiendo a los estudiantes ver la relevancia y la utilidad de la geometría en diversos contextos. Esta fase culmina el proceso de aprendizaje, asegurando que los estudiantes no sólo comprendan la geometría como una disciplina aislada, sino como una parte integral de su educación general y de su visión del mundo. En esta fase, no se trabajan contenidos nuevos, sino que sólo se sintetizan los ya trabajados, tratando de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya se poseía.

Este enfoque estructurado y secuencial del aprendizaje es clave para desarrollar una comprensión profunda y duradera de la geometría en los estudiantes, preparándolos para futuros desafíos académicos y prácticos en este campo y más allá.

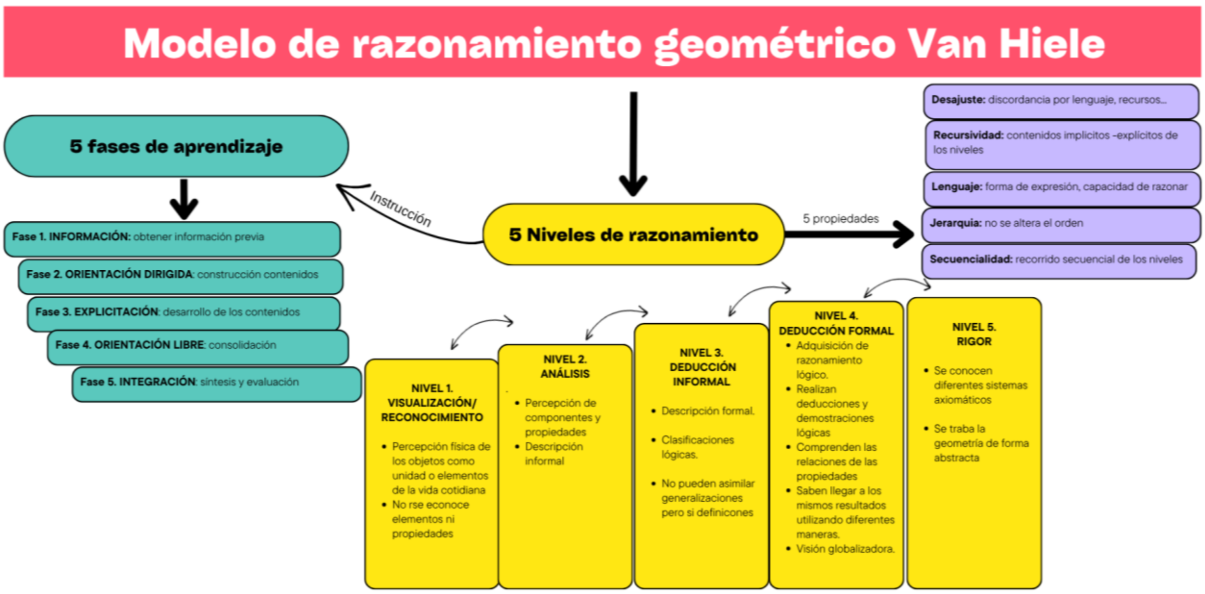
En esta fase sería adecuado integrar las actividades de evaluación para que el docente compruebe los resultados obtenidos ya que consolida el aprendizaje y desarrollan habilidades metacognitivas mejorando la capacidad de síntesis y la visión global de los conceptos matemáticos. Además, una vez han llegado a esta fase, se desarrolla habilidades de autorregulación y reflexión sobre el propio aprendizaje y se fomenta la capacidad de establecer conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas.

El estudiante resume todo lo que ha aprendido acerca del tema, entonces reflexiona sobre sus propias acciones y obtiene una visión general de la nueva red de relaciones que se construyó durante el trabajo con las actividades de instrucción. El papel de profesor en esta fase consiste en explicitar relaciones o procesos que los estudiantes aprendieron. Teóricamente, al final de la quinta fase, los estudiantes habrán logrado un nuevo nivel de pensamiento y estarán listos para iniciar el trabajo que los conduzca a alcanzar un nuevo nivel.

A continuación, en la Figura 4, se presenta un mapa conceptual que recoge las principales características del modelo:

Figura 4

Mapa conceptual de Modelo de razonamiento geométrico Van Hiele



Al integrar estas prácticas, el modelo Van Hiele ofrece un marco metodológico robusto y efectivo para la enseñanza de la geometría, permitiendo a los estudiantes no solo aprender geometría de manera más efectiva sino también desarrollar habilidades de razonamiento y análisis crítico que serán valiosas en todas las áreas de su aprendizaje.

El modelo Van Hiele proporciona un marco valioso para comprender cómo los estudiantes aprenden geometría. Su enfoque en los niveles de pensamiento y razonamiento ofrece una guía práctica para los educadores, ayudando a mejorar la enseñanza en Educación Infantil. Al implementar este modelo, el profesorado puede facilitar un aprendizaje más efectivo y significativo de la geometría, preparando a los estudiantes para desarrollar habilidades matemáticas críticas a lo largo de su educación.

Un hecho importante es que el tránsito entre niveles es un proceso continuo que no se lleva a cabo de forma inmediata, más bien requiere de tiempo y experiencias de instrucción apropiadas; esto significa que el tipo de tareas que los estudiantes abordan en el salón de clase determinan los procesos cognitivos y las características del aprendizaje que los estudiantes logran construir. Si un profesor trata de que un estudiante aprenda los procesos y habilidades relevantes de un nivel, a través de cierto conjunto de actividades, sin que el estudiante haya dominado los procesos de los niveles previos, lo más probable es que el estudiante no pueda abordar las actividades o que las mismas no le permitan llevar a cabo procesos cognitivos de alto nivel (propiedad 4), con lo cual, en el mejor de los casos, se conseguirá únicamente un aprendizaje memorístico.

Cabe resaltar que el nivel de razonamiento es local; es decir, se posee un nivel de razonamiento por cada concepto o idea geométrica. Un estudiante que se encuentra en el nivel 3 al razonar sobre polígonos, puede encontrarse en el primer nivel de razonamiento al estudiar isometrías (Zambrano, 2006). Por otra parte, el logro de los sucesivos niveles no es una cuestión puramente biológica, sino que es esencialmente un producto de las características del proceso de instrucción.

Una actividad central del profesor de matemáticas consiste en determinar con precisión el nivel de razonamiento que poseen los estudiantes, para cada concepto o contenido específico, con la finalidad de establecer cuáles son las actividades y escenarios de instrucción apropiados para lograr una consolidación de los procesos mentales característicos de un nivel o el tránsito hacia un mayor nivel de entendimiento.

2.4.5 La evaluación del modelo

Tal y como se ha señalado anteriormente, es fundamental utilizar herramientas de evaluación que permitan identificar el nivel de comprensión de cada estudiante, adaptando la enseñanza según sea necesario para que la evaluación sea formativa. El sector educativo, al igual que el resto de los sectores sociales, está llamado a la incorporación permanente de cambios y mejoras, es decir, a la búsqueda de calidad. En nuestro ámbito esta búsqueda debe estar centrada en la enseñanza y aprendizaje de un área de conocimiento.

En nuestro país, la actual ley de educación, LOMLOE y su modelo curricular, propone aportar continuidad, coherencia y cohesión a la progresión del estudiante en su desempeño competencial a través de los diversos elementos curriculares, es la ley educativa española en la que se cita en más ocasiones el concepto de "personalización" y que recorren todas las etapas del sistema en líneas general indicando que la evaluación del alumnado debe ser global, continua y formativa, teniendo en cuenta el grado de desarrollo de las competencias clave y su progreso en el conjunto de los procesos de aprendizaje.

Esto parece conectar con el modelo que propone Van Hiele para la enseñanza de la geometría por medio de ese proceso secuencial propio del modelo. En esta investigación la calidad de la educación matemática está enfocada entre otros aspectos hacia la formación permanente del profesorado de Matemáticas en activo. Por lo que se centrará en el proceso de planificación de la enseñanza de la Geometría, y tratará de determinar las condiciones en que se produce esta mejora. Tal y como señalan Vargas y Gamboa (2013), en conexión con Fouz y De Donosti (2005) lo más recomendable para la evaluación de este modelo, es la combinación de la entrevista y el test. En esta investigación, la entrevista se desarrolla a lo largo de la formación a todas las maestras, a través de las actividades diseñadas siguiendo las fases del modelo, teniendo en cuenta algunos puntos clave: se evalúa el proceso, no el resultado; las preguntas deben ser abiertas que inviten a la explicación del porqué de la respuesta y permitir flexibilidad para aceptar las diferencias de niveles dependiendo del área en el que se encuentra la persona.

La evaluación es una de las claves de este modelo ya que la asignación de niveles, el punto de partida para la didáctica, el seguimiento del avance en las fases, etc. debe hacerse con una evaluación adecuada.

Se deben tener en cuenta algunas ideas previas:

1. El nivel de razonamiento de las maestras, en este caso, depende del área de las Matemáticas que se trate. En unos contenidos se pueden estar en un nivel y, en otros diferentes, en un nivel distinto.

2. Se debe evaluar cómo contestan y el porqué de sus respuestas, más que lo que no contestan o contestan bien o mal.

3. En las preguntas no está el nivel, sino que está en sus respuestas.

4. Cuando se encuentran en el paso de un nivel a otro puede resultar difícil determinar la situación real en que se encuentran.

Al planificar la evaluación hay que determinar qué criterios se quieren evaluar, cómo se pueden observar y a través de qué tareas o actividades se van a evaluar. Para ello, López de Silanes (2012) recoge los descriptores de las capacidades a alcanzar por el alumnado, y que se pueden consultar en el Anexo I, Tabla 58.

2.4.5.1 Pruebas diagnósticas de Niveles Van Hiele

El matrimonio Van Hiele en su primera idea teórica del modelo, no desarrollaron unos descriptores para determinar los niveles, fueron estudios posteriores los que determinaron estos descriptores, a continuación, se recogen los hitos principales:

- Geometric Thought Level Test (GTLT): Zalma Usiskin fue el primero en desarrollar un cuestionario de 25 ítems (5 por nivel) para determinar el razonamiento correspondiente a cada uno de los niveles (visualización, análisis, ordenación informal, deducción formal, rigor). Posteriormente Burguer y Shaughnessy, creían que la mejor manera de evaluar era una entrevista personal para cualificar las actitudes, comportamientos y conocimientos, desarrollando nuevos descriptores para los cuatro primeros niveles. Sin embargo, a raíz de las investigaciones realizadas por los educadores españoles Gutiérrez y Jaime (1987) citados por Corberán et al. (1994) se manifestó que los test de selección múltiple no son idóneos para determinar el nivel de razonamiento geométrico.

- Van Hiele *Geometry Test*: adaptado por Clements y Battista (1992), también tuvo amplio uso en el ámbito anglosajón.

- Versiones adaptadas para el contexto hispanohablante, como las propuestas por Godino y colaboradores, o Gutiérrez y Jaime (1990), quienes diseñaron ítems acordes con los currículos de Primaria y Secundaria en España y Latinoamérica, seleccionando ítems cuyas respuestas sean lo suficientemente largas como para que los estudiantes puedan hacer visibles sus ideas y su forma de razonar, porque para ellos lo más importante no es evaluar si los estudiantes contestan bien o mal, sino cómo contestan y porqué lo hacen así. Para ello diseñaron un cuestionario que contiene preguntas de opción múltiple, de verdadero/falso y abiertas. Además, cada ítem está diseñado para detectar un tipo de razonamiento geométrico específico, agrupando en bloques temáticos (formas, propiedades, razonamiento, relaciones espaciales).

Corberán et al. (1994) recomiendan la utilización de pruebas con ítems graduados según los niveles de razonamiento geométrico, organizados de menor a mayor complejidad. Asimismo, señalan la necesidad de establecer descriptores específicos para cada ítem, con el fin de identificar el tipo de respuesta del estudiante y el nivel de razonamiento correspondiente. A diferencia de los sistemas tradicionales de evaluación, centrados en la asignación de puntuaciones a respuestas correctas, el modelo de Van Hiele pone el foco en el análisis del lenguaje y de las justificaciones empleadas por el alumnado. En este sentido, la determinación del nivel de razonamiento no depende de qué respuestas se aciertan, sino de cómo se argumentan (Corberán et al., 1994). Por ello, se recomienda el uso de ítems abiertos que promuevan la explicación, la validación y la demostración, acompañados de descriptores que permitan una evaluación objetiva.

Tal y como se señala a lo largo de los diferentes apartados del presente manuscrito, en esta investigación se emplearon cuestionarios previamente validados, siguiendo estos principios de evaluación. Para la evaluación del nivel de razonamiento geométrico se utilizó el test de Van Hiele desarrollado por Usiskin (1982), en su versión adaptada al contexto español por Jaime y Gutiérrez (1990) y que será analizada y comunicada en futuras publicaciones.

2.5 Producción científica sobre el modelo Van Hiele y la geometría

En este apartado, se pretende mostrar una recopilación sobre las publicaciones relevantes sobre el modelo Van Hiele como referente didáctico (Roldán-Zafra, 2022) de esta tesis doctoral, tanto a nivel internacional como nacional, dado que el estudio se enmarca en España. Respecto a revisiones sistemáticas, se encuentran la de Díaz-Salgado y Mosquera Albornoz (2025) en el que presentan una revisión bibliográfica de investigaciones entre 2015 y 2024 sobre la teoría de Van Hiele y el desarrollo del pensamiento geométrico, destacando su vigencia y tendencia en aumento, así como su relación con estrategias didácticas en educación secundaria y en la que concluyen el interés por el modelo y la necesidad de seguir investigando sobre su profundización y no en torno a las competencias académicas, como también señala la revisión de Sert Çelik y Kaleli Yılmaz (2025) y de Trimurtini et al. (2022), este último señala además la necesidad de explorar de forma específica el uso de manipulativos y recursos tecnológicos. estudios como el de Ruiz y Arteaga (2022) señala que el modelo Van Hiele es una herramienta muy útil para la creación de propuestas integradoras y motivadoras para el desarrollo geométrico de los estudiantes. Con respecto a la geometría, estudios como el de Barrantes et al. (2013) confirman que ha habido un aumento en las investigaciones, por lo que esa contribución supone un cambio de percepción en el profesorado y en la formación de la geometría, en donde la metodología que se promueve es más activa y tiene como fin el estudiante, y no los contenidos. Sin embargo, tal y como señalan en Barrantes y Balletbo (2011), el 70% de las producciones están centradas en la etapa de Educación Secundaria.

Sobre las publicaciones centradas en estudios con profesorado en ejercicio, se encuentran las investigaciones de Afonso, 2003; Afonso et al.,2009); Halat, 2008 y Halat y Şahin, 2008; Patkin y Barkai (2014). Si bien algunos trabajos incorporan el marco teórico de Van Hiele para interpretar el desarrollo espacial temprano, su foco suele situarse en las prácticas de aula, en la formación de futuros docentes, pero no en la evaluación de los Niveles de Razonamiento geométrico del profesorado que ya ejercen. En este sentido, el estudio de Catherine y Zanzini (2025) constituye una excepción parcial, al emplear los niveles iniciales de Van Hiele como referencia para analizar la enseñanza de la geometría en aulas de Infantil, identificando prácticas que favorecen o limitan la progresión del razonamiento espacial. Sin embargo, su aportación no supone una medición directa de los Niveles de Razonamiento del profesorado, lo que confirma la necesidad de investigaciones específicas que aborden esta variable en maestras de Infantil en activo. Gambini y Lénart (2021). y la necesidad de una formación docente en geometría en Infantil, ya que esta es débil a nivel internacional, tal y como señalan los estudios como Clements y Sarama (2011) y Gambini y Lénart (2021). A diferencia de la amplia producción científica sobre el modelo de Van Hiele centrada en las etapas de Primaria y Secundaria, la literatura disponible revela una clara ausencia de investigaciones que analicen de forma directa el sentido geométrico de maestras en activo en la etapa de Educación Infantil, resultando pertinente destacar el estudio publicado por Sánchez González et al. (2024a), derivado de la presente investigación, en el que se analiza la producción científica española sobre este modelo y que se desarrolla en el apartado *2.5.1 Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española.*

Además, la revisión de la literatura reciente y no solo es España, muestra una notable ausencia de investigaciones que articulen el modelo de Van Hiele con metodologías fenomenológico-hermenéuticas en el ámbito de la formación docente permanente en geometría. Los estudios existentes sobre el modelo se centran, en su mayoría, en enfoques cuantitativos o de diseño instruccional (Hartono, 2025; Kandaga, 2022; Naufal, 2021), mientras que la fenomenología hermenéutica ha sido aplicada, sobre todo, a la comprensión de experiencias educativas en otros campos de la enseñanza de las matemáticas (Fuster-Guillén, 2019; Lauterbach, 2017).

2.5.1 Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española.

Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A., y Roa González, J. (2024a). Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española. *European Public & Social Innovation Review*, 9, 1–16. https://doi.org/10.31637/epsir-2024-1365

La limitada presencia de investigaciones que aborden el modelo de Van Hiele en maestras de Educación Infantil en ejercicio adquiere especial relevancia si se considera que el desarrollo del razonamiento espacial en esta etapa constituye la base cognitiva del sentido geométrico posterior. Desde esta perspectiva, la ausencia de estudios centrados en el profesorado de Infantil sugiere no solo un vacío en la investigación, sino también un posible déficit en la formación inicial y permanente, especialmente en lo relativo a la planificación de experiencias geométricas fundamentadas en teorías del desarrollo del pensamiento matemático como la de Van Hiele. Aunque se puede realizar una lectura del artículo completo y los resultados, se señala la información más relevante sobre el método y las principales conclusiones.

Para esta investigación se ha consultado la base de datos Web of Science y la metodología del presente estudio es empírica-analítica cuantitativa, y mantiene la forma de un diseño "Ex post facto retrospectivo" (Montero y León, 2005). Se ha utilizado la técnica del análisis de contenido, seleccionando la siguiente keyword-topic-parámetro: Van Hiele, siendo el único término, ya que este modelo se refiere a su propia naturaleza de desarrollar la geometría, enseñanza y didáctica como recurso educativo. Los criterios de exclusión empleados en esta investigación fueron la eliminación de documentos duplicados. Los criterios de inclusión consistieron en seleccionar los documentos que aparecieron al utilizar el filtro de "Countries/Regions," eligiendo específicamente "España" y "Spain". Para la búsqueda se seleccionó el rango de fechas desde el primer documento en 1993 hasta la actualidad, siendo 2024 como el año de la última publicación. De un total de 380 documentos, se seleccionaron 23 para el análisis posterior, excluyendo uno por ser un duplicado. Los 22 documentos analizados abordan el modelo Van Hiele desde una perspectiva primaria. Las unidades de análisis seleccionadas recogen las siguientes variables: nivel de producción anual, autores, países, tipo de documento, rigurosidad científica en cuanto a metodología empleada en los artículos y factor de impacto.

Las producciones analizadas en esta revisión, cuyos resultados se centran en una investigación con muestra analizada, denotan la relevancia de los resultados positivos hacia el modelo, este estudio constituye un avance en relación a la investigación en el ámbito de la geometría. Se ha detectado que tan solo una tesis doctoral (Afonso, 2003) ha ahondado en la formación de profesorado, utilizando el modelo para detectar los niveles de geometría de sus estudiantes, pero no para mejorar el nivel de conocimientos geométricos del profesorado de la muestra estudiada. Hay que señalar que del total de las producciones científicas indexadas en WoS, el 5.8% corresponde a España, por lo que se podría decir que es un modelo que está presente en la producción relevante relacionada con Van Hiele. No obstante, los resultados de esta revisión bibliográfica evidencian la necesidad de ampliar la investigación en la formación de los docentes en el ámbito español, tal y como señala Alsina (2020). Los resultados obtenidos sugieren la necesidad de brindar experiencias de formación al profesorado, que les permitan avanzar hacia el desarrollo y transformación de los conocimientos matemáticos y didácticos para profundizar en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, tal y como señalan estudios como los de Barrantes y Blanco (2006); y López de Silanes (2012).

Tanto en el estudio de Berciano et al. (2017) como en el artículo de Novo y Berciano (2019), se destaca que las intervenciones graduales y modelo Van Hiele implementados por el profesorado, promueven una mejora notable en el razonamiento geométrico y lenguaje matemático del alumnado de Educación Infantil de la muestra analizada. Sin embargo, las investigaciones sobre el conocimiento del profesorado de Educación Infantil en la enseñanza de matemáticas son limitadas, ya que, salvo una publicación, todos los estudios se han centrado en el alumnado (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016).

Esta idea corrobora la investigación de Lee (2010) en la que se subraya la necesidad de fortalecer tanto la formación inicial como continua del profesorado de Educación Infantil en la enseñanza de las matemáticas, destacando un área crítica que requiere mayor atención en la investigación educativa.

Además, estudios recientes como el de Ordóñez et al. (2021), arrojan pequeñas conclusiones, siendo una de las más claras el desajuste entre la formación del profesorado y la realidad en las aulas, respecto a la enseñanza de las matemáticas en las aulas de Educación Infantil. Esto se une a las investigaciones como la de Clemente y Llinares (2013), donde se identifican características específicas del conocimiento geométrico en estudiantes que se preparan para ser maestros, centrándose en analizar la comprensión del alumnado, lo cual pone en valor la necesidad de detectar la competencia geométrica del profesorado en activo.

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

Este capítulo tiene la finalidad de presentar los fundamentos del modelo metodológico llevado a cabo en la investigación de la presente tesis doctoral, describiendo cada uno de los focos epistemológicos de esta investigación cualitativa, que dan forma sustancial y delimitan las actuaciones que se han llevado a cabo en todo el proceso. Para ello, se aborda el conocimiento científico que constituye tanto el fundamento teórico sobre el que se basa esta investigación, como las técnicas empleadas.

De acuerdo con Rodríguez et al. (1999), la investigación cualitativa se caracteriza por la coexistencia de diversos paradigmas, métodos y estrategias, conformando un pluralismo que fortalece su naturaleza epistemológica. Este enfoque produce datos descriptivos construidos a partir de las propias palabras de los participantes, se fundamenta en una lógica inductiva, posee un carácter humanista, y concibe el escenario y a los sujetos desde una perspectiva holística, al punto de que los autores afirman que "es un arte".

En esta misma línea, Ruedas et al. (2009) señalan que el proceso investigativo cualitativo se construye mediante una interrelación continua entre investigador, participantes y contexto, así como entre los elementos que constituyen el fenómeno de estudio. Los autores sostienen que entre dichos elementos se establecen relaciones dependientes, dialógicas y participativas, en las que el investigador se sumerge en la realidad con el propósito de captarla y comprenderla, asumiendo además que el conocimiento generado es necesariamente provisional y que las afirmaciones resultantes quedan sujetas a modificaciones en función del contexto y del momento histórico en que se produce la investigación.

Desde esta perspectiva, el valor de la investigación cualitativa no reside tanto en la generalización de resultados, sino en la comprensión profunda, contextualizada y situada del fenómeno analizado. En consonancia con ello, el presente capítulo describe el procedimiento metodológico adoptado en este estudio, atendiendo a la especificidad del objeto investigado y a la necesidad de comprenderlo en su complejidad.

Tal y como expresa Maturana (1995), desde la mirada del *Multiverso*, la realidad no es un constructo único ni objetivo, sino una multiplicidad de realidades que se configuran a partir del lenguaje, las experiencias y las interacciones de los sujetos. Cada persona comprende el mundo desde su propia vivencia, de modo que el conocimiento se construye y reconstruye constantemente en relación con los otros y con el contexto.

Trasladado al ámbito educativo, esta perspectiva implica asumir que la investigadora no es portadora de una verdad absoluta, sino que su labor se orienta a comprender la realidad construida por las participantes. En el marco de la presente investigación la mirada del Multiverso supone reconocer que el mundo que las maestras generan a partir de su práctica y de sus concepciones matemáticas es el único posible para ellas bajo sus circunstancias actuales. Por ello, la tarea de la investigadora no consiste en revelar un conocimiento externo o superior, sino en acompañarlas en la comprensión de su propio mundo profesional y formativo.

Desde esta premisa, se justifica la elección de una metodología cualitativa, especialmente adecuada para investigar fenómenos educativos y formativos en toda su riqueza contextual, valorando la singularidad de los casos y la interpretación inductiva de los datos (Creswell y Poth, 2018).

La investigación cualitativa no persigue generalizar y profundizar, sino comprender de manera profunda una realidad en su contexto, a través de recogida de datos como entrevistas, análisis documental o la observación sistematizada mediante un protocolo específicos. Estas técnicas proporcionan datos de naturaleza cualitativa, expresados de forma verbal y registrados como texto, cuyo análisis implica un proceso de reducción, organización e interpretación conceptual en categorías. Este enfoque requiere una coherencia interna entre las decisiones metodológicas y la interpretación del fenómeno, garantizada mediante procesos de validación que involucran a las propias participantes y al investigador, quien asume un papel activo en el diálogo, el vínculo y la construcción compartida de significados. Como señala Bisquerra (2009), en la investigación cualitativa no es la generalización lo que adquiere relevancia, sino la transferencia del conocimiento producido a contextos similares, atendiendo a su valor formativo y comprensivo.

A partir de lo expuesto de forma introductoria, se establece que esta investigación se enmarca en el paradigma cualitativo, cuyo propósito es comprender fenómenos educativos desde una mirada interpretativa, centrada en los significados que construyen los sujetos en contextos reales (Denzin y Lincoln, 2018). En coherencia con ello, el objetivo principal del estudio consiste en analizar la evolución del razonamiento geométrico de un grupo de maestras de Educación Infantil, a partir de una intervención diseñada para fortalecer sus conocimientos y habilidades en relación con los niveles del modelo de Van Hiele.

Esta aproximación resulta adecuada para estudiar procesos complejos y no lineales, como la apropiación conceptual y la transformación de prácticas profesionales, que requieren una comprensión profunda basada en la interpretación del contexto y de la experiencia de las participantes (Merriam y Tisdell, 2016). el análisis no persigue explicar la realidad mediante generalizaciones, sino extraer información relevante que permita construir un núcleo interpretativo sobre cómo se modifica el razonamiento geométrico tras el proceso formativo, generando conclusiones y conocimiento transferible.

Por ello, se ha optado por un estudio de caso descriptivo-interpretativo, una estrategia metodológica que posibilita una exploración profunda de una unidad de análisis delimitada (en este caso, un grupo de maestras de Educación Infantil) con el propósito de describir e interpretar el desarrollo de su razonamiento geométrico a través de una formación basada en el modelo Van Hiele.

3.1. Enfoque metodológico

Los métodos de investigación permiten delimitar un problema, recolectar información relevante y orientar la construcción del conocimiento, ajustando el procedimiento a las características de la realidad estudiada y a los objetivos planteados. En el ámbito educativo, la selección del método debe responder a las particularidades del contexto y a la naturaleza del fenómeno a investigar.

La investigación educativa se caracteriza por su flexibilidad y heterogeneidad, tanto en sus enfoques como en sus métodos, resultados y contextos de aplicación, así como en la formación investigadora de quienes la desarrollan (Bisquerra, 2009; Rubio Valenzuela, 2020). Esta diversidad responde a la complejidad propia de los procesos educativos y a la necesidad de abordarlos desde perspectivas que permitan comprenderlos en su singularidad.

En este marco, ciertos estudios se centran en fenómenos que poseen interés precisamente por su carácter único y particular, aunque también contengan elementos transferibles a otras realidades. Este es el caso de los estudios de caso, cuyo propósito consiste en comprender en profundidad situaciones específicas, complejas y contextualizadas, enfocándose en el funcionamiento de personas, grupos o programas educativos (Stake, 2010).

Características de la investigación descriptiva

En la investigación descriptiva no se manipulan variables, sino que se observan y describen tal y como ocurren en su contexto natural. Aunque la metodología cualitativa es esencialmente descriptiva, este tipo de investigación puede emplear tanto enfoques cuantitativos como cualitativos, en función de los objetivos y la naturaleza del estudio. (Bisquerra, 1989). En la Tabla 3, se puede observar las bondades y desventajas de la investigación descriptiva.

Al no existir variables manipuladas, el investigador no ejerce control sobre el fenómeno estudiado, sino que se limita a recoger información mediante los instrumentos de recolección de datos. No obstante, la descripción del fenómeno no se reduce a presentar los datos obtenidos: es necesario organizar y analizar la información a la luz de un marco teórico apropiado, que brinde sustento conceptual a la investigación. A partir de este análisis es posible establecer relaciones entre los datos y clasificarlos en categorías, conocidas como categorías descriptivas, que permiten interpretar el fenómeno y aportar comprensión significativa sobre él.

Tabla 3

Ventajas y desventajas de la investigación descriptiva

Ventajas	**Desventajas**
Recolección de datos (observación, estudios de casos y encuestas)	Confidencialidad, los encuestados no siempre responden con la verdad si las preguntas son demasiado personales o si se sienten observados
Datos complementarios, los datos recopilados son cualitativos y cuantitativos	Posible sesgo, si el observador tiene un sesgo potencial hacia el tema de investigación
Entorno natural, se lleva a cabo en el propio ambiente generando buen clima y confianza	No se conoce la causa de la problemática de estudio
Fortalece la toma de decisiones basados en los análisis estadísticos de los datos	La muestra no es representativa debido a la no aleatoriedad de la muestra

Nota. elaboración propia a partir de Guevara et al. (2020).

En la investigación cualitativa existen diversos métodos orientados a la comprensión de los fenómenos sociales y educativos. Entre ellos se encuentran: la investigación etnográfica, que explora prácticas culturales en contextos naturales; la etnografía educativa, centrada en dinámicas escolares; los estudios fenomenológicos, que describen experiencias subjetivas vividas por los participantes; la teoría fundamentada o *grounded theory*, que genera marcos teóricos a partir del análisis emergente de los datos; la investigación narrativo-biográfica, enfocada en los relatos de vida y trayectorias profesionales; y el estudio de casos, caracterizado por el análisis intensivo de una unidad delimitada, poniendo énfasis en los significados, experiencias y perspectivas de los sujetos implicados.

Según Rodríguez et al. (1999), la investigación cualitativa busca comprender la realidad tal como ocurre, interpretándola a partir de los significados que construyen quienes participan en ella. Por esta razón, los conceptos no suelen estar definidos de forma operacional al inicio del estudio, ya que dependen de las experiencias que emergen durante el proceso. Desde una perspectiva fenomenológica, el investigador adopta una actitud abierta y exploratoria para aproximarse a las realidades en su complejidad, describiéndolas sin imponer categorías previas ni prejuicios.

En esta línea, Ugas (2006) plantea que la realidad no puede analizarse desde fuera, sino que debe comprenderse mediante la observación de los propios procesos de observación, lo que implica una reconstrucción intersubjetiva del mundo estudiado. Para ello, el investigador necesita conocer y seleccionar estrategias pertinentes para recopilar y analizar información acorde con la situación investigada.

Como señalan Coffey y Atkinson (2003), los datos cualitativos pueden proceder de múltiples fuentes (entrevistas, documentos, grabaciones o notas de campo), de modo que su análisis requiere una interpretación rigurosa que permita dar sentido a la experiencia estudiada. Por tanto, y en base a todo lo expuesto se puede decir que la investigación cualitativa:

-No se comprueba hipótesis, se comprende. (Por eso no se formulan hipótesis. No porque no se quiera ser riguroso, sino porque el tipo de conocimiento que se busca es otro)

- No se predice, se describe y se interpreta.

- No se parte de certezas, sino de preguntas.

Tal como señalan Denzin y Lincoln (2018) y Stake (2015), la riqueza del enfoque cualitativo reside en que las teorías no se buscan confirmar, sino comprender, matizar o transformar a partir del contacto directo con la realidad estudiada. En este proceso, la función interpretativa del investigador adquiere un papel central, pues es a través de su análisis continuo como se construye el significado del fenómeno. En consecuencia, los estudios cualitativos orientan sus preguntas de investigación hacia casos específicos, con el fin de comprenderlos en profundidad y generar modelos explicativos que revelen relaciones no previstas inicialmente, emergentes del contexto y de los sujetos implicados.

Desde esta perspectiva, la presente investigación, se sitúa en el marco de un modelo teórico específico de la educación geométrica: el modelo Van Hiele. De este modo, la realidad a estudiar se focaliza en un fenómeno particular del contexto formativo docente, formulado a través de la siguiente pregunta central: *¿qué ocurre con el razonamiento geométrico de las maestras que participan en un programa de formación basado en el modelo Van Hiele?*

3.1.1. Identificación de la estrategia y enfoque de investigación.

La investigación se inscribe en el paradigma interpretativo, adoptando una metodología hermenéutica, orientada a comprender los significados que las personas construyen en su contexto educativo. Desde esta perspectiva, el conocimiento se concibe como idiográfico, situado y vinculado a un contexto específico, emergiendo a través de procesos cualitativos e inductivos, cuya finalidad no es predecir o explicar fenómenos, sino interpretar la realidad educativa a partir de las percepciones y acciones de los participantes (Bisquerra, 2009).

Siguiendo a Muñiz (2010), la investigación se define como estudio de caso, pues analiza un mismo fenómeno, el modelo Van Hiele, en un grupo concreto de maestras de Educación Infantil, atendiendo a las variaciones y significados construidos por cada participante y por el colectivo. Se sitúa, por tanto, en un enfoque fenomenológico-hermenéutico, interpretativo y cualitativo, en el que la investigadora forma parte del escenario analizado y construye conocimiento a partir de la interacción humana, la observación directa en el aula y el análisis posterior del material generado. De este modo, la experiencia se interpreta describiendo "la vida tal y como es", haciendo pública la indagación para contrastar e interpretar los datos del proceso (Bisquerra, 2009).

El enfoque hermenéutico se centra en la interpretación y comprensión de textos, símbolos y lenguajes en general, se aplica en la interpretación de fenómenos sociales ya que se encarga de contextualizar esa interpretación, captando el mensaje original y comprendiendo sus implicaciones en el presente. Su objetivo es desentrañar el significado y la intención presentes en la comunicación humana, reconociendo la influencia de los contextos históricos, culturales y lingüísticos. Este enfoque emplea el método de la interpretación basándose en la comprensión del intérprete y reconociendo que el texto a interpretar tiene una historia y contexto específicos.

Vélez y Galeano (2002) alegaron que la hermenéutica es un enfoque que explicita el comportamiento, las formas verbales y no verbales de la conducta, la cultura, los sistemas de organizaciones y revela los significados que encierra, pero conservando la singularidad. Asimismo, mencionaron que la hermenéutica está presente durante todo el proceso investigativo en la construcción, el diseño metodológico y teórico, así como en la interpretación y discusión de los resultados.

La fenomenología en la educación se ajusta a las experiencias de los agentes de la comunidad educativa, así como en el entendimiento del significado y sentido de éstas. En este método, se patrocinan procedimientos y técnicas específicas se describirán en los siguientes apartados relacionados con las fases del método.

3.1.2 Fases del método fenomenológico hermenéutico.

Fuster (2019) señala las fases que debe llevar a cabo:

3.1.2.1 Primera fase: Etapa previa o clarificación de presupuestos.

La investigadora debe liberarse de prejuicios para que no afecte, debe ser lo más transparente, siendo aséptica y crítica obteniendo libertad de pensamiento. Se trata de establecer los presupuestos, hipótesis, preconceptos desde los cuales parte la investigadora y reconocer que podrían intervenir sobre la investigación. Del mismo modo, son mostrados las concepciones teóricas sobre las cuales está estructurado el marco teórico que orienta la investigación, así como los sistemas referenciales, espacio-temporales y sociológicos que tengan relación con los datos obtenidos del fenómeno en estudio. Ello se realizará por medio de respuestas a las cuestiones postuladas sobre nuestras actitudes, valores, creencias, presentimientos, conjeturas, interés, etc., en relación a la investigación con el objetivo de evitar la presencia de estas en la interpretación de las experiencias, Martínez (2014).

3.1.2.2 Segunda fase: Recoger la experiencia vivida.

Esta fase, de carácter descriptivo, se centra en la recogida de información procedente de diversas fuentes, como relatos, diálogos, protocolos, registros narrativos, experiencias vividas y observaciones directas o documentales. La recolección debe realizarse sin prejuicios, siguiendo las pautas de Van Manen (2003) y Ayala (2008), quienes señalan que la descripción ha de presentarse tal como la experiencia es o ha sido vivida, evitando explicaciones causales, generalizaciones o interpretaciones abstractas. Para ello, recomiendan narrar desde la perspectiva interna de quien la experimenta, incorporando emociones, estados de ánimo y sentimientos, y focalizando la atención en un suceso concreto que destaque por su intensidad, incluso pudiendo registrarse de forma oral para facilitar su autenticidad.

Siguiendo a Martínez (2014), la narración debe representar de manera legítima la realidad vivida, articulando una dimensión empírica que recoge la experiencia, y otra reflexiva que analiza sus significados, lo que caracteriza a la fenomenología hermenéutica.

Desde esta perspectiva, la observación participante implica que el investigador se introduzca y forme parte del contexto cultural del grupo estudiado, para describir el fenómeno de la forma más completa y libre de prejuicios posible (Van Manen, 2003). En coherencia con ello, Martínez (2008) destaca que esta etapa debe reflejar de manera auténtica la realidad vivida por los sujetos investigados.

3.1.2.3 Tercera fase: Reflexionar acerca de la experiencia vivida-etapa estructural.

En esta fase, el propósito radica en intentar aprehender el significado esencial de algo. La reflexión fenomenológica trata de examinar el significado o la esencia de un fenómeno, siendo un proceso ejecutado constantemente en la vida cotidiana, procurando prestar atención a los textos como un conjunto y cuestionando qué frase podría englobar el significado esencial del texto como un todo (Van Manen, 2003). Consiste en realizar una visión de conjunto para conseguir una idea general del contenido que se presenta en el informe. Según Martínez

(2014), es prioritario ejecutar un sin número de revisiones del mismo protocolo y para ello es imprescindible intentar realizarlas con la "mente en blanco", consiguiendo ello, se puede ir al siguiente paso.

3.1.2.4 Cuarta fase: Escribir-reflexionar acerca de la experiencia vivida.

La finalidad de esta etapa es integrar las descripciones individuales en una estructura grupal, de modo que el fenómeno estudiado quede representado en su fisonomía común, avanzando de lo singular a lo universal mediante una síntesis descriptiva rigurosa (Martínez, 2014). Este proceso culmina en la elaboración del texto fenomenológico, cuyo objetivo es construir una narración evocadora de acciones, intenciones y experiencias, tal como se viven en el mundo cotidiano (Van Manen, 2003). Su propósito es generar en el lector una *epifanía del significado*, es decir, una comprensión intuitiva y emocional del fenómeno vivido (Ayala, 2008).

En coherencia con ello, el método adoptado responde a las características del estudio de caso, que, según Pérez Serrano (1994), se justifica en los siguientes elementos:

-Contextualización particular, al centrarse en un centro educativo específico y permitir comprender las particularidades de un grupo concreto de maestras.

-Diversidad de fuentes de datos, mediante la triangulación de observaciones, entrevistas y análisis documental, que enriquece la interpretación del fenómeno formativo.

-Perspectiva holística, al estudiar la experiencia de las maestras y su interacción con el modelo Van Hiele como un sistema de significados interrelacionados.

-Análisis en profundidad, que posibilita identificar patrones, dificultades y logros en la implementación del modelo, otorgando relevancia a la comprensión y no a la generalización estadística.

3.1.3 Investigación cualitativa: estudio de caso

Esta tesis doctoral tiene como finalidad comprender e interpretar las experiencias y transformaciones que emergen en un grupo de maestras de Educación Infantil durante su participación en un proceso formativo fundamentado en el modelo teórico de Van Hiele, con especial atención a la construcción de su conocimiento y razonamiento geométrico. El interés radica en comprender este caso en profundidad, atendiendo a sus particularidades y sin pretensión de generalización, sino de comprensión situada.

En este sentido, la investigación se desarrolla con un grupo de maestras de una misma institución escolar, trabajando en su ambiente natural, con sus dinámicas, matices y complejidades. El estudio de caso posibilita una "mirada ampliada" que integra diversas fuentes de información (observaciones, entrevistas y documentos) con el fin de comprender cómo y por qué se producen los cambios en el razonamiento geométrico de las maestras. Tal como afirma Stake (1995), su valor reside en la capacidad de ofrecer una inmersión profunda que otras metodologías no pueden proporcionar.

Por tanto, esta investigación se presenta como una estrategia de estudio de caso enmarcada en un enfoque cualitativo descriptivo-interpretativo, cuyo propósito es documentar y analizar cómo emergen, evolucionan y se manifiestan los Niveles de Razonamiento geométrico de las participantes sin alterar el contexto natural, registrando sus transformaciones a partir de la experiencia formativa. Asimismo, el análisis se sustenta en un proceso de triangulación (véase apartado 3.3.3 y apartado 5.1.4), que permite contrastar y relacionar los datos obtenidos desde distintas técnicas y momentos del proceso.

Como recuerda Stake (1995), el estudio de caso no aspira a representar un fenómeno en su totalidad, sino a iluminarlo en profundidad, pues comprender un caso de forma densa y rigurosa puede aportar más conocimiento que describir superficialmente múltiples situaciones.

3.1.3.1 Características de los estudios de caso.

Dado que cada investigación presenta particularidades propias, resulta necesario ofrecer una descripción completa que permita al lector comprender sus características esenciales y, en caso necesario, replicarla. Según Guevara et al. (2020), los estudios sociales pueden desarrollarse en diferentes niveles de profundidad, como el experimental, el participativo o el descriptivo; este trabajo se sitúa en el nivel descriptivo, cuyo propósito es especificar los rasgos fundamentales de una realidad y caracterizar a la población estudiada.

El estudio persigue un doble objetivo: comprender en profundidad las experiencias y percepciones de las maestras respecto al modelo Van Hiele y conocer su razonamiento y conocimiento geométrico. El estudio de caso, como estrategia metodológica, permite una exploración detallada del contexto específico del centro educativo y la obtención de datos ricos y variados que facilitan la identificación de patrones significativos. En suma, este marco metodológico ofrece las condiciones necesarias para investigar la implementación del modelo Van Hiele y las percepciones de las maestras de Educación Infantil implicadas.

El estudio de caso, tal como lo plantea Stake (1995), permite atender al contexto, las experiencias y los significados atribuidos por los sujetos (en esta investigación, las maestras), proporcionando una comprensión densa y contextualizada del fenómeno. De los cuatro tipos de caso que señala Muñiz (2010): atípicos, teóricos, diferentes y típicos, (pueden estudiarse varias personas que tienen algún aspecto en común, por lo que se espera cierta homogeneidad o coherencia en sus respuestas), esta investigación, se encuentra, por tanto, en el caso *típico,* dado que se analizan las respuestas de 23 maestras de un mismo centro.

Desde esta aproximación general, se desarrolló una propuesta de formación en geometría compuesta por ocho sesiones presenciales con un enfoque práctico-reflexivo, en las que se abordaron actividades diseñadas conforme al modelo Van Hiele, haciendo énfasis en tareas visuales, analíticas y de argumentación informal (Gutiérrez et al., 1991).

3.2. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

En este apartado se presentan las características más relevantes, las estrategias llevadas a cabo, procedimientos e instrumentos de toda la información teniendo en cuenta las fases llevadas a cabo en la Tabla 7 (fase de identificación, diagnóstico, evaluación y análisis) teniendo en cuenta la técnica directa interactiva utilizado en esta investigación: observadora participante.

3.2.1 Instrumentos para recolección de datos

3.2.1.1 Cuestionario inicial.

Para la recogida de datos y conocimiento de las maestras, se elaboró a través de la herramienta Google Forms, un cuestionario basado en el modelo adaptado de Shavelson y Stern (1981/1983), utilizado por Hernández (1997) y Afonso Martín (2003) Está conformado por 80 ítems (en formato pregunta), distribuidos en las siguientes categorías presentados en la Tabla 4: datos generales (edad, sexo, formación...), características del entorno de trabajo y formación recibida, conocimientos y recursos disponibles en el aula en el área de la geometría; y la percepción sobre sus propios conocimientos. El análisis descriptivo con los datos recogidos se ha llevado a cabo utilizando Microsoft Excel365 (v.2510).

Estos ítems incluyen preguntas cerradas y abiertas para evaluar los conocimientos previos sobre la geometría, los recursos, así como sus percepciones sobre su efectividad en el aula a las 24 maestras de Educación Infantil que participaron en la investigación. El propio formulario facilita la administración de los datos, pudiendo recopilar y analizar de los datos, permitiendo una evaluación cuantitativa y cualitativa.

Tabla 4
Variables Cuestionario: percepción del desarrollo del sentido geométrico

1.Datos generales	**2.Características del entorno de trabajo y formación recibida.**	**3.Conocimientos y recursos disponibles en el aula en el área de la geometría.**	**4.La percepción sobre sus propios conocimientos.**
Edad Y Sexo	Coordinación Entre Cursos	Editorial	Formación Externa
Formación Universitaria		Metodología lineal	
Formación pedagógica actual	Coordinación entre etapas	Horas destinadas a las matemáticas	Formación como estudiante de magisterio
Curso desarrollo de Su Docencia		Aspectos Relacionados con la geometría	Autopercepción de conocimientos
Años de experiencia docente	Formación continua	Recursos y Conocimientos para la enseñanza de la Geometría	
Agrado por las matemáticas y geometría		Espacios de trabajo en el aula	Cómo enseñar geometría

Nota. elaboración propia a partir del modelo adaptado de *Shavelson y Stern (1981/1983)-80 items.* Véase *Anexo I.*

3.2.1.2 Escala" Actitud ante las matemáticas-EAM"

Para el análisis de las actitudes, se utilizó como instrumento la *Escala de actitudes hacia las matemáticas-EAM*, Auzmendi (1992).

En la publicación de Auzmendi(1992) y Ursini y Sánchez Ruiz (2019) se recogen las principales escalas para medir las actitudes hacia las matemáticas, a continuación se indican las desechadas y los motivos de la escala empleada para esta investigación : Aiken y Dregrer (1961, 1974 y 1979), *Cuestionario de actitudes hacia las matemáticas*, aunque realmente medía los sentimientos y disfrute las matemáticas hacia la aritmética; Fennema y Sherman(1976), *Escala de actitudes hacia las matemáticas (Mathematics Attitude Scale,-MAS*); Tapia y Marsh (2004), *el inventario de actitudes hacia las matemáticas (The Attitude Toward Mathematics Inventory-ATMI)*, pero sin un uso significativo en investigación; Adelson y McCoach (2011), *Encuesta las matemáticas y yo*, diseñado para investigar actitudes en estudiantes de Primaria. Y en último lugar, se indica la escala escogida para esta investigación: *Actitudes hacia las matemáticas-EAM,* Auzmendi *(1992)* por ser en lengua castellana y una de las más utilizadas para analizar los factores más significativos del estudio de la actitud hacia las matemáticas cuyos ítems y factores quedan recogidos en la Tabla 5: agrado, utilidad, ansiedad, motivación y confianza (y véase Tabla 57).

Tal y como señalan Segarra-Escandón y Juliá (2024) la validez de este instrumento se estudió en otras investigaciones. Concretamente, se aplicó el Análisis Factorial Exploratorio a la EAM (Auzmendi, 1992; Flores y Auzmendi, 2015) que definieron claramente los cinco factores y concluyen que la escala tiene un modelo adecuado, lo que permitiría su uso en contextos diversos. Las escalas anteriormente citadas fueran desechadas por ser de origen americanas y diseñadas para estudiantes con características educativas diferentes.

Tabla 5

Factores e ítems "Escala de actitud hacia las matemáticas-EAM"

Factor	Ítems cuestionario
Utilidad	1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.
Ansiedad	2. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.
Ansiedad	3. Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto.
Agrado	4. Utilizar las matemáticas es una diversión.
Motivación	5. Las matemáticas son demasiado teóricas para que puedan servirme de algo.
Utilidad	6. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas.
Ansiedad	7. Las matemáticas es una de las asignaturas que más temo
Ansiedad	8. Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.
Agrado	9. Me divierte el hablar con otros de matemáticas.
Motivación	10. Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de "ciencias", pero no para el resto de estudiantes.
Confianza	11. Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo.
Ansiedad	12. Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siento incapaz de pensar con claridad.
Ansiedad	13. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.
Agrado	14. Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí.
Utilidad	15. Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional.
Utilidad:	16. Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión.
Ansiedad	17. Trabajar con las matemáticas hace que me sienta nervioso/a.

Ansiedad	18. No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas.
Utilidad	19. Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas.
Confianza	20. Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas.
Utilidad	21. Para mi futuro profesional las matemáticas son una de las asignaturas-materias más importante que tengo que estudiar.
Ansiedad	22. Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a.
Confianza	23. Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.
Agrado	24. Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.
Motivación	25. La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante.

Nota. ítems extraídos de Auzmendi (1992).

El instrumento consta de 25 ítems, de tipo Likert de 1 a 5 puntos, de esta manera los participantes pueden elegir, siendo: 1 (*Totalmente en Desacuerdo*); 2 (*En Desacuerdo*); 3 (*Normal*); 4 (*De acuerdo*); 5 (*Totalmente de Acuerdo*). Para la puesta en marcha del cuestionario a la muestra seleccionada, se ajustaron 4 ítems de las 25 preguntas del original:

-I 10. Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de "ciencias".

-I 19. Me gustaría tener una ocupación (si no trabajase de maestra) en la cual tuviera que utilizar las matemáticas.

-I 21. Para mi futuro profesional las matemáticas son una de las asignaturas-materias más importantes que tengo que seguir estudiando.

-I 25. La materia que se imparte en las clases de matemáticas (recordando nuestra etapa de estudiantes) es muy poco interesante.

Igualmente se debe tener en cuenta que la escala tiene diferentes ítems redactados de forma inversa, por lo tanto, para el estudio final de los datos hay que tener en cuenta que en este tipo de preguntas el 1 (*Totalmente en Desacuerdo*) pasaría a puntuar con un valor de 5 (*Totalmente de Acuerdo*), el 2 (*En Desacuerdo*) pasaría a puntuar con un valor de 4 (*De Acuerdo*) y así sucesivamente con los 5 resultados. De este modo y una vez convertidas las puntuaciones invertidas, la puntuación de 5 muestra el mejor resultado posible en cada uno de los ítems.

Las puntuaciones de cada uno de los factores y del total de la escala se realizará con los sumatorios de los siguientes ítems:

FACTOR I. ANSIEDAD, constituido por 9 ítems :2,3,7,8,12,13,17,18,22

FACTOR II. AGRADO, constituido por 4 ítems: 4,9,14,24

FACTOR III.UTILIDAD, constituido por 6 ítems: 1,6,15,16,19,21

FACTOR IV. MOTIVACIÓN, constituido por 3 ítems: 5,10,25

FACTOR V. CONFIANZA, constituido por 3 ítems :11,20,23

Las puntuaciones de cada factor se obtienen sumando los ítems de cada uno de ellos.

Los códigos correspondientes a los 25 ítems son los siguientes:

Los ítems que cuentan con la puntuación directa elegida por el participante son los restantes: 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 23 y 24.

TD	D	N	A	TA
1	2	3	4	5

Los ítems que están definidos para ser invertidos antes de tratar los datos de la manera expuesta previamente son los ítems: 2, 5, 7, 10, 12, 15, 16, 17, 22 y 25.

TD	D	N	A	TA
5	4	3	2	1

Además, para llevar a cabo la investigación de formas más completa, y para ahondar en las percepciones hacia la geometría, a la muestra se le realizó otro cuestionario, asemejando los factores empleados por Auzmendi; y adaptado por Sánchez González et al. (2025), la categoría se refiere a la percepción sobre sus propios conocimientos en matemáticas y geometría. Los participantes podían elegir, siendo: 1 (*de acuerdo*); 2 (*En Desacuerdo*); 3 (*sin opinión*). Se les preguntaron las siguientes cuestiones:

Tabla 6

Factores e ítems del cuestionario percepciones hacia la geometría

Factor	Ítems cuestionario geometría
Utilidad	Consideras que las matemáticas para tus estudiantes son una materia del Currículo importante: Consideras la geometría para tus estudiantes como una parte de las matemáticas importante. Las actividades de geometría deben estar basadas en actividades matemáticas informales, que son todas aquellas situaciones que no tienen como objetivo enseñar o trabajar las matemáticas en sí mismas, pero que necesitan del uso de conceptos matemáticos para poder ser llevadas a cabo, como, por ejemplo: preparar una receta, pagar en una tienda, situarse en un mapa, jugar a las cartas…
Agrado	Personalmente, las matemáticas te agradan mucho Personalmente, la geometría te agrada mucho. Consideras las matemáticas para tus estudiantes como una materia del currículo que a ellos les agrada. Consideras la geometría para tus estudiantes como una parte de las matemáticas que a ellos les agrada.
Motivación	¿Te coordinas con otros profesores del centro educativo para el área de matemáticas? La geometría debe ser la parte más importante de las matemáticas en la Educación Infantil. Las actividades de geometría deberían tener la misma importancia que los cálculos aritméticos. Las actividades de geometría deberían abarcar una gran variedad de contenidos.
Confianza	¿Te sientes seguro con tus conocimientos de matemáticas al impartir la materia con tus estudiantes? ¿Consideras que dispones de una buena formación en la didáctica de las matemáticas? ¿Consideras que dispones de una buena formación en la didáctica de la geometría? ¿Has participado en algún tipo de capacitación externa o formación individual en los últimos 3 años relacionada con la enseñanza de las matemáticas fuera del entorno educativo convencional?

3.2.1.2.1 Administración y análisis de datos

El formulario elaborado mediante de Google Forms (véase Anexo I). fue facilitado a las maestras a través de un enlace compartido en la *comunidad virtual* creada en la aplicación WhatsApp. Fueron completados de manera libre e individual, utilizando sus teléfonos móviles personales, Para la recogida y tratamiento inicial de los datos, se utilizó el programa Microsoft Excel365 (v.2510).

3.2.2 Técnicas y estrategias para la recolección de datos.

3.2.2.1 Producciones escritas de las maestras (tareas geométricas)

Las actividades geométricas diseñadas e implementadas por la investigadora se han considerado igualmente como fuente de análisis documental, debido a su estrecha vinculación con el modelo teórico seleccionado. Su contenido resulta especialmente relevante para el estudio, al constituir un material de apoyo significativo en la interpretación de los procesos formativos desarrollados.

3.2.2.2 Medios audiovisuales: videograbaciones y fotografía.

La técnica central de recogida de información fue la grabación audiovisual de todas las sesiones, lo que permitió obtener registros completos de las interacciones producidas. realizar una transcripción completa y minuciosa de los intercambios verbales. A partir de estas grabaciones se realizó una transcripción literal y exhaustiva de los intercambios verbales, conservando pausas, reformulaciones, énfasis, silencios significativos y otros matices expresivos que enriquecen la interpretación del discurso. Este procedimiento asegura la captura fiel de múltiples formas de comunicación visual, verbal y gestual, y garantiza información de calidad sobre las conductas, situaciones y acciones vinculadas al fenómeno objeto de estudio. En todas las sesiones se tomaron diversas fotografías para su posterior análisis y visualización por parte de la investigadora, por lo que la información ha quedado detallada a lo largo de todo el documento que conforma la tesis doctoral, indicando que los fines son exclusivamente pedagógicos y educativos.

Todas las sesiones fueron videograbadas con el consentimiento previo de las maestras participantes y del equipo directivo del centro educativo en el que se desarrolló la intervención. Estas grabaciones permitieron realizar un análisis detallado y en tiempo real de la práctica docente y de la implementación del modelo Van Hiele. El registro audiovisual capturó las interacciones, verbalizaciones, momentos de duda, avances y negociaciones conceptuales entre las participantes, constituyendo la principal unidad de análisis cualitativo del estudio.

3.2.2.3 Diarios reflexivos de clase.

La investigadora mantuvo un cuaderno de bitácora en el que consignó observaciones, reflexiones y notas relevantes sobre el desarrollo de la intervención. Este documento permitió contextualizar las sesiones, registrar eventos significativos e identificar interacciones relevantes, aportando datos cualitativos que complementan la información obtenida mediante las grabaciones audiovisuales. El cuaderno funcionó, así, como un anecdotario analítico en el que se documentaron brevemente acciones destacadas, comentarios espontáneos y situaciones que evidenciaron avances, dudas o dificultades en la implementación del modelo Van Hiele.

Asimismo, al finalizar cada sesión se dedicaron unos minutos de reflexión conjunta con las maestras, en los que expresaron cómo se habían sentido, qué aprendizajes consideraban relevantes y de qué modo podrían trasladarlos a su práctica en el aula. Estos espacios constituyeron un recurso adicional de carácter evaluativo y metacognitivo.

En conjunto, estas fuentes documentales permiten una triangulación metodológica que fortalece la validez interna del estudio (Creswell y Poth, 2018).

3.2.2.4 Observación participante

La investigadora ha desempeñado diferentes funciones a lo largo de la presente tesis doctoral, siendo: participante, formadora, diseñadora de actividades implementadas en la formación, observadora y evaluadora (Fuertes Camacho, 2011) de las situaciones experimentada. Por tanto, su función se denomina en este apartado como observadora participante (Cuadros, 2009).

- ✓ **La investigadora como profesora:** como propósito de informar y contribuir a una mayor competencia geométrica, ofreciendo la oportunidad a las maestras que se han presentado voluntarias para la investigación y la formación.
- ✓ **La investigadora como evaluadora**: cuyo propósito es evaluar tanto el proceso de la formación, detectando pros y contras del diseño del programa llevado a cabo; como analizando los cambios producidos al inicio y el final.

- ✓ **La investigadora como intérprete**: cuyo propósito es reconocer y confirmar significados, encontrando relaciones y haciéndolo comprensible hacia los demás agentes de la comunidad educativa.

Las observaciones en el aula se realizaron de manera sistemática, con especial atención a las interacciones entre las maestras y a las interacciones establecidas entre estas y la investigadora, así como a las estrategias didácticas empleadas durante el desarrollo de las sesiones.

3.3. Técnicas de análisis de datos

Stake (2010) señala que los investigadores pueden alcanzar el significado de los casos mediante dos estrategias fundamentales: la interpretación directa centrada en el análisis detallado de incidentes particulares y la agregación de ejemplos, que permite elaborar inferencias a partir de múltiples situaciones similares. En esta investigación se han empleado ambas estrategias, dando lugar a una comprensión más amplia y fundamentada del fenómeno estudiado.

El mismo autor destaca que la tarea esencial del investigador cualitativo es identificar aquello que resulta verdaderamente significativo y posteriormente revelarlo en un informe con el nivel de detalle suficiente para comprender el contexto (Stake, 2010). Este principio ha guiado el proceso analítico del presente estudio, en el que las observaciones exigieron una revisión sistemática y rigurosa para poder producir interpretaciones consistentes.

El análisis de datos cualitativos constituye un proceso complejo debido a la amplitud y heterogeneidad de la información recopilada, así como a la ausencia de guías procedimentales rígidas que determinen cómo operar con los datos. Con el fin de abordar este reto metodológico, el análisis se apoyó en el software MaxQDA (v.24.9.1), que facilitó la gestión, organización y tratamiento de los datos textuales. A través de este soporte informático se aplicó un proceso de codificación temática, orientado a otorgar sentido a la información, identificar patrones relevantes y estructurar categorías que apoyaran la interpretación de los resultados.

3.3.1 Protocolo de análisis e interpretación cualitativa de los datos

3.3.1.1 Transcripción

El proceso de análisis se inicia con la transcripción literal de las grabaciones, con el objetivo de disponer de un registro detallado de las interacciones producidas durante las sesiones., manteniendo pausas, énfasis, risas, miradas, silencios significativos, etc., ya que desde la perspectiva fenomenológica hermenéutica el modo en que se expresa forma parte del sentido que transmite. Posteriormente, los datos fueron anonimizados para garantizar la confidencialidad de las participantes y organizados por sesiones y actividades, facilitando así su tratamiento y análisis sistemático.

3.3.1.1.1 Criterios llevados a cabo para la transcripción cualitativa

La transcripción de los datos es una de las fases más importantes en una investigación cualitativa, ya que establece la base sobre la cual se realizará el análisis posterior. En este estudio, se ha realizado una transcripción fiel de las grabaciones audiovisuales de las sesiones de formación de las maestras, siguiendo los siguientes pasos:

1. ***Escucha y reproducción repetida:*** El primer paso consiste en escuchar las grabaciones múltiples veces para familiarizarse con el contenido. Se recomienda dividir la grabación en segmentos manejables, de no más de 10-15 minutos, para facilitar la transcripción detallada. Esta repetición permite captar los matices del lenguaje, las pausas, la entonación y otros aspectos importantes que pueden ser significativos en el análisis cualitativo (Guba y Lincoln, 1989). En este primer paso, se dividieron las grabaciones por sesiones y por actividades, lo que ayudó a la hora de escuchar el seguimiento y el proceso de las sesiones. en reiteradas ocasiones.

2. ***Transcripción literal***: La transcripción debe ser lo más precisa posible, capturando las palabras exactas de los participantes. En este proceso se deben incluir todos los detalles relevantes, como pausas, risas, titubeos, interjecciones y cualquier otro dato que pueda ofrecer información sobre el contexto o el significado de lo expresado (Saldaña, 2016). Si bien la transcripción puede ser algo extensa, su fidelidad es crucial para la interpretación posterior.

La investigadora realiza de forma detallada las transcripciones llevadas a cabo por las maestras, estas transcripciones se encuentran en el Anexo II.

3. ***Clarificación y contexto:*** Después de una primera transcripción, es importante revisar y corregir cualquier error de transcripción. En caso de que haya dificultades para entender alguna palabra o frase, debe indicarse en el texto con una nota, indicando la posible interpretación (por ejemplo, "[inaudible]") para no perder el sentido global de la interacción. En este caso, se explica la situación vivida o las dificultades detectadas por la investigadora para la transcripción.

4. ***Etiquetado de participantes y contexto***: Cada intervención debe ser etiquetada de manera que se identifique claramente quién está hablando y en qué contexto. Esto es especialmente importante cuando hay varias personas interviniendo, como en una sesión de formación. Se debe especificar el nombre o código de cada participante, así como el contexto del enunciado o la actividad que está realizando, para facilitar la vinculación entre el discurso y las acciones correspondientes. Durante la transcripción y el diálogo que se produce en la formación por las maestras, la investigadora pone el nombre real de las intervinientes para mayor facilidad, posteriormente, se codificaron esos nombres con los códigos asignados (maestra 1; maestra 2, etc.)

5. ***Formateo y revisión final:*** Una vez que la transcripción se ha completado, debe revisarse de nuevo para asegurarse de que se mantiene la coherencia en el formato y la precisión del contenido. Además, es recomendable incluir notas aclaratorias o comentarios en márgenes si es necesario para contextualizar mejor alguna parte del discurso, sobre todo si se identifican patrones recurrentes que podrían requerir una interpretación más profunda (Saldaña, 2016). Durante todo el proceso de transcripción, la investigadora pone en contexto al lector del momento concreto en el que se encuentra, detallando aquellos aspectos importantes para comprender la situación vivida.

3.3.1.2 Lectura holística y reducción fenomenológica

Se realiza una lectura abierta de cada transcripción de forma abierta, evitando realizar interpretaciones prematuras o imponer marcos conceptuales previos. El propósito es captar el fenómeno en su globalidad, atendiendo a la experiencia tal como se manifiesta. Esta lectura se apoya en la reducción fenomenológica, que implica suspender temporalmente los juicios y expectativas de la investigadora para centrarse exclusivamente en la vivencia expresada por las participantes, tal y como ellas la experimentan y describen.

3.3.1.3 Codificación

Una vez obtenidas las transcripciones, el análisis cualitativo se realiza siguiendo un proceso sistemático que permite organizar los datos y extraer conclusiones significativas. El análisis se realiza utilizando un enfoque inductivo, donde las categorías emergen a partir de los datos. Se fragmenta el texto en unidades de significado relevantes: frases, expresiones, silencios o metáforas que revelen cómo las maestras vivencian el proceso formativo.

Se aplicó un sistema de codificación temática para clasificar las observaciones de acuerdo con las directrices descritas. Este proceso supuso asignar etiquetas a los segmentos textuales que representaban unidades de sentido vinculadas a cada categoría analítica. La codificación se desarrolló de manera iterativa y dialógica, lo que implicó regresar continuamente al corpus para afinar la delimitación conceptual y ajustar el significado de las categorías emergentes. Para facilitar y sistematizar este proceso, se empleó el software MaxQDA (v.24.9.1), que permitió organizar, vincular y comparar los fragmentos codificados. Asimismo, se incorporaron notas analíticas e interpretativas destinadas a documentar la evolución de los significados, así como identificar tensiones, resistencias o momentos de transformación en las participantes a lo largo de la experiencia formativa. Con el propósito de sistematizar las tareas analíticas básicas, se ha utilizado el modelo de Miles et al. (2020):

1. ***Lectura y familiarización con los datos:*** el primer paso en el análisis cualitativo consiste en realizar una lectura repetida de las transcripciones para familiarizarse con el contenido. Esta inmersión inicial en los datos es crucial para comprender el contexto general y los posibles temas recurrentes que pueden surgir. En esta etapa, se debe evitar el uso de categorías predefinidas y permitir que los temas emerjan del propio contenido (Braun y Clarke, 2006). Se impone una primera tarea de *reducción de los datos,* consistente en simplificar y agrupar los datos brutos del registro (primer nivel de reducción) en *unidades de significado o categorías* temáticas *{categorización o* segundo nivel de reducción), a las que daremos un nombre asignándoles un código *{codificación),* de acuerdo con criterios fijados previamente sobre qué informaciones conviene tener en cuenta y a qué interrogantes hay que responder. En una primera etapa, se identificaron unidades de significado relacionadas con las dimensiones establecidas. En la segunda etapa, se categorizaron las intervenciones de las

participantes según estos niveles, observando progresiones, estancamientos o transiciones. este segundo análisis, se orientada a la *comprensión más profunda de los fenómenos* y a la *generación de hipótesis* mediante *la representación de los datos.* Para ayudar a establecer relaciones entre categorías (causales o de conjunto-subconjunto), para ellos se realizan gráficas descriptivas (mapas conceptuales, perfiles), gráficas explicativas (diagramas causales) y matrices o cuadros de doble entrada en cuyas celdas se anotan las interacciones y los significados de cada categoría.

2. ***Codificación inicial:*** la codificación es el proceso de etiquetar fragmentos específicos de los datos que contienen información relevante para el estudio. Se utiliza una técnica de codificación abierta**,** en la que se asignan códigos a segmentos de texto que capturan aspectos importantes del fenómeno estudiado (Saldaña, 2016). Los códigos pueden ser palabras, frases o incluso párrafos completos que representen ideas o conceptos clave relacionados con el razonamiento geométrico o la evolución en la comprensión de los niveles Van Hiele.

3. ***Generación de categorías:*** a partir de la codificación inicial, se agrupan los códigos en categorías más amplias que reflejan patrones comunes o temas recurrentes en las transcripciones. Este proceso se denomina codificación axial y permite identificar las relaciones entre los distintos códigos. Por ejemplo, podrían emerger categorías como "narrativas sobre la geometría", "desarrollo del razonamiento analítico" o "barreras en la comprensión de los niveles de Van Hiele" (Strauss y Corbin, 1998).

4. ***Análisis de las relaciones entre categorías:*** una vez que se han generado las categorías, es necesario explorar cómo se relacionan entre sí. Este paso implica identificar vínculos, diferencias y asociaciones que puedan aportar a la comprensión de cómo se desarrolla el razonamiento geométrico en las maestras. Por ejemplo, se puede investigar si hay una relación entre las estrategias de enseñanza utilizadas y el nivel de razonamiento geométrico que las maestras alcanzan. En esta investigación, Se agrupan las observaciones por temas y patrones comunes que surgen de la dimensiones y categorías, permitiendo una comprensión más profunda de las dinámicas observadas.

5. ***Interpretación y generación de conclusiones:*** en esta fase final del análisis, se debe interpretar el significado de las categorías y cómo estas aportan a la comprensión del fenómeno estudiado **estudio** a la luz del marco teórico inicial, para proporcionar un sentido

de entendimiento de lo que se ha observado, analizado y evaluado en forma de patrones, tendencias, explicaciones e incluso la construcción de una teoría fundamentada.

El análisis cualitativo no solo busca describir los datos, sino también explicarlos en un contexto más amplio. Para ello, se debe relacionar los hallazgos con la literatura existente sobre el razonamiento geométrico y la formación docente, identificando patrones, contradicciones o áreas que necesiten más exploración.

3.3.1.2 Dimensiones y categorías de análisis cualitativo

Cada una de estas dimensiones ofrece una perspectiva integral para comprender cómo la formación impacta en la mejora de la competencia matemática de las maestras en Educación Infantil.

3.3.1.2.1 Niveles de Razonamiento geométrico

Esta dimensión hace referencia a los diferentes niveles de comprensión que las maestras alcanzan en el razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele. Se analiza el progreso en la capacidad de las maestras para identificar, clasificar, y describir figuras geométricas, así como para razonar sobre propiedades y relaciones entre ellas a medida que avanzan en los niveles de aprendizaje. Además, en esta dimensión se recogen las opiniones, valoraciones y aprendizajes que las maestras realizan sobre el proceso formativo. Se incluyen sus reflexiones sobre cómo los enfoques pedagógicos empleados en las sesiones impactan en su práctica docente y en su desarrollo profesional, así como sus percepciones sobre las metodologías de enseñanza de la geometría.

3.3.1.2.2 Fases de Aprendizaje

Esta dimensión se refiere a las etapas a través de las cuales las maestras progresan durante el proceso de formación. Estas fases pueden incluir la familiarización con conceptos básicos, la integración de nuevos conocimientos y habilidades, y la implementación práctica en el aula. El análisis de estas fases busca identificar los cambios en la comprensión y las competencias a lo largo del proceso formativo.

3.3.1.2.3 Dimensiones de la geometría

Esta dimensión abarca las diferentes perspectivas de la geometría que se abordan en la formación, como la geometría visual, la espacial, la algebraica o la analítica. El objetivo es explorar cómo las maestras manejan y comprenden cada una de estas dimensiones dentro del marco del currículo de Educación Infantil.

3.3.1.2.4 Datos sociodemográficos

Esta dimensión hace referencia a la información contextual de las participantes en la formación, como edad, años de experiencia profesional, nivel educativo y otros aspectos relacionados con su perfil socio-profesional. Esta información puede influir en la manera en que cada participante se enfrenta a los contenidos de la formación y en su desarrollo en los distintos niveles del modelo de Van Hiele.

3.3.1.2.5 Recursos didácticos y agrupamientos

Aquí se analizan los materiales, herramientas utilizadas durante las sesiones formativas, como manipulativos geométricos, aplicaciones digitales, o recursos impresos. Se evalúa cómo estos recursos apoyan el proceso de aprendizaje y el desarrollo de competencias matemáticas, así como su efectividad en la práctica docente dentro del contexto escolar. Se analizan cómo los diversos tipos de agrupamientos contribuyen a la evolución del razonamiento por medio del debate y del lenguaje.

3.4 Triangulación de datos

La triangulación constituye una estrategia esencial para aumentar la validez de los resultados, ya que el valor de un estudio de caso no reside en su representatividad, sino en su capacidad para revelar aspectos que no son evidentes a simple vista. Según Flick (2015), implica abordar un problema de investigación desde al menos dos perspectivas, con el fin de lograr una comprensión más profunda y una interpretación más válida del fenómeno. En la misma línea, Stake (2010) afirma que su objetivo es producir afirmaciones que cualquier observador, en condiciones similares, hubiera registrado del mismo modo. Este autor distingue entre triangulación intra-métodos, que utiliza diferentes instrumentos para el mismo fenómeno, y triangulación entre métodos, basada en la combinación de técnicas para reducir sesgos; sin embargo, su finalidad no es alcanzar una verdad objetiva, sino ampliar y profundizar el análisis (Fielding y Fielding, 1986, citado en Flick, 2015).

Las prácticas de triangulación constituyen un rasgo propio de la investigación cualitativa y pueden incorporar procedimientos cuantitativos, permitiendo obtener resultados complementarios o convergentes (Flick, 2015), como ocurre en esta tesis doctoral. En este estudio, la triangulación de fuentes y de investigadores se utiliza como procedimiento de validación, comparando resultados provenientes de distintas evidencias (transcripciones, notas de campo, diarios reflexivos) y contrastando categorías con otros investigadores para garantizar la fiabilidad y credibilidad del análisis (Guba y Lincoln, 1989). La triangulación, por tanto, permite observar coincidencias o discrepancias entre estrategias metodológicas, y su interpretación se refuerza mediante la representación gráfica de categorías y relaciones (diagramas, matrices o mapas conceptuales) que facilitan la visualización de los hallazgos y la estructura del razonamiento geométrico desarrollado por las maestras. Los resultados de esta triangulación se muestran en el Capítulo 5 de la tesis doctoral: Resultados.

3.4.1 Estrategias para la triangulación

Siguiendo las indicaciones de Stake (2010) se presentan las estrategias empleadas para la triangulación de información:

-T*riangulación del investigador*: consiste en la participación de otros investigadores para observar e interpretar las mismas situaciones de estudio. En esta tesis doctoral, esta práctica fue posible gracias a las videograbaciones de las sesiones, que permitieron a los directores de tesis contrastar las observaciones y análisis realizados por la investigadora principal.

-*Triangulación de la teoría*: la participación de co-observadores permitió contrastar e interpretar conjuntamente los datos, posibilitando la triangulación de las descripciones.

-*Triangulación metodológica:* se llevó a cabo mediante la revisión comparativa de distintos registros, observaciones y documentación, con el fin de fortalecer la validez del análisis.

-*Revisión por parte de las participantes:* tras la transcripción e interpretación de los registros, se ofreció a las maestras participantes la posibilidad de revisar los textos como parte del proceso de retroalimentación. De las 23 maestras, 9 revisaron los documentos y validaron su contenido.

3.5 Redacción del informe y reflexión Final

El informe de las transcripciones llevadas a cabo se encuentra en el Anexo II de la presente tesis doctoral. El conjunto de estos instrumentos y técnicas proporcionan una base sólida para el análisis de datos, asegurando que se recoge la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje en el contexto del estudio de caso. Se elabora un informe que sintetiza los hallazgos, resaltando tanto las fortalezas como las áreas de mejora en la enseñanza de la geometría, este informe se desarrolla en el *Capítulo 6. Discusión y Conclusiones.*

3.6. Consideraciones éticas

3.6.1 Tratamiento de la información y la confidencialidad.

La preocupación por la integridad de las personas participantes en el proceso investigador clásicamente ha sido compartida por diversas asociaciones de investigación educativa como la APA (*American Psychological Association).* A continuación, y siguiendo los códigos deontológicos para la investigación con sujetos humanos redactadas por la APA, la investigadora debe:

1. Evaluar la aceptabilidad ética de lo que se propone investigar.

2. Establecer y mantener una práctica ética durante la investigación.

3. Informar a los que participan de las características de la investigación.

4. Establecer una relación sincera y honesta con los participantes.

5. Respetar la libertad individual a participar en cualquier momento de la investigación.

6. Establecer un acuerdo claro entre investigador y participantes que defina con exactitud las responsabilidades de cada uno en la investigación.

7. Proteger a los participantes de los riesgos físicos o mentales o de cualquier incomodidad.

8. Informar de los resultados de la investigación y cómo serán utilizados.

9. Mantener la confidencialidad de la información que se recoja de los participantes.

Para cumplir con los códigos deontológicos, la investigadora ha empleado las siguientes cuestiones (Sandín, 2003):

3.6.1.1 Códigos éticos

- El *consentimiento informado,* que implica que los sujetos de la investigación tienen el derecho a ser informados de que van a ser estudiados, el derecho a conocer la naturaleza de la investigación y las posibles consecuencias de los estudios en los cuales se involucran. Este código ético supone que los sujetos deben aceptar de forma voluntaria su participación y, además, que su aceptación debe estar basada en una información completa y abierta sobre el alcance, el proceso y las posibles implicaciones de la investigación.

- La *privacidad y confidencialidad,* para garantizar la protección de la identidad de las personas que participan en la investigación. Además, ninguna persona debe sufrir daño ni sentirse incómoda como consecuencia del desarrollo de la investigación.

- La *estancia en el campo.* Dos de las cuestiones fundamentales relacionadas con el trabajo de campo se refieren a: la decisión de *adoptar una modalidad de observación abierta o encubierta* (¿hay que hacer explícito o no el propósito de observar en el contexto de estudio?) y la *identidad o presentación del propio investigador* a las personas y/o grupos participantes en la investigación.

3.6.1.2 Custodia y difusión de resultados.

La investigadora siguiendo las directrices de Booth et al. (2001) se compromete con el siguiente decálogo:

-La investigadora actúa éticamente, no roba plagiando o apropiándose de los resultados de otros colegas siendo la investigadora de carácter único y de su propiedad, manteniendo por tanto la originalidad de la investigación.

- La investigadora no miente informando erróneamente sobre las fuentes o inventando resultados.

- La investigadora no destruye fuentes y datos para quienes vengan después.

-La investigadora responsable no presenta datos de cuya veracidad tienen razones para dudar.

- Una vez realizada la investigación, la utilización de los resultados y la veracidad de las conclusiones obtenidas fueron consensuadas con los participantes y con las personas que forman la muestra del trabajo.

-Los resultados escritos en los informes no serán difíciles de comprender para los lectores, ni se ocultarán resultados.

Para ello, la investigadora presenta la carta firmada y presentada en el Anexo IV *"Carta de consentimiento"* de todo el proceso de la investigación. Además, las maestras participantes también disponen de su Carta firmada, presentada en el Anexo IV, donde se indica de forma clara la posibilidad de retirarse del estudio en el momento en que lo estime pertinente. Con relación a la confidencialidad en los estudios cualitativos no siempre es posible proteger la identidad de la persona que se estudia, no basta ocultar o cambiar el nombre ya que los miembros de grupos vinculados con la persona pueden descubrir de quién se trata por medio de los otros datos que se mencionan en el estudio, como edad, género, ocupación, escolaridad, medio económico, social, cultural o religioso. Es por ello, que tanto el centro educativo, como el equipo directivo del centro en el que se lleva a cabo, así como todas las maestras implicadas, son conocedoras y firman el Documento aceptando que sus datos (no personales) serán datos para el uso de la tesis doctoral, al igual que las imágenes grabadas o fotografiadas que sirvan con evidencias.

Hay que confirmar que para este estudio solo se han incluido los datos aportados por las participantes-maestras que realizaron el programa de formación, y previamente cumplimentaron el Documento de Compromiso de confidencialidad informado en el que se señalaba que la participación en esta investigación es estrictamente voluntaria y la información que se recoja será confidencial.

Las respuestas quedan custodiadas mediante un usuario y clave por la investigadora. Las respuestas serán anónimas. La recogida y tratamiento de los datos garantiza que no sea posible establecer de forma reversible el origen de las respuestas.

Los datos personales no aparecerán en ningún documento, tan sólo se mostrarán en el resultado global a modo de estadística. Para ello, cada maestra está identificada por un número asignado tanto para las transcripciones como para el análisis de los datos, siempre manteniendo el mismo número asignado durante toda la investigación. El listado de participantes estará custodiado por la investigadora.

Los datos recogidos son custodiados por la propia investigadora, junto con sus directores de tesis. Los compromisos firmados por parte del centro, así como de los participantes quedan registrados en una carpeta y en un armario bajo llave.

La información recogida para el análisis de datos a través de los diversos programas informáticos, quedan registrados y custodiados en una carpeta con contraseña, por parte de la investigadora. Por tanto, se garantiza la confidencialidad y el anonimato de los participantes.

3.7. Procedimiento: diseño y fases de la investigación

A continuación, en la Tabla 7 se presenta el esquema metodológico sistematizado de las fases de investigación.

Tabla 7

Esquema del diseño metodológico del estudio

Fase	Técnica	Instrumento	Enfoque
1. Identificación	Enfoque documental	Revisión bibliográfica	Mixto
2. Solicitud de compromisos	Trabajo de campo	Documentos Comité de ética	Cualitativo
3. Diagnóstico	Formularios y observación	Cuestionarios y Test	Mixto
4. Programación y diseño	Trabajo de campo	Fuentes documentales	Cualitativo
5. Intervención	Observación	Grabación y diario de campo	Cualitativo
2 y 5. Evaluación	Formularios	Cuestionarios y Test	Mixto
6. Análisis	Trabajo de campo	Softwares informáticos	Mixto

Nota. elaboración propia.

3.7.1 Diseño de la investigación y cronograma

A continuación, en la Figura 5, se presenta el diseño de la investigación y el cronograma llevado a cabo:

Figura 5

Cronograma de la investigación en el centro educativo

	Nov. 2023	**Dic. 2023**	**Ene. 2024**	**Feb. 2024**	**Mar. 2024**	**Abr. 2024**	**May. 2024**
FASE 1: Reunión equipo directivo y maestras. Recogida autorizaciones.							
FASE 2: Recogida de información: cuestionarios y test							
FASE 3: Puesta en marcha programa							
FASE 4: Postest							

Fase 1- Reunión con el equipo de dirección del centro para exponer el proyecto y Proceso de recogida de consentimiento. Firma del equipo directivo del Documento de Comité de Ética. Reunión con el claustro docente para exponer el proyecto y obtener el consentimiento informado. Proceso de recogida de consentimientos individuales.

Fase 2-. Proceso de recogida de información previa al programa de formación.

Fase 3- Puesta en marcha de la evaluación individual y desarrollo del programa "*Tocando la geometría*".

Fase 4: - Proceso de recogida de información posterior al programa de formación.

3.7.2 Duración del programa

El programa "*Tocando la geometría"* se llevó a cabo en el periodo comprendido de noviembre de 2023 hasta mayo de 2024.

Las maestras asistieron al programa de formación durante 8 sesiones, con una hora de duración cada una. La formación se desarrolló uniendo dos sesiones. Los días de implementación fueron los miércoles, ya que era el día de la semana que el centro tiene la asignación para la formación, juntas de claustro, reuniones…Se realizaron fuera del horario laboral del profesorado, comenzando en enero hasta mayo del 2024, en horario de 17:15h a 19.15h de manera presencial. Concretamente las sesiones se desarrollaron los días 31/01/24, 28/02/24, 06/03/2024, 24/04/2024. El postest se realizó de forma individual en el mes de mayo entre las maestras participantes y la investigadora.

El lugar donde se desarrollaban las sesiones fue cedido por el propio centro, siendo un aula de Infantil, elegida por ser un aulario grande, con mesas dispuestas en equipos, tener un espacio amplio de asamblea y disponer de pizarra digital interactiva (PDI) para poder proyectar.

3.7.3 Contexto del estudio

El centro en el que se llevó a cabo la investigación fue elegido por los siguientes motivos:

-La investigadora fue maestra en el centro durante 12 años, y aunque parte del equipo directivo es distinto, aceptaron y mostraron mucho interés por poder formar parte del proyecto.

-Gran parte del claustro docente lleva muchos años en el centro, esto facilita la formación y su posible continuidad o líneas futuras en la transferencia de conocimientos adquiridos tanto entre ellas como en las futuras programaciones de aula.

-Siendo un colegio de línea 6, suponía una ventaja a la hora de poder obtener una muestra con las características de la investigación (maestras de Infantil en activo, de un mismo centro y que quieran participar de forma voluntaria).

-El colegio al formar parte de un grupo educativo de 8 colegios por toda la Comunidad de Madrid, ofrece una posible vía de formación futura.

3.7.4 Situación y entorno

El presente estudio se lleva a cabo en el Colegio Valdefuentes, situado en el noroeste de la Comunidad de Madrid, en el Barrio de Sanchinarro y es uno de los 8 centros educativos de la Comunidad de Madrid que conforman el grupo educativo Educare. Es un centro de titularidad mixta: concertada en las etapas de Infantil segundo ciclo, Primaria, y Secundaria; y privado en las etapas no obligatorias (Infantil primer ciclo, Bachillerato y Bachillerato internacional). Sus comienzos se inician en el curso académico 2006-2007. El centro es de iniciativa cristiana. Los órganos de gobierno están conformados por una directora general, una jefa de estudios y una directora por etapa educativa (Infantil, Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato).

- *Educación Infantil*:

La etapa de Educación Infantil del centro está organizada en línea 6 y dispone de personal de apoyo tanto en el primer como en el segundo ciclo. La jornada escolar del alumnado es partida, con horario de 9:00 a 12:30 y de 16:00 a 17:00 horas. En el caso del profesorado, el horario lectivo se extiende de 8:45 a 15:00 horas, con una hora destinada a la comida y el descanso. Además, los miércoles se destinan a reuniones de coordinación, claustros u otros encuentros institucionales que se desarrollan fuera del horario escolar con alumnado. Las maestras rotan anualmente por curso, de modo que cada año asumen la tutoría de un grupo nuevo dentro de su ciclo y etapa. Cada curso cuenta con una coordinadora, que actúa como enlace y portavoz entre el equipo docente y la dirección del centro.

- *Familias*

Las familias del centro educativo presentan mayoritariamente un nivel socioeconómico medio-alto, lo que se refleja tanto en los recursos disponibles para la educación de sus hijos como en el acceso a actividades complementarias y materiales de apoyo educativo.

3.7.5 Participantes

La población participante en este estudio estuvo conformada por 24 maestras de la etapa de Educación Infantil del Colegio Valdefuentes, quienes se inscribieron de manera voluntaria tras recibir una explicación detallada del proyecto. La participación se formalizó una vez obtenida la autorización del Equipo Directivo del centro educativo (véase Anexo IV).

La composición del grupo fue diversa en cuanto a funciones dentro de la institución: una de las participantes ejercía como directora de la etapa de Infantil; dos maestras pertenecían al primer ciclo, una docente desempeñaba funciones de apoyo y formaba parte del equipo de orientación, y dos impartían docencia tanto en Educación Infantil como en Educación Primaria.

Con el fin de obtener información inicial sobre el perfil profesional, concepciones y formación previa de las maestras participantes, se aplicó un cuestionario diagnóstico, cuyos resultados preliminares fueron presentados en el Congreso AIDIPE 2024 (Sánchez González et al., 2024) y se analizan en el *Capítulo 5* de esta tesis.

Tras la primera sesión formativa, una de las maestras decidió abandonar el proceso, dado que su participación respondía a la sustitución temporal por baja de maternidad. En consecuencia, no asistió al resto de sesiones ni al postest final. Por este motivo, la muestra definitiva quedó conformada por 23 maestras de Educación Infantil.

3.7.5.1 Edad

El 62.5 % de las maestras que han participado en la investigación se encuentran en la franja de edad entre 41 y 45 años; el 16.7 % entre los 25 y 30 años; el 12.5% tiene más de 45 años y el 8.3% tiene entre 36 y 40 años.

3.7.5.2 Experiencia en aula

El 54.2% de las maestras que han participado en la investigación tienen una experiencia entre 16 y 20 años; el 20.8 % llevan más de 20 años; el 12.5 % tienen una experiencia entre 1 y 5 años; el 11% tienen un bagaje entre 6 y 10 años y el 5% entre 11 y 15 años.

3.7.5.3 Formación pedagógica

Las maestras que han participado presentan diversos perfiles formativos, en la Tabla 8 se detalla la formación académica y maestras con esa formación:

Tabla 8

Formación previa de las maestras

Formación	N.º de maestras
Diplomatura	11
Grado	4
Doble Grado	3
Licenciatura	6
Experto/especialidad o máster	6
Mención	2

3.7.4 Institución educativa en la que se ha formado

Las maestras participantes en la investigación cursaron sus estudios en diversas instituciones de educación superior, lo que refleja una formación inicial heterogénea dentro del ámbito universitario. A continuación, en la Tabla 9 se presentan las universidades en las que realizaron su formación para titularse como maestras de Educación Infantil:

Tabla 9

Instituciones universitarias de magisterio en las que se formaron las maestras participantes

Institución	N.º de maestras
Universidad Autónoma de Madrid	5
CES Don Bosco	4
Centro universitario Villanueva	8
Universidad Pontificia Comillas	2
Universidad Complutense de Madrid	1
UNIR	2
La Salle	1
E.U Ave María Granada	1
Universidad de Murcia	1

CAPÍTULO 4: DISEÑO DEL PROGRAMA *"Tocando la geometría"*

Este capítulo presenta el diseño y desarrollo del programa formativo "*Tocando la geometría"*, dirigido a maestras de Educación Infantil con el objetivo de fortalecer su razonamiento geométrico y su competencia didáctica. El programa se fundamenta en el modelo Van Hiele, utilizando sus niveles y Fases de Aprendizaje como guía metodológica para promover progresiones reales en el sentido geométrico docente.

La propuesta adopta una estructura secuenciada, basada en actividades manipulativas, reflexivas y colaborativas que permiten activar y transformar los conocimientos previos. Las actividades propuestas abordan tareas vinculadas a la geometría unidimensional, bidimensional y tridimensional, articuladas según las fases del aprendizaje descritas por Van Hiele.

A continuación, se presentan los objetivos formativos del programa, explicitando la relación entre las actividades desarrolladas y las fases del modelo, con el fin de mostrar cómo sus principios teóricos se concretan en una intervención real de formación docente.

4.1 Objetivo general del programa

Diseñar e implementar un programa formativo, fundamentado en el modelo de Van Hiele, orientado a favorecer el avance del profesorado de Educación Infantil desde el nivel 1 (visualización) al nivel 2 (análisis) de razonamiento geométrico, con el fin de fortalecer su comprensión de los conceptos geométricos y su aplicación didáctica en el aula.

4.1.1 Objetivos específicos del programa

OE1. Identificar y reconocer figuras geométricas planas y cuerpos geométricos a partir de sus características visuales globales, propias del nivel de visualización del modelo de Van Hiele.

OE2. Favorecer el reconocimiento y el análisis de elementos geométricos unidimensionales, como puntos y líneas, así como de sus relaciones básicas (dirección, longitud, continuidad y posición), promoviendo el tránsito desde una percepción visual global hacia la identificación de sus propiedades, en coherencia con los niveles 1 y 2 de razonamiento geométrico del modelo de Van Hiele.

OE3. Analizar las propiedades básicas de las figuras geométricas planas y de los cuerpos geométricos (lados, vértices, caras, relaciones espaciales), avanzando hacia un razonamiento de tipo analítico.

OE4. Establecer relaciones entre diferentes figuras geométricas a partir de la comparación de sus propiedades, favoreciendo la clasificación y el uso de un lenguaje geométrico progresivamente más preciso.

4.2 Módulos de instrucción y justificación de la selección de contenidos

Tal y como expone López de Silanes (2012), se denomina módulos de instrucción a las actividades educativas de cada una de las Fases de Aprendizaje, y deben estar diseñados para utilizarlos como herramienta de investigación. La selección y organización de los contenidos del programa "*Tocando la geometría*" responde a una lógica progresiva entre dimensiones geométricas, iniciándose en la geometría unidimensional como base para la comprensión de la bidimensional y, posteriormente, de la tridimensional, en coherencia con lo expuesto en el apartado de justificación, donde se argumenta el carácter acumulativo y progresivo del aprendizaje geométrico. En la Tabla 10 se enumeran las actividades implementadas en el programa "*Tocando la geometría*". La numeración responde a su organización según las dimensiones de la geometría y las Fases de Aprendizaje del modelo teórico adoptado.

Así, la actividad 1 se corresponde con el inicio de la formación y se enmarca en la geometría unidimensional (con un total de 8 actividades). A partir de la actividad 9 se inicia la geometría bidimensional, comenzando con la fase 1 del modelo, y así sucesivamente. Las actividades se han organizado atendiendo, en primer lugar, a las dimensiones de la geometría (unidimensional, bidimensional y tridimensional) y, dentro de cada una de ellas, a las Fases de Aprendizaje del modelo de Van Hiele. De este modo, la numeración no responde estrictamente al orden de implementación en las sesiones, sino a la estructura teórica del programa.

Por último, se ha mantenido la numeración original de algunas actividades debido a decisiones adoptadas durante el diseño inicial del programa (inicialmente se diseñó un bloque específico de actividades sobre transformaciones, especialmente en la geometría bidimensional, posteriormente en el análisis de tomó la decisión de unificarlo a ese bloque, pero manteniendo la numeración, con el fin de preservar la coherencia interna del diseño.

Tabla 10

Actividades implementadas en la formación

Título de la Actividad	Medios y Materiales Didácticos	Agrupamiento
1.Recordando los tipos de líneas	Medios Impresos	Pequeño Grupo + Gran Grupo
2.Definiendo los tipos de líneas	Medios Impresos+ Medios Audiovisuales	Pequeño Grupo + Gran Grupo
3.Descubriendo los ángulos	Medios Impresos	Gran Grupo
4.Ángulos y líneas en una misma imagen	Medios Impresos	Gran Grupo
5.Conociendo el Geoplano	Materiales Manipulativos	Pequeño Grupo
6.Bingo geométrico	Materiales Manipulativos	Gran Grupo
7.Yo dibujo tu dibujo	Medios Impresos	Pareja
8.Kahoot	Medios Digitales	Individual
9. ¿Qué era un polígono?	Materiales Manipulativos	Gran Grupo
10.Clasificando Polígonos	Materiales Manipulativos	Gran Grupo
11.Descubriendo los Cuadriláteros con Geoplanos 3x3	Medios Impresos	Gran Grupo
12.Doblado de papel	Medios Impresos	Individual
13.Adivina adivinanza, mi triángulo.	Medios Impresos	Gran Grupo
14.Analizando los cuadriláteros	Medios Impresos	Gran Grupo
15.Yo tengo, quién tiene	Materiales Manipulativos	Gran Grupo
16.Teselamos con Pattern Blocks	Materiales Manipulativos	Pequeño Grupo
17.Hundir la Forma	Materiales Manipulativos	Pareja
18.Artistas matemáticos	Medios Impresos	Pequeño Grupo
19.Descubriendo los cuerpos geométricos	Materiales Manipulativos	Gran Grupo
20.Clasificando cuerpos geométricos	Materiales Manipulativos	Gran Grupo
21 ¿Qué tienes?	Materiales Manipulativos	Pareja
22.El cuadro de doble entrada tridimensional	Medios Impresos	Gran Grupo
23. ¿Quién es quién? Geométrico	Materiales Manipulativos	Pareja
24.Formando Formas	Materiales Manipulativos	Pequeño Grupo
25.Simetría triángulos	Medios Impresos	Individual
26.Diagonal y simetría cuadriláteros	Medios Impresos	Gran Grupo
27.Sumando ángulos	Medios Impresos	Pequeño Grupo
28.Descubriendo propiedades redondas	Medios Impresos	Individual
29.Completando bi-información	Medios Impresos	Pequeño Grupo
30.Concurso final	Medios Audiovisuales	Gran Grupo

4.3 Descripción de las actividades

Utilizando el modelo de Van Hiele como herramienta para programar, se proponen a continuación las cinco fases secuenciales de aprendizaje para ayudar al profesorado participante a recuperar y progresar en sus conocimientos geométricos. En la Tabla 11 se muestran las actividades de forma detallada atendiendo a las diferentes dimensiones y a las fases.

Tabla 11

Actividades implementadas atendiendo a las dimensiones de la geometría y a las Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele

	Geometría unidimensional	**Geometría bidimensional**	**Geometría tridimensional**
Fase de Aprendizaje 1: Información	1	9	19
Fase de Aprendizaje 2: Orientación dirigida	2	10, 12,14	20
Fase de Aprendizaje 3: Explicitación	3,4,5	11, 13, 15, 25,	21
Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre	6, 7	16, 17, 24, 26,27, 28,29	22, 23
Fase de Aprendizaje 5: Integración	8, 18	8, 18, 30	8, 18, 30

-FASE DE APRENDIZAJE 1: INFORMACIÓN-

A continuación, se presentan en las Tablas 12, 13 y 14; las actividades correspondientes a la primera Fase de Aprendizaje.

Tabla 12

Actividad 1. Recordando los tipos de líneas

Fase de Aprendizaje 1: Información	**Geometría unidimensional**
Descripción de la actividad:	En esta actividad, se les proporciona a las maestras una plantilla con imágenes de diferentes tipos de líneas: recta, semirrecta, curva, poligonal abierta y poligonal cerrada. Debajo de cada imagen, la plantilla contiene una tabla vacía en la que las maestras deberán escribir una definición personal de cada tipo de línea. A medida que observan las figuras, deberán usar su propio lenguaje geométrico para describir las características que identifican en cada tipo de línea, por ejemplo, cuántos puntos tiene, cómo se extiende, si es continua o tiene segmentos, entre otros aspectos. Una vez que todas las maestras hayan completado sus definiciones, se realizará un resumen grupal en el que se discutirá lo que cada una ha escrito. Para ello, la Pizarra Digital Interactiva (PDI) se utilizará para visualizar las imágenes de las líneas y facilitar la discusión grupal, asegurándose de que todas las maestras comprendan las definiciones correctas de cada tipo de línea. La actividad está diseñada para ayudar a las maestras a reconocer y describir las líneas geométricas de manera clara, promoviendo el uso de un lenguaje geométrico apropiado.
Objetivos	- Observar y describir diferentes tipos de líneas geométricas (recta, semirrecta, curva, poligonal abierta, poligonal cerrada) utilizando lenguaje geométrico propio, desarrollando una comprensión inicial de sus características. - Completar la tabla con las definiciones personales de los diferentes tipos de líneas, utilizando el conocimiento adquirido y la observación directa de las imágenes. - Fomentar el trabajo colaborativo y la reflexión grupal al poner en común las definiciones escritas, ayudando a las maestras a afianzar sus conocimientos sobre las características de las líneas geométricas. - Revisar y comparar las definiciones de las líneas en el grupo, asegurando que todas las maestras tengan una comprensión precisa de las características geométricas, mientras se utilizan ejemplos visuales en la PDI.
Agrupamientos	Primero en pequeños grupos y luego en gran grupo.
Recursos	Anexo III

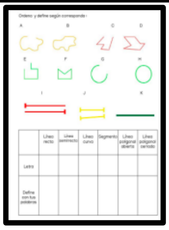
	
Consigna	Observa atentamente las imágenes de los diferentes tipos de líneas que aparecen en la plantilla (recta, semirrecta, curva, línea poligonal abierta y línea poligonal cerrada). A continuación, completa la tabla escribiendo, con tus propias palabras, una definición para cada tipo de línea. Para ello, puedes ayudarte de preguntas como: ¿cómo es la línea?, ¿tiene principio o final?, ¿está formada por segmentos?, ¿es continua o presenta cambios de dirección? Una vez completada la tabla, comparte tus definiciones con el resto del grupo y participa en la puesta en común, comparando las distintas respuestas y revisando colectivamente las características de cada tipo de línea.

Tabla 13

Actividad 9. ¿Qué era un polígono?

Fase de Aprendizaje 1. Información	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad:	En esta actividad, la instructora presenta a las maestras una serie de figuras geométricas bidimensionales de tamaño grande, hechas con papel blanco. Cada figura está numerada para facilitar su identificación durante la discusión. Las figuras tienen diversas características geométricas, y el propósito es que las maestras, mediante el diálogo grupal, analicen si cada figura se considera un polígono o no. A medida que las maestras observan las figuras, deben recordar los elementos clave que definen a los polígonos, como el número de lados, las líneas cerradas y si las figuras cumplen con las condiciones necesarias para ser clasificadas como polígonos. La instructora guiará el proceso de reflexión, planteando preguntas como: • *¿Qué características tienen estas figuras?* • *¿Cuáles creéis que se pueden considerar polígonos y cuáles no?* El objetivo es que las maestras compartan sus criterios de clasificación, analicen en grupo las propiedades de las figuras y aprendan a distinguir entre polígonos y no polígonos utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Esta actividad promueve la observación, el análisis colaborativo y el uso de terminología geométrica.

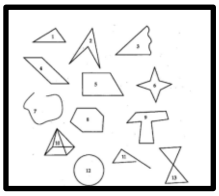
Objetivos	- Observar las figuras geométricas y reconocer sus características clave (como el número de lados y la forma cerrada) para determinar si son polígonos o no polígonos. - Desarrollar el lenguaje geométrico adecuado al explicar y compartir en grupo las características observadas que definen a los polígonos, utilizando términos como lados, líneas cerradas y figuras planas. - Reflexionar de manera grupal sobre las características de las figuras y llegar a un consenso sobre los criterios que permiten clasificar las figuras como polígonos o no, promoviendo el diálogo y el intercambio de ideas. -: Reforzar el concepto de polígono al comparar las figuras observadas y discutir cuáles cumplen con las condiciones necesarias para ser clasificadas como tal.
Agrupamientos	Gran grupo
Recurso	Anexo III 
Consigna	Observa atentamente las figuras geométricas que se presentan. A continuación, reflexiona sobre cada una de ellas y responde: ¿consideras que es un polígono o no? Justifica tu respuesta utilizando las características que conoces sobre los polígonos. Participa en la puesta en común explicando tus decisiones y escucha las aportaciones del resto del grupo. Entre todas, tratad de llegar a un acuerdo sobre qué características debe cumplir una figura para ser considerada un polígono.

Tabla 14

Actividad 19. Descubriendo los cuerpos geométricos

Fase de Aprendizaje 1. Información	**Geometría tridimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, la instructora presenta a las maestras un conjunto de cuerpos geométricos de madera dispuestos en el suelo, con la intención de que las maestras los observen y los toquen para identificar sus propiedades. Se les proporciona un segundo conjunto de figuras, idéntico al que está en el suelo, para que puedan manipularlas y compararlas directamente. La investigadora les indica que se concentren en aspectos básicos como la forma de la base, si las figuras tienen caras planas o curvas, vértices, aristas, y otras

	características visibles. El objetivo no es que las maestras conozcan los nombres exactos de los cuerpos geométricos, sino que empiecen a reconocer y describir las figuras usando su percepción táctil y visual. Durante la actividad, las maestras irán tocando cada figura, observando cómo se sienten y cómo se ven, para posteriormente compararlas y poner en común sus observaciones. El objetivo es fomentar el reconocimiento de las formas geométricas a través de la observación directa y la manipulación, desarrollando su capacidad para diferenciar y clasificar figuras sin necesidad de tener conocimientos matemáticos formales.
Objetivos	- Observar y tocar los cuerpos geométricos, identificando sus propiedades básicas como la forma de la base, las caras, los vértices y las aristas, sin necesidad de conocer su nombre formal. - Describir y comparar las figuras observadas y tocadas, utilizando el lenguaje geométrico básico, y justificar las diferencias percibidas entre las figuras. - Fomentar el desarrollo del reconocimiento táctil y visual de las figuras, combinando la percepción del tacto con la vista para identificar sus características principales. - Reflexionar en grupo sobre las observaciones realizadas, compartiendo las percepciones y explorando posibles formas de nombrar y diferenciar los cuerpos geométricos a partir de sus características observables.
Agrupamientos	Gran grupo
Recursos	Cuerpos geométricos de madera 
Consigna	Observa y manipula los cuerpos geométricos que tienes disponibles. Tócalos, gíralos y examínalos detenidamente para identificar sus características. A continuación, describe lo que observas utilizando tus propias palabras. Para ayudarte, puedes fijarte en aspectos como: ¿qué forma tiene la base?, ¿tiene caras planas o curvas?, ¿presenta aristas o vértices?, ¿cómo es al tacto? Compara las diferentes figuras entre sí, identificando semejanzas y diferencias. Posteriormente, participa en la puesta en común compartiendo tus observaciones con el grupo y escuchando las aportaciones de las demás, con el objetivo de reconocer y diferenciar los distintos cuerpos geométricos a partir de sus características.

-FASE DE APRENDIZAJE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA-

A continuación, se presentan en las Tablas 15,16,17,18 y 19; las actividades correspondientes a la segunda Fase de Aprendizaje.

Tabla 15

Actividad 2. Definiendo los tipos de líneas

Fase de Aprendizaje 2: Orientación dirigida.	**Geometría unidimensional**
Descripción de la actividad:	En esta actividad, las maestras trabajarán en dos partes para reforzar y consolidar su comprensión sobre las líneas geométricas. En la primera parte, recibirán una plantilla con varias actividades. La primera actividad consistirá en completar una tabla que tiene varias columnas. En esta tabla deberán unir las definiciones de las líneas (como recta, curva, paralela, perpendicular) con su símbolo correspondiente y su nombre. Este ejercicio les ayudará a relacionar y consolidar la teoría de las líneas con su representación visual. En la segunda parte, se les mostrarán fotografías de entornos reales (por ejemplo, imágenes de calles, edificios, muebles, etc.), y las maestras deberán observar y describir los tipos de líneas que aparecen en esas imágenes. Deberán utilizar el lenguaje geométrico aprendido previamente para identificar las líneas en contextos reales y explicar con sus propias palabras qué tipo de líneas son las que están observando. La actividad tiene como objetivo no solo que las maestras reconozcan y clasifiquen las líneas, sino también que puedan aplicar ese conocimiento en situaciones cotidianas, mejorando su capacidad para observar y describir el mundo a su alrededor desde una perspectiva geométrica.
Objetivos	- Relacionar las definiciones de las líneas con sus símbolos y nombres en una tabla, reforzando el conocimiento básico sobre los tipos de líneas (rectas, curvas, paralelas, perpendiculares). - Aplicar el conocimiento de las líneas geométricas a través de la observación y descripción de fotografías de entornos reales, utilizando el lenguaje geométrico adecuado (por ejemplo, paralela, recta, curva, perpendicular). - Fomentar la observación activa y la capacidad de descripción de las líneas en contextos cotidianos, ayudando a las maestras a comprender cómo las líneas geométricas se manifiestan en el mundo real. - Desarrollar la habilidad de comparar y contrastar diferentes tipos de líneas, utilizando ejemplos reales y la terminología geométrica adecuada, para fortalecer la comprensión de las relaciones entre las figuras geométricas.

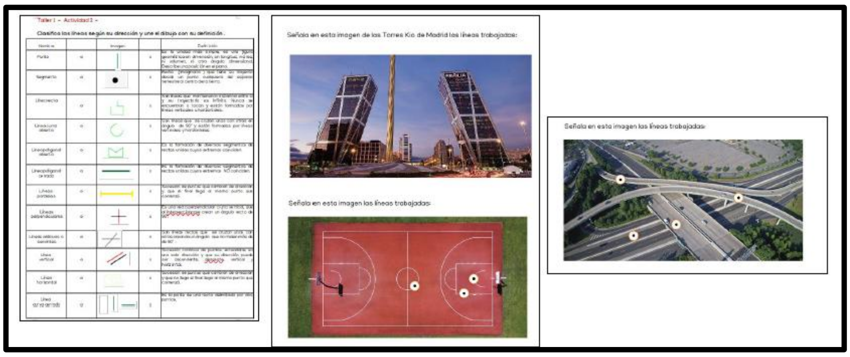
<table>
<tr><td>Agrupamientos</td><td>Primero en pequeños grupos y luego en gran grupo.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>Anexo III

</td></tr>
<tr><td>Consigna</td><td>Primera parte
Completa la tabla que se te proporciona relacionando cada tipo de línea con su definición, su nombre y su símbolo correspondiente. Para ello, observa atentamente cada elemento y establece las correspondencias adecuadas entre ellos (recta, curva, paralela, perpendicular).
Segunda parte
Observa las imágenes de los entornos reales que se presentan. Identifica en ellas los diferentes tipos de líneas que aparecen y descríbelas utilizando el lenguaje geométrico trabajado previamente.
Para ayudarte, puedes fijarte en cuestiones como: ¿las líneas son rectas o curvas?, ¿hay líneas paralelas o perpendiculares?, ¿cómo se relacionan entre sí?
Trabaja primero en pequeño grupo compartiendo tus observaciones y, posteriormente, participa en la puesta en común con el gran grupo, explicando y justificando tus respuestas.</td></tr>
</table>

Tabla 16

Actividad 10. Clasificando Polígonos

<table>
<tr><td colspan="2">Fase de Aprendizaje 2. Orientación dirigida</td><td>Geometría bidimensional</td></tr>
<tr><td>Descripción de la actividad</td><td colspan="2">En esta actividad, a las maestras se les presenta un conjunto de figuras poligonales numeradas, cada una con propiedades geométricas específicas. El objetivo es que las maestras observen, comparen y clasifiquen las figuras de acuerdo con características como el número de lados, los ángulos, si son cóncavas o convexas, y si son regulares o irregulares.
La instructora comenzará recordando qué es un polígono y luego pedirá a las maestras que se concentren en observar detenidamente las figuras</td></tr>
</table>

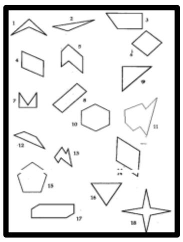
	para identificar y clasificar las figuras en grupos según sus propiedades. Las maestras deberán explicar el criterio de clasificación que están utilizando y justificar sus decisiones utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Este proceso las ayudará a desarrollar una comprensión más profunda de las diferentes formas geométricas y sus características, y a aprender a aplicar un vocabulario matemático apropiado para describir las propiedades de los polígonos. El objetivo es que las maestras sean capaces de reconocer y comparar las figuras en función de sus propiedades, aprendiendo a clasificar figuras de manera lógica y fundamentada.
Objetivos	- Observar y comparar un conjunto de figuras poligonales, identificando características como el número de lados, los ángulos, si son cóncavas o convexas, y si son regulares o irregulares. - Clasificar las figuras poligonales en diferentes grupos según criterios específicos, como el tipo de ángulos, el número de lados o la regularidad de las figuras, y justificar las decisiones de clasificación con razonamiento lógico y lenguaje geométrico. - Desarrollar la capacidad de describir las propiedades geométricas de las figuras utilizando el vocabulario adecuado, promoviendo el uso preciso de términos como cóncavo, convexo, regular e irregular. - Fomentar la reflexión grupal y el intercambio de ideas sobre las diferentes clasificaciones propuestas, permitiendo que las maestras aprendan unas de otras y fortalezcan su comprensión de las propiedades geométricas a través de la discusión.
Agrupamientos	Gran grupo
Recursos	Anexo III 
Consigna	Observa atentamente el conjunto de figuras poligonales que se presentan. A continuación, analiza sus características y clasifícalas en grupos según los criterios que consideres adecuados. Una vez realizada la clasificación, explica qué criterio has utilizado y justifica tus decisiones empleando el lenguaje geométrico adecuado. Participa en la puesta en común compartiendo tu clasificación con el grupo y comparando los distintos criterios utilizados, reflexionando sobre las semejanzas y diferencias entre las propuestas.

Tabla 17

Actividad 12. Doblado de papel: el círculo y óvalo

Fase de Aprendizaje 2: Orientación dirigida	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, cada maestra recibe un círculo y un óvalo de papel. El objetivo es que, mediante el uso de papiroflexia (doblado de papel), las maestras exploren las propiedades geométricas de estas dos figuras. Durante el proceso de doblado, deberán observar y reflexionar sobre las partes de las figuras, como los bordes (curvos), los vértices (si los hubiera), y si son polígonos o no, ya que ambos son figuras planas no poligonales por medio de las preguntas que la instructora irá haciendo. Además, las maestras deberán identificar y discutir las simetrías de estas figuras, así como si tienen o no diagonales. La actividad permite que las maestras comiencen a reconocer y describir las características geométricas de los círculos y óvalos usando el lenguaje adecuado que han aprendido en sesiones anteriores. El propósito de la actividad es reforzar el aprendizaje práctico sobre las propiedades geométricas de las figuras planas, mejorar el reconocimiento táctil y visual de las formas, y consolidar el uso del lenguaje geométrico adecuado. La investigación estará enfocada en identificar si las figuras son polígonos o no, y explorar sus características de simetría y la existencia o no de diagonales.
Objetivos	- Observar y describir las características geométricas del círculo y óvalo, identificando si son polígonos o no y utilizando el lenguaje geométrico adecuado para describir sus propiedades (curvatura, simetría, etc.). - Explorar y analizar las simetrías de las figuras, observando si son simétricas o no y justificando las observaciones en función de sus características geométricas. - Reflexionar sobre las posibles diagonales en las figuras, comparando cómo se comportan el círculo y el óvalo en términos de líneas y ángulos, y describiendo las propiedades observadas. - Recuperar y usar el lenguaje geométrico aprendido en sesiones anteriores para describir de manera clara las características de las figuras, como su forma, simetría y si poseen o no diagonales.
Dinámica	Individual
Recursos	Anexo III *Círculo y óvalo de papel*

Consigna	Recibe las figuras de papel (círculo y óvalo) y manipúlalas mediante el doblado. Realiza diferentes pliegues y observa qué ocurre en cada caso. A medida que doblas las figuras, analiza sus características. Para ello, puedes fijarte en aspectos como: ¿sus bordes son rectos o curvos?, ¿presentan vértices?, ¿se pueden considerar polígonos?, ¿qué ocurre cuando las doblas por la mitad? Explora también si las figuras presentan simetría. Intenta identificar posibles ejes de simetría mediante el doblado y observa qué partes coinciden. Reflexiona, además, sobre si es posible trazar diagonales en estas figuras. Registra tus observaciones utilizando el lenguaje geométrico trabajado previamente y participa en la puesta en común, explicando las características identificadas en cada figura.

Tabla 18

Actividad 14. Analizando los cuadriláteros

Fase de Aprendizaje 3: Explicitación	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, a cada maestra se le proporciona una plantilla con seis figuras poligonales formadas por cuatro líneas cerradas. Las figuras son diferentes entre sí, pero todas comparten la propiedad de ser cuadriláteros. El objetivo es que las maestras utilicen el lenguaje geométrico aprendido en sesiones anteriores para describir detalladamente cada figura, utilizando los conceptos de líneas y ángulos. Las maestras deben observar las figuras y responder a las siguientes preguntas: • ¿Qué tipo de líneas tiene cada figura? (rectas, curvas, paralelas, perpendiculares, etc.). • ¿Qué tipo de ángulos aparecen? (agudos, rectos, obtusos, cóncavos, etc.). • ¿Son figuras regulares o irregulares? Este ejercicio permite a las maestras practicar y aplicar el lenguaje geométrico que han ido construyendo en sesiones anteriores, sin necesidad de una respuesta única, sino usando una descripción precisa basada en lo aprendido. Se busca que las maestras sean capaces de identificar y analizar las características geométricas de las figuras de manera clara y comprensible.
Objetivos	- Identificar y describir las características geométricas de los cuadriláteros, utilizando el vocabulario geométrico adecuado para

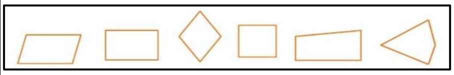
	describir las líneas (rectas, paralelas, perpendiculares, etc.) y los ángulos (agudos, rectos, obtusos, etc.). - Analizar y comparar las figuras cuadriláteras en términos de sus líneas y ángulos, reconociendo sus propiedades geométricas sin necesidad de un conocimiento formal de sus nombres o categorías. - Aplicar el lenguaje geométrico aprendido en las sesiones anteriores para describir figuras de forma detallada, utilizando conceptos como regularidad e irregularidad en función de las características observadas. - Fomentar la reflexión sobre las diferentes formas y estructuras de los cuadriláteros, incentivando la discusión y el análisis de las observaciones en grupo para llegar a conclusiones compartidas.
Agrupamientos	Gran grupo
Recursos	Anexo III 
Consigna	Observa detenidamente las figuras que se presentan en la plantilla. A continuación, describe cada una de ellas utilizando el lenguaje geométrico trabajado en las sesiones anteriores. Para ello, responde a las siguientes cuestiones: • ¿Qué tipo de líneas presenta la figura? (rectas, paralelas, perpendiculares, etc.). • ¿Qué tipo de ángulos aparecen? (agudos, rectos, obtusos, etc.). • ¿Se trata de una figura regular o irregular? Elabora una descripción clara y completa de cada figura, justificando tus respuestas a partir de las propiedades que observes. Posteriormente, participa en la puesta en común, compartiendo tus descripciones con el grupo y comparando las diferentes formas de analizar las figuras, con el fin de utilizar de manera precisa el lenguaje geométrico.

Tabla 19

Actividad 20. Clasificando cuerpos geométricos

Fase de Aprendizaje 2. Orientación dirigida	**Geometría tridimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras trabajarán en gran grupo circular para clasificar y agrupar una serie de cuerpos geométricos de madera dispuestos en el suelo. El objetivo es que identifiquen propiedades comunes entre las figuras, como su forma, tamaño, base, capacidad

	de rodar, entre otras, y justifiquen sus decisiones verbalmente. La instructora guiará el proceso de reflexión, animando a las maestras a discutir y llegar a un consenso sobre cómo agrupar las figuras, sin necesidad de conocer de inmediato su nombre o clasificación formal. Se promoverá el uso de lenguaje geométrico básico y la expresión de ideas en un contexto grupal. Posteriormente, se les dará la oportunidad de compartir los criterios de agrupación que surgieron durante la actividad. Este intercambio de ideas permitirá que las maestras aprendan de las observaciones y clasificaciones de sus compañeras, ampliando su comprensión de las propiedades geométricas y sus relaciones.
Objetivos	- Agrupar cuerpos geométricos según criterios observables (como forma, tamaño, base o capacidad de rodar) y justificar las decisiones tomadas de manera verbal, utilizando un lenguaje geométrico básico. - Desarrollar la habilidad para identificar propiedades comunes entre figuras geométricas, promoviendo el razonamiento y la argumentación a través de la discusión grupal. - Llegar a un consenso dentro del grupo sobre los criterios de agrupación, fomentando el trabajo colaborativo y la toma de decisiones conjunta en el contexto de la geometría. - Reflexionar sobre los diferentes criterios de agrupación propuestos por cada grupo y poner en común las ideas para comparar y enriquecer la clasificación colectiva.
Agrupamientos	Gran grupo
Recursos	Cuerpos geométricos de madera 
Consigna	Observa y manipula los cuerpos geométricos que se encuentran en el suelo. Examínalos detenidamente, girándolos y comparándolos entre sí. A continuación, agrupa las figuras según los criterios que consideres adecuados. Para ello, puedes fijarte en aspectos como: la forma de la base, si tienen caras planas o curvas, si presentan aristas o vértices, o si pueden rodar. Explica en voz alta el criterio que has utilizado para realizar la agrupación y justifica tus decisiones utilizando el lenguaje geométrico trabajado previamente. Participa en la discusión grupal escuchando las propuestas de las demás y colaborando en la construcción de una clasificación común, comparando los distintos criterios utilizados.

- FASE DE APRENDIZAJE 3: EXPLICITACIÓN-

A continuación, se presentan en las Tablas 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 y 27; las actividades correspondientes a la tercera Fase de Aprendizaje.

Tabla 20

Actividad 3. Descubriendo los ángulos

Fase de Aprendizaje 3. Explicitación	**Geometría unidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, se proyectará una imagen en la Pizarra Digital Interactiva (PDI) que contiene diversas líneas y ángulos superpuestos sobre una figura o escena. El objetivo es que las maestras analicen y describan las relaciones entre diferentes tipos de líneas y ángulos, como líneas paralelas, perpendiculares y rectas, en un análisis grupal. La actividad se llevará a cabo en gran grupo y las maestras participarán activamente nombrando y describiendo las características geométricas presentes en la imagen. La instructora guiará la discusión y animará a las maestras a identificar los tipos de líneas que se encuentran en la imagen (por ejemplo: ¿son rectas, curvas, paralelas, perpendiculares?) y los tipos de ángulos presentes (agudos, rectos, obtusos, etc.). A través de este proceso, se busca que las maestras construyan conjuntamente las definiciones de estos conceptos y aseguren que todas las participantes comprendan claramente las relaciones entre las líneas y los ángulos. El propósito es reforzar el conocimiento de las propiedades geométricas fundamentales y mejorar el uso del lenguaje geométrico al describir las figuras, fomentando la participación activa en el proceso de análisis y discusión.
Objetivos	- Identificar y describir los diferentes tipos de líneas (rectas, curvas, paralelas, perpendiculares) presentes en la imagen, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. - Reconocer y clasificar los tipos de ángulos que aparecen en la imagen (agudos, rectos, obtusos), relacionándolos con las líneas y la disposición en la figura. - Construir de manera colaborativa las definiciones de líneas paralelas, perpendiculares y rectas, y de los tipos de ángulos, asegurando que todas las maestras comprendan los conceptos. - Fomentar la reflexión grupal y el uso preciso del lenguaje geométrico al describir las propiedades geométricas observadas, ayudando a las maestras a relacionar conceptos de manera clara.

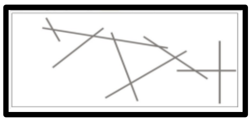
Agrupamientos	Gran grupo.
Recursos	Anexo III 
Consigna	Observa atentamente la imagen proyectada en la pizarra. A continuación, identifica y describe los elementos geométricos que aparecen. Indica qué tipos de líneas se observan (rectas, curvas, paralelas, perpendiculares) y qué tipos de ángulos puedes reconocer (agudos, rectos, obtusos). Explica cómo se relacionan entre sí las líneas y los ángulos presentes en la imagen, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Participa activamente en la discusión grupal, aportando tus ideas y colaborando en la construcción conjunta de las definiciones de los conceptos trabajados, con el objetivo de utilizar de manera precisa el vocabulario geométrico.

Tabla 21

Actividad 4. Ángulos y líneas en una misma imagen

Fase de Aprendizaje 3. Explicitación	**Geometría unidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras trabajarán con una imagen proyectada en la PDI que muestra líneas superpuestas que forman vértices e intersecciones. La instructora les pedirá que analicen detenidamente la imagen para identificar los tipos de líneas que se están cruzando, como si son rectas, paralelas, perpendiculares o curvas, y también los tipos de ángulos que se generan en los puntos de intersección. Para estructurar este análisis, las maestras tienen a su disposición una tabla que deben completar a medida que observan la imagen. En esta tabla, registrarán la información siguiente: – Nombre de las líneas que se cruzan. – Tipo de línea: clasificando las líneas según su forma o relación con otras (rectas, paralelas, perpendiculares, curvas). – Tipo de ángulo que se forma en cada intersección: como agudo, recto, obtuso, entre otros. El propósito de esta actividad es desarrollar la capacidad de observación y análisis de las partes que componen las figuras geométricas, en lugar de solo reconocer figuras completas. Esto ayudará a las maestras a comprender cómo se construyen las figuras a partir de líneas y ángulos,

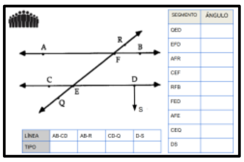
<table>
<tr><td></td><td>y cómo este conocimiento es esencial al enseñar geometría al alumnado, ya que les permitirá identificar las partes que conforman las figuras en lugar de solo enseñar a reconocerlas.</td></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>- Analizar la imagen proyectada, identificando y registrando el tipo de líneas que se cruzan, como rectas, paralelas, perpendiculares o curvas, y comprendiendo cómo estas líneas interactúan entre sí.
- Observar las intersecciones de las líneas y clasificar los tipos de ángulos generados en esos puntos (agudo, recto, obtuso, etc.), aplicando el vocabulario geométrico adecuado.
- Completar la tabla con la información sobre los tipos de líneas y tipos de ángulos, promoviendo la capacidad de observar y describir las partes que conforman las figuras geométricas.
- Reflexionar sobre la importancia de enseñar al alumnado no solo a reconocer figuras completas, sino a observar sus partes (líneas y ángulos) para una comprensión más profunda de la geometría.</td></tr>
<tr><td>Agrupamientos</td><td>Gran grupo</td></tr>
<tr><td>Recurso</td><td>Anexo III

</td></tr>
<tr><td>Consigna</td><td>Observa atentamente la imagen proyectada en la pizarra.
A continuación, analiza las intersecciones que se producen entre las líneas. Identifica qué tipo de líneas se cruzan (rectas, paralelas, perpendiculares, curvas) y qué tipo de ángulos se forman en cada punto de intersección.
Registra la información en la tabla proporcionada, indicando:
• el nombre de las líneas que se cruzan
• el tipo de línea
• el tipo de ángulo que se forma
Utiliza el lenguaje geométrico adecuado para describir tus observaciones y justifica tus respuestas a partir de lo que ves en la imagen.
Finalmente, participa en la puesta en común compartiendo tu análisis y reflexionando sobre cómo las líneas y los ángulos se combinan para formar figuras geométricas.</td></tr>
</table>

Tabla 22

Actividad 5. Conociendo el Geoplano

Fase de Aprendizaje 3: Explicitación.	**Geometría unidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras trabajarán en equipos con tres tipos de Geoplanos y gomas elásticas para explorar y descubrir las propiedades geométricas. Cada equipo recibirá una plantilla con una serie de preguntas, que deberán ir resolviendo, utilizando el material. El objetivo es que, a través de la manipulación y experimentación, las maestras descubran características de diferentes tipos de líneas (rectas, curvas y angulares), y cómo se comportan al ser estiradas con las gomas elásticas en los Geoplanos. Por ejemplo, descubrirán que la línea curva no se puede crear completamente con las gomas elásticas y el Geoplano circular, ya que al estirar la goma se vuelve una serie de segmentos rectos. La actividad les permitirá experimentar con las diferentes tramas de los Geoplanos, identificando qué tipos de líneas pueden crear con facilidad y cuáles presentan limitaciones. Al finalizar la actividad, la instructora explicará las posibilidades educativas que ofrece el Geoplano como recurso manipulativo en el aula de infantil, así como los materiales alternativos con los que se pueden construir otros tipos de Geoplanos o recursos similares disponibles en el mercado. El propósito es que las maestras comprendan cómo usar este recurso manipulativo para enseñar conceptos geométricos fundamentales de forma visual y práctica, facilitando la enseñanza de las líneas y otras figuras geométricas.
Objetivos	- Explorar y manipular los tres tipos de Geoplanos para descubrir las propiedades de diferentes tipos de líneas (rectas, curvas, angulares) y comprender cómo se crean con las gomas elásticas. - Reflexionar sobre las limitaciones del Geoplano en la creación de líneas curvas, comprendiendo cómo las gomas elásticas se convierten en segmentos al estirarse, y discutir las diferencias entre líneas rectas y curvas. - Aplicar el conocimiento adquirido sobre las líneas al trabajar con diferentes tramas en los Geoplanos, comparando cómo varían las formas creadas con las diferentes configuraciones de puntos y gomas. - Identificar y discutir las posibilidades pedagógicas del Geoplano en el aula de Infantil, comprendiendo cómo este recurso puede ser utilizado para enseñar propiedades geométricas a su alumnado de manera práctica y visual.
Agrupamientos	Pequeños grupos

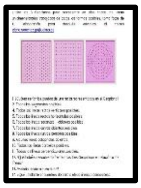
Recurso	Anexo III 
Consigna	Manipula los distintos Geoplanos utilizando las gomas elásticas. Crea diferentes tipos de líneas y observa cómo se comportan en cada uno de ellos. A continuación, responde a las preguntas de la plantilla, experimentando con el material. Para ello, puedes probar a construir líneas rectas, angulares y curvas, y analizar qué ocurre en cada caso. Reflexiona sobre las siguientes cuestiones: ¿qué tipos de líneas puedes construir con facilidad?, ¿qué dificultades encuentras?, ¿es posible representar una línea curva?, ¿qué sucede cuando intentas hacerlo? Compara los resultados obtenidos en los diferentes Geoplanos y describe tus conclusiones utilizando el lenguaje geométrico trabajado previamente. Finalmente, comparte tus observaciones con el grupo y reflexiona sobre las posibilidades del Geoplano como recurso para la enseñanza de la geometría.

Tabla 23

Actividad 11. Descubriendo los Cuadriláteros con Geoplanos 3x3

Fase de Aprendizaje 3: Explicitación	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras trabajarán con Geoplanos de 3x3 para dibujar todas figuras de cuatro lados posibles, utilizando rotuladores. La actividad tiene la condición de que las figuras deben ser líneas poligonales cerradas (sin intersecciones abiertas) y diferentes entre sí, es decir, cada figura debe ser única. El objetivo es que las maestras exploren y experimenten con distintas configuraciones geométricas, creando figuras de cuatro lados como cuadrados, rectángulos, rombos o incluso figuras más complejas que cumplan con la condición de tener cuatro lados. Una vez que hayan completado el dibujo de todas las figuras posibles, las maestras deberán describir y explicar con sus palabras cómo son las figuras, cuáles son sus semejanzas y diferencias, y cómo llegaron a esas conclusiones. Luego, el grupo podrá poner en común sus observaciones, compartiendo las características que han encontrado en las figuras, y comparando las diferentes configuraciones y formas que han creado en el geoplano.

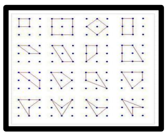
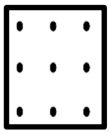
	Este ejercicio fomentará la creatividad, la observación detallada y el uso del lenguaje geométrico, ayudando a las maestras a identificar propiedades de las figuras geométricas mientras exploran sus diferentes configuraciones.
Objetivos	- Dibujar figuras de cuatro lados en el Geoplano utilizando plantillas de 3x3, explorando diferentes formas y configuraciones geométricas y asegurándose de que cada figura sea única y esté cerrada. - Describir las figuras creadas utilizando el lenguaje geométrico adecuado, identificando sus características y comparando las semejanzas y diferencias entre ellas. - Fomentar el desarrollo del razonamiento geométrico y la capacidad de comparar y clasificar figuras de cuatro lados, utilizando las observaciones hechas durante la actividad. - Promover la reflexión grupal y el intercambio de ideas sobre las propiedades de las figuras de cuatro lados, facilitando una discusión sobre sus características comunes y únicas.
Agrupamientos	Gran grupo
Recursos	Anexo III  
Consigna	Utiliza el Geoplano de 3x3 para dibujar todas las figuras posibles de cuatro lados. Recuerda que deben ser líneas poligonales cerradas y que cada figura debe ser diferente de las demás. Explora distintas formas de colocar las gomas o trazar las figuras, probando diferentes configuraciones hasta obtener el mayor número de cuadriláteros posibles. Una vez hayas completado las figuras, observa detenidamente cada una de ellas y descríbelas utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Para ello, puedes fijarte en aspectos como: la longitud de los lados, la forma de los ángulos, la regularidad de la figura o la relación entre sus lados. Compara las figuras entre sí, identificando semejanzas y diferencias, y explica cómo has obtenido cada una de ellas. Finalmente, participa en la puesta en común compartiendo tus resultados y reflexionando con el grupo sobre las diferentes formas de construir cuadriláteros en el Geoplano.

Tabla 24

Actividad 13. Adivina adivinanza, mi triángulo

Fase de Aprendizaje 3. Explicitación	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras aprenderán a clasificar y analizar triángulos utilizando un cuadro de doble entrada. La instructora explicará que los triángulos se pueden clasificar de dos maneras: según sus lados (equilátero, isósceles y escaleno) y según sus ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo). La actividad comenzará con la lectura de definiciones, y las maestras deberán colocar cada definición en la casilla correspondiente del cuadro. De esta manera, aprenderán a identificar las propiedades geométricas de los triángulos y a asociarlas con los conceptos de lados y ángulos. Luego, pasarán a analizar imágenes de triángulos y las clasificarán en el cuadro según sus características de lados y ángulos. El objetivo principal de esta actividad es que las maestras identifiquen, clasifiquen y justifiquen las propiedades de los triángulos de manera clara y estructurada, combinando lo que ya conocen con lo que van descubriendo durante la actividad. Esto les permitirá profundizar en su comprensión de las propiedades geométricas de los triángulos y mejorar sus habilidades de clasificación y razonamiento.
Objetivos	- Clasificar los triángulos en un cuadro de doble entrada según sus lados (equilátero, isósceles y escaleno) y sus ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo), utilizando el lenguaje geométrico apropiado. - Identificar y describir las características de los triángulos a partir de las definiciones leídas y las imágenes proporcionadas, analizando cómo las propiedades de los lados y los ángulos determinan su clasificación. - Justificar las decisiones de clasificación al relacionar las propiedades de los triángulos con las definiciones y descripciones previamente estudiadas, promoviendo la reflexión y el razonamiento lógico. - Fomentar la colaboración y el intercambio de ideas entre las maestras, permitiendo que compartan sus razonamientos y aprendan de las observaciones de sus compañeras al clasificar los triángulos.
Agrupamientos	Gran grupo
Recursos	Anexo III

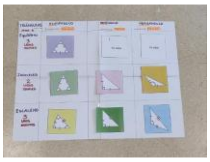
	
Consigna	Lee atentamente las definiciones de los diferentes tipos de triángulos. A continuación, completa el cuadro de doble entrada colocando cada definición en la casilla correspondiente según la clasificación por lados (equilátero, isósceles, escaleno) y por ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo). Una vez completado el cuadro, observa las imágenes de los triángulos y clasifícalos en el lugar adecuado, teniendo en cuenta sus características. Justifica tus decisiones explicando qué propiedades has tenido en cuenta en cada caso, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Finalmente, participa en la puesta en común compartiendo tus clasificaciones y razonamientos, comparando las respuestas con el grupo y reflexionando sobre las diferentes formas de clasificar los triángulos.

Tabla 25

Actividad 15. Yo tengo, quién tiene

Fase de Aprendizaje 3: Explicitación	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras jugarán en gran grupo a *"Yo tengo, ¿quién tiene?"*. Este juego está diseñado para que las maestras refuercen su conocimiento sobre las propiedades, características y partes de los polígonos. El juego consiste en un conjunto de tarjetas, cada una de las cuales tiene dos partes: 1. En una parte de la tarjeta aparece una pregunta relacionada con alguna propiedad, característica o parte de los polígonos (por ejemplo: "¿Cuántos lados tiene un triángulo?" o "¿Qué tiene un cuadrado en común con un rectángulo?"). 2. En la otra parte de la tarjeta, la respuesta está expresada como "Yo tengo + el nombre de una propiedad", como por ejemplo "Yo tengo tres lados". Cada maestra recibirá una tarjeta, y el objetivo es que empiecen el juego leyendo la pregunta en su tarjeta, mientras que otro jugador debe responder con la tarjeta adecuada que contenga la propiedad correspondiente. El juego continuará hasta que todas las tarjetas se hayan intercambiado y se haya cubierto el conjunto completo de propiedades y características de los polígonos.

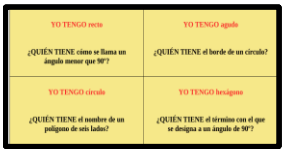
<table>
<tr><td></td><td>Este juego fomenta el uso del vocabulario geométrico y refuerza la comprensión de las propiedades de las figuras, promoviendo la participación activa y el aprendizaje cooperativo.</td></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>- Identificar y recordar las propiedades y características de los polígonos, como el número de lados, vértices y otros atributos geométricos, a través de la formulación y respuesta de preguntas.
- Aplicar el vocabulario geométrico adecuado al describir las partes y propiedades de los polígonos, como lados, vértices, ángulos, etc., durante el juego "Yo tengo, ¿quién tiene?".
- Desarrollar habilidades de razonamiento y relacionar las propiedades geométricas de las figuras con sus características, utilizando las preguntas y respuestas del juego para reforzar la comprensión.
- Fomentar la interacción grupal y el aprendizaje colaborativo, compartiendo conocimientos sobre las propiedades de los polígonos y promoviendo la participación activa de todas las maestras.</td></tr>
<tr><td>Agrupamientos</td><td>Gran grupo</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>Anexo III

</td></tr>
<tr><td>Consigna</td><td>Cada participante recibirá una tarjeta del juego “Yo tengo, ¿quién tiene?”.
Observa tu tarjeta y presta atención a las dos partes que contiene: una pregunta y una respuesta.
La persona que comience leerá en voz alta la pregunta de su tarjeta. El resto del grupo deberá escuchar atentamente y comprobar si la respuesta correspondiente se encuentra en su tarjeta.
Si tienes la respuesta adecuada, léela en voz alta utilizando la estructura “Yo tengo…”, y a continuación formula la nueva pregunta que aparece en tu tarjeta para continuar el juego.
Participa activamente respetando el turno de palabra y utilizando el lenguaje geométrico adecuado al nombrar las propiedades y características de los polígonos.
El juego continuará hasta que todas las tarjetas hayan sido utilizadas y se hayan repasado las diferentes propiedades de las figuras geométricas.</td></tr>
</table>

Tabla 26

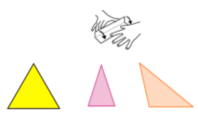
Actividad 21. ¿Qué tienes?

Fase de Aprendizaje 3. Explicitación	**Geometría tridimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras participarán en un juego lúdico y sensorial que les permitirá reforzar su conocimiento de las figuras geométricas a través del reconocimiento táctil y la comunicación oral. El juego se desarrollará en dos partes: – **Parte 1:** Reconocimiento táctil individual La instructora presenta una bolsa opaca que contiene algunas de las figuras geométricas que las maestras ya han visto. Primero, hará una ronda de prueba para mostrar cómo funciona el juego. Una maestra observará una figura y luego, sin mirar, deberá meter la mano en la bolsa para encontrar y extraer la misma figura, utilizando solo el sentido del tacto. El objetivo de esta parte es que las maestras practiquen el reconocimiento de las figuras geométricas solo por su forma, sin verlas, usando la memoria táctil y su conocimiento previo sobre las propiedades de las figuras. – **Parte 2:** Juego por parejas con pistas En la segunda parte del juego, las maestras se organizarán en parejas. A una de las maestras se le dará una figura geométrica, pero su compañera no podrá verla. La maestra con la figura deberá dar pistas verbales sobre las propiedades de la figura (como el número de lados, la simetría, las diagonales, etc.) para que su compañera, guiada solo por el tacto y las pistas proporcionadas, adivine de qué figura se trata. Este ejercicio promoverá la comunicación matemática y la reflexión sobre las características geométricas de las figuras.
Objetivos	- Identificar y reconocer figuras geométricas a través del tacto, desarrollando la habilidad para diferenciar y clasificar cuerpos geométricos según sus características (lados, vértices, simetrías, etc.). -: Desarrollar la capacidad de dar y recibir pistas claras sobre las propiedades de las figuras geométricas, utilizando un lenguaje matemático adecuado y fomentando la comunicación efectiva. - Reflexionar sobre las propiedades geométricas de las figuras durante el juego, discutiendo en pareja cómo las pistas dadas ayudan a identificar correctamente la figura, y comprendiendo cómo el tacto y la observación pueden complementar el conocimiento visual.

	- Fomentar la interacción colaborativa y el trabajo en equipo al resolver el desafío de adivinar la figura geométrica, estimulando el razonamiento conjunto y la aplicación de conocimientos matemáticos en un contexto lúdico.
Agrupamientos	Individual y por parejas
Recursos	Cuerpos geométricos de madera 
Consigna	**Primera parte** Observa una de las figuras geométricas y memoriza sus características. A continuación, introduce la mano en la bolsa sin mirar e intenta localizar la misma figura utilizando únicamente el tacto. Para ello, presta atención a aspectos como la forma, las caras, las aristas o los vértices. Una vez la hayas encontrado, explica cómo la has identificado. **Segunda parte** Trabaja con tu compañera por parejas. Una de vosotras recibirá una figura geométrica que la otra no podrá ver. La persona que tiene la figura deberá describirla utilizando pistas basadas en sus propiedades (número de caras, forma de las caras, presencia de vértices, posibilidad de rodar, etc.), empleando el lenguaje geométrico adecuado. La otra persona deberá intentar identificar la figura utilizando el tacto y las pistas recibidas. Posteriormente, intercambiad los roles y reflexionad conjuntamente sobre qué pistas han sido más útiles para identificar correctamente la figura.

Tabla 27

Actividad 25. Simetría triángulos

Fase de Aprendizaje 3. Explicitación	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, la instructora proporciona a cada maestra figuras predeterminadas de triángulos (equilátero, isósceles y escaleno) y les da una consigna para comparar y justificar las diferencias entre los tres tipos de triángulos. La actividad comienza con una observación guiada, donde las maestras deben identificar las propiedades comunes y diferenciadoras de los triángulos en términos de sus lados y ángulos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado para justificar sus respuestas. Posteriormente, se introduce la técnica de papiroflexia como herramienta para explorar de manera práctica y visual las propiedades geométricas de los triángulos. Mediante el plegado del papel, las maestras descubrirán aspectos más específicos de los triángulos, como el número de ejes de simetría, la relación entre los ángulos y lados al plegar el papel, y cómo estas propiedades se manifiestan en cada tipo de triángulo. El objetivo es que las maestras lleguen a conclusiones más claras sobre las características geométricas de los triángulos a través de la manipulación física y la observación directa.
Objetivos	- Comparar y justificar las diferencias entre los triángulos equilátero, isósceles y escaleno, utilizando el lenguaje geométrico adecuado para describir sus propiedades de lados y ángulos. - Descubrir mediante la papiroflexia los ejes de simetría de cada tipo de triángulo, observando cómo se pliegan los triángulos y qué propiedades geométricas se revelan a través del plegado. - Identificar y explicar las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos al plegar el papel, describiendo cómo el plegado puede ayudar a entender las características de las figuras geométricas. - Justificar las observaciones realizadas sobre los triángulos utilizando el razonamiento lógico y geométrico, promoviendo la reflexión sobre las propiedades de las figuras y cómo se pueden explorar de manera práctica.
Agrupamientos	Individual
Recursos	Figuras recortadas: triángulos 

Consigna	Observa los triángulos que se te han proporcionado (equilátero, isósceles y escaleno) y analiza sus características. En primer lugar, compara los triángulos e identifica sus semejanzas y diferencias en relación con sus lados y ángulos. Describe tus observaciones utilizando el lenguaje geométrico adecuado. A continuación, utiliza la técnica de doblado para explorar cada triángulo. Realiza pliegues y observa qué ocurre en cada caso. Para ello, puedes fijarte en cuestiones como: ¿cuántos ejes de simetría presenta cada triángulo?, ¿qué partes coinciden al doblarlo?, ¿cómo se relacionan los lados y los ángulos? Describe y justifica tus conclusiones a partir de lo observado durante el plegado. Finalmente, reflexiona sobre las diferencias entre los tres tipos de triángulos y explica cómo el doblado te ha ayudado a comprender mejor sus propiedades.

- FASE DE APRENDIZAJE 4: ORIENTACIÓN LIBRE-

A continuación, se presentan en las Tablas 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 y 38; las actividades correspondientes a la cuarta Fase de Aprendizaje.

Tabla 28

Actividad 6. Bingo geométrico

Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre	**Geometría unidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras participarán en un Bingo geométrico para repasar y consolidar todo lo aprendido sobre geometría unidimensional. En parejas, cada maestra recibirá un cartón con una variedad de elementos geométricos: estos pueden incluir líneas rectas, curvas, ángulos rectos, agudos, obtusos, etc. La instructora tendrá una bolsita con pequeños papeles, cada uno con una definición geométrica escrita. En las primeras rondas, la instructora solo leerá el nombre del concepto para familiarizar a las maestras con la dinámica del juego. En las rondas siguientes, la instructora leerá las definiciones completas, y las maestras deberán identificar si ese concepto está presente en su cartón y marcarlo. El objetivo del juego es que las maestras reconozcan y apliquen sus conocimientos de geometría unidimensional de manera lúdica, mientras compiten para completar una *línea* o lograr un *Bingo.* Este juego permite que las maestras practiquen el reconocimiento rápido de conceptos geométricos, fortalezcan su memoria sobre las propiedades geométricas y se diviertan mientras lo hacen, con el incentivo de obtener un premio para quien complete su tarjeta primero.
Objetivos	- Reforzar y consolidar los conocimientos geométricos adquiridos sobre líneas y ángulos mediante la identificación y aplicación de estos conceptos en un contexto de juego. - Fomentar el reconocimiento rápido de conceptos geométricos, como tipos de líneas y ángulos, y su relación con las definiciones geométricas, mediante la dinámica del Bingo. - Desarrollar la habilidad de comparar y diferenciar conceptos geométricos, utilizando el vocabulario adecuado y aplicándolo en un formato lúdico y cooperativo. - Promover el trabajo en pareja y la colaboración al identificar y marcar correctamente las definiciones en el cartón, fomentando el intercambio de ideas y el aprendizaje cooperativo.
Dinámica	Gran grupo

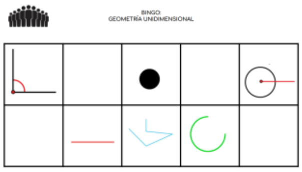
Agrupamientos	Anexo III   
Consigna	Trabaja en pareja con el cartón de *Bingo geométrico* que se te ha entregado. Escucha atentamente las indicaciones de la instructora. En las primeras rondas, se nombrarán conceptos geométricos y deberás identificarlos en tu cartón. En las siguientes rondas, se leerán definiciones completas, y deberás reconocer a qué concepto corresponden. Marca en tu cartón los elementos que coincidan con el concepto o definición indicada. Comenta con tu compañera las decisiones que toméis y aseguraos de que la elección es correcta antes de marcar. El objetivo es completar una línea o el cartón completo. Cuando lo consigas, indícalo en voz alta. Participa activamente en el juego, utilizando el lenguaje geométrico adecuado y aplicando los conocimientos adquiridos sobre líneas y ángulos.

Tabla 29

Actividad 7. Yo dibujo tu dibujo

Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre.	**Geometría unidimensional**
Descripción de la actividad:	En esta actividad, las maestras trabajarán en parejas para practicar la comunicación geométrica de manera interactiva y práctica. A una de las maestras se le entregará una tarjeta con unas instrucciones geométricas específicas (por ejemplo: "Dibuja una línea recta vertical, dos líneas paralelas horizontales rectas y una línea curva cerrada.") y deberá seguirlas para crear un dibujo en un papel, sin que su compañera pueda verlo en ningún momento. Una vez que el dibujo esté terminado, la maestra que lo ha realizado deberá explicar verbalmente a su compañera cómo replicarlo, utilizando lenguaje geométrico adecuado. Esto incluye especificar detalles como el tipo de línea (recta, curva), su orientación (vertical, horizontal, diagonal), si las líneas son paralelas o perpendiculares, y si la figura es cerrada o no. El objetivo es que la compañera logre reproducir el dibujo solo con la descripción verbal, sin ver el dibujo original. Al finalizar, las maestras compararán ambos dibujos y reflexionarán sobre la precisión y la claridad de la comunicación. Este ejercicio ayuda a las maestras a

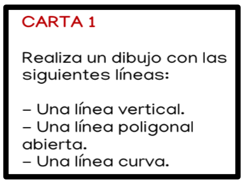
	practicar y afianzar su uso del lenguaje geométrico y a mejorar su capacidad para describir figuras de manera precisa y estructurada.
Objetivos	- Desarrollar la capacidad de comunicación geométrica al explicar verbalmente cómo reproducir un dibujo utilizando el lenguaje geométrico adecuado (tipos de líneas, orientación, paralelismo, perpendicularidad, figuras cerradas). - Mejorar la precisión y claridad al utilizar el lenguaje geométrico para describir figuras, asegurándose de que la compañera pueda replicar correctamente el dibujo sin verlo. - Reflexionar sobre la efectividad de la comunicación verbal al comparar los dibujos realizados y analizar qué aspectos podrían mejorar en la descripción de las figuras. - Fomentar el trabajo colaborativo y la interacción activa entre las maestras, ayudando a desarrollar habilidades de escucha y descripción detallada.
Agrupamientos	En parejas.
Recursos	Anexo III  CARTA 1 Realiza un dibujo con las siguientes líneas: – Una línea vertical. – Una línea poligonal abierta. – Una línea curva.
Consigna	Trabaja en pareja. Una de las personas recibirá una tarjeta con instrucciones geométricas y deberá realizar el dibujo indicado en una hoja, sin mostrarlo a su compañera. Una vez terminado, explica verbalmente cómo es tu dibujo para que tu compañera pueda reproducirlo. Utiliza el lenguaje geométrico adecuado, indicando aspectos como el tipo de líneas, su orientación, la relación entre ellas (paralelas, perpendiculares) y si las figuras son abiertas o cerradas. La persona que escucha deberá dibujar siguiendo únicamente las indicaciones recibidas. Al finalizar, comparad ambos dibujos y reflexionad sobre el resultado: ¿son iguales?, ¿qué diferencias hay?, ¿qué aspectos de la explicación han sido claros o podrían mejorarse? Intercambiad los roles y repetid la actividad.

Tabla 30

Actividad 16. Teselamos con Pattern Blocks

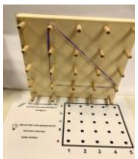
Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras trabajarán con un conjunto de bloques geométricos (Pattern Blocks) que incluyen figuras como hexágonos, rombos, cuadrados, trapecios, círculos, triángulos equiláteros, semicírculos y trapezoides, cada una representada en un color distinto. El objetivo es que las maestras realicen una teselación (cubran completamente una superficie sin dejar huecos) utilizando todas las piezas disponibles. Cada maestra deberá tomar decisiones sobre qué figuras utilizar y cómo organizarlas para cubrir el máximo espacio posible en la mesa, asegurándose de que las piezas encajen correctamente sin dejar espacios vacíos entre ellas. Durante el proceso, deberán justificar sus elecciones, explicando por qué seleccionan ciertas figuras primero, cómo las combinan y qué estrategias siguen para completar el área de forma eficiente. El enfoque principal de esta actividad es tomar decisiones razonadas, analizar las formas y justificar las elecciones de manera geométrica y lógica.
Objetivos	- Seleccionar y organizar los bloques geométricos para cubrir el máximo espacio posible en la mesa, asegurándose de que no queden huecos entre las piezas, utilizando el conocimiento sobre las propiedades de cada figura. - Justificar las decisiones de selección de las figuras, explicando las razones detrás de la elección de cada una en términos de sus propiedades geométricas (forma, tamaño, número de lados, etc.). - Desarrollar habilidades de razonamiento espacial y lógico, analizando cómo las diferentes figuras pueden encajar de manera eficiente para cubrir un área y utilizando sus características geométricas de manera práctica. - Fomentar la reflexión colaborativa, discutiendo en grupo las estrategias utilizadas para cubrir el plano, promoviendo el intercambio de ideas y soluciones sobre cómo lograr la teselación.
Agrupamientos	Pequeños grupos
Recursos	Bloques geométricos o Pattern Blocks
Imagen	*Pattern Blocks*

	
Consigna	Trabaja en pequeño grupo con los bloques geométricos disponibles. El objetivo es cubrir una superficie utilizando las piezas sin dejar huecos entre ellas. Para ello, selecciona y organiza las figuras de manera que encajen correctamente. Explora distintas combinaciones y decide qué piezas utilizar en cada momento. Observa cómo se relacionan las formas entre sí y prueba diferentes estrategias para completar el espacio. A medida que avanzas, explica al grupo las decisiones que tomas: por qué eliges determinadas figuras, cómo encajan y qué propiedades geométricas utilizas para que no queden espacios vacíos. Al finalizar, comparte con el resto del grupo la estrategia seguida y reflexiona sobre las soluciones encontradas y las dificultades que hayan surgido.

Tabla 31

Actividad 17. Hundir la Forma

Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras jugarán a una versión adaptada del clásico juego "Hundir la Flota", llamada "*Hundir la Forma",* utilizando geoplanos de 5x5 y coordenadas. El objetivo es que las maestras reconozcan y describan figuras geométricas utilizando vocabulario geométrico adecuado, mientras juegan en parejas o cuartetos para adivinar el triángulo de la contrincante. Cada maestra creará su propio triángulo en el Geoplano, y la contrincante deberá adivinar las coordenadas de los vértices del triángulo. A medida que avanza el juego, se le dará a cada jugadora la oportunidad de hacer preguntas para identificar el triángulo, utilizando solo vocabulario geométrico correcto. Las respuestas se limitan a "lado", "vértice", "exterior" o "interior", y solo se puede usar vocabulario geométrico preciso. Si se usa un término incorrecto, como “raya” en vez de "lado" o “esquina” en vez de "vértice", se pierde el turno. Cuando una jugadora crea que ha identificado el triángulo, puede usar un comodín, dando una descripción adicional, como “tiene un ángulo recto” o “tiene tres lados iguales”, para confirmar su hipótesis. Si la descripción es correcta, la contrincante debe decir “¡Tocado!”, y si ha acertado en el último intento, dirá “¡Hundido!”. La ganadora será quien

	adivine primero el triángulo de su compañera, utilizando correctamente los términos geométricos y las coordenadas. Este juego permite a las maestras consolidar su conocimiento sobre los tipos de triángulos y desarrollar un mayor dominio del vocabulario geométrico, mientras se divierten en un ambiente de aprendizaje colaborativo.
Objetivos	- Identificar y describir los triángulos utilizando vocabulario geométrico adecuado, como vértice, lado, interior y exterior, durante el juego de "Hundir la Forma". - Aplicar el conocimiento sobre los tipos de triángulos (equilátero, isósceles, escaleno) y sus propiedades, como los ángulos y lados, al formular preguntas y dar descripciones precisas para adivinar el triángulo de la contrincante. - Desarrollar la capacidad de reconocer y comparar las características geométricas de los triángulos, como los vértices y los lados, usando un lenguaje matemático preciso y aplicando coordenadas en el geoplano. - Fomentar la reflexión y el razonamiento lógico al usar las coordenadas y descripciones geométricas para inferir las características de los triángulos, y al mismo tiempo, practicar el trabajo en equipo y la colaboración durante el juego.
Agrupamientos	Parejas
Recursos	Anexo III 
Consigna	Trabaja en pareja con el Geoplano de 5x5. Cada participante construirá en su geoplano un triángulo utilizando las gomas elásticas, sin mostrarlo a su compañera. Por turnos, tratad de averiguar el triángulo de la otra persona indicando coordenadas de posibles vértices o formulando preguntas. Utiliza únicamente lenguaje geométrico adecuado, empleando términos como vértice, lado, interior o exterior. Escucha las respuestas de tu compañera y utiliza la información obtenida para deducir la forma del triángulo. Cuando creas que has identificado el triángulo, puedes describirlo indicando sus características (por ejemplo, tipo de triángulo o propiedades de sus ángulos o lados) para confirmar tu hipótesis. Gana la persona que consiga identificar correctamente el triángulo de su compañera utilizando el vocabulario geométrico adecuado.

	Al finalizar, reflexionad sobre las estrategias utilizadas y la importancia del uso preciso del lenguaje geométrico.

Tabla 32

Actividad 22. Cuadro de doble entrada

Fase de Aprendizaje 4. Orientación libre	**Geometría tridimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, la instructora introduce a las maestras en la clasificación de los cuerpos geométricos, explicando la diferencia entre poliedros y cuerpos redondos o de revolución. Utilizando un cuadrante visual en la pizarra o en una plantilla, presenta las definiciones de los cuerpos geométricos y las lee en voz alta. A medida que se leen las definiciones, las maestras deben colocarlas en el lugar correspondiente dentro del cuadrante, asociando correctamente cada definición con el tipo de cuerpo geométrico. Una vez que las maestras han colocado las definiciones en su lugar, la instructora introduce figuras físicas de madera y cartulina para completar la clasificación de los cuerpos geométricos. A cada maestra se le entrega una figura específica, y el grupo empieza a trabajar con los poliedros, centrándose inicialmente en los 5 sólidos platónicos: el cubo, el octaedro, el tetraedro, el dodecaedro y el icosaedro. El objetivo de la actividad es que las maestras no solo aprendan sobre los cuerpos geométricos, sino que también desarrollen la capacidad de identificar, clasificar y relacionar las propiedades geométricas mediante la observación práctica y la reflexión grupal.
Objetivos	- Identificar y clasificar los cuerpos geométricos según sus propiedades, diferenciando entre poliedros y cuerpos redondos o de revolución mediante la lectura de definiciones y la ubicación correcta en el cuadrante. - Analizar los 5 sólidos platónicos a través de la observación directa de las figuras de madera y cartulina, identificando sus características (caras, vértices, aristas) y relacionándolas con las definiciones previas. - Desarrollar la capacidad de argumentación y justificación al explicar por qué cada cuerpo geométrico pertenece a una categoría específica, basándose en sus propiedades geométricas. - Fomentar la reflexión grupal y el trabajo colaborativo al discutir las propiedades y clasificaciones de los cuerpos geométricos, promoviendo un intercambio de ideas sobre las características de cada figura.

Agrupamientos	Gran grupo
Recursos	Anexo III 
Consigna	Observa el cuadro de clasificación que se presenta. Lee atentamente las definiciones de los diferentes cuerpos geométricos y colócalas en el lugar correspondiente dentro del cuadro, diferenciando entre poliedros y cuerpos redondos o de revolución. A continuación, manipula las figuras geométricas que se te han entregado y sitúalas en la categoría adecuada según sus características. Analiza especialmente los sólidos platónicos, observando sus caras, vértices y aristas, y relacionando estas propiedades con las definiciones trabajadas previamente. Justifica tus decisiones explicando por qué cada figura pertenece a una categoría determinada, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Participa en la puesta en común compartiendo tus clasificaciones y reflexionando sobre las diferentes propuestas del grupo.

Tabla 33

Actividad 23. ¿Quién es quién? Geométrico

Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre.	**Geometría tridimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras se dividirán en parejas para jugar al *"Quién es quién geométrico"*. La instructora previamente ha adaptado el clásico juego de mesa, sustituyendo las caras por cuerpos geométricos en las plantillas del juego. Cada maestra tendrá que adivinar el cuerpo geométrico que su contrincante ha elegido, formulando preguntas sobre sus propiedades, pero con la condición de que solo se puede preguntar una propiedad por pregunta (por ejemplo, "¿Es un cuerpo con caras planas?" o "¿Tiene todos sus lados iguales?"). Antes de comenzar, la instructora presentará una clasificación de los cuerpos geométricos en la Pizarra Digital Interactiva (PDI), sirviendo como "chuleta" visual para que las maestras puedan consultar las

	propiedades de los cuerpos geométricos mientras juegan. El objetivo es que, mediante la formulación de preguntas específicas y el análisis de las respuestas, cada maestra descubra el cuerpo geométrico que su contrincante ha elegido. La persona que primero adivine correctamente ganará el juego. Esta actividad tiene como propósito reforzar el conocimiento de las propiedades geométricas de los cuerpos en un contexto lúdico y dinámico, fomentando la interacción y el razonamiento entre las maestras.
Objetivos	- Formular preguntas sobre las propiedades de los cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado para identificar características específicas como caras, aristas, vértices y simetrías. - Desarrollar habilidades de observación y análisis al identificar las propiedades de los cuerpos geométricos de manera estructurada, basándose en la clasificación visual proporcionada en la PDI. -: Reflexionar sobre las respuestas obtenidas durante el juego, utilizando la información sobre las propiedades geométricas para deducir y adivinar correctamente el cuerpo geométrico de la contrincante. -: Fomentar la interacción y el trabajo colaborativo entre las maestras, promoviendo el intercambio de conocimientos y el razonamiento en equipo para identificar las características de los cuerpos geométricos.
Agrupamientos	Parejas
Recursos	Anexo III 
Consigna	Trabaja en pareja con el tablero del *“¿Quién es quién? geométrico*”. Cada participante elegirá en secreto un cuerpo geométrico. El objetivo es adivinar la figura de la otra persona mediante la formulación de preguntas. Por turnos, realiza preguntas sobre las propiedades de los cuerpos geométricos. Recuerda que en cada turno solo puedes preguntar por una característica (por ejemplo: si tiene caras planas, si presenta vértices, si puede rodar, etc.). Escucha atentamente las respuestas y utiliza la información obtenida para descartar opciones y acercarte a la solución. Puedes apoyarte en la clasificación visual presentada para analizar las propiedades de las figuras.

	Gana la persona que consiga identificar correctamente el cuerpo geométrico de su compañera. Al finalizar, reflexionad sobre las preguntas realizadas y las estrategias utilizadas para llegar a la solución.

Tabla 34

Actividad 24. Formando Formas

Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad:	En esta actividad, las maestras recibirán una serie de tarjetas con instrucciones para crear figuras geométricas utilizando los bloques geométricos o Pattern Blocks. Las tarjetas están organizadas en cuatro niveles de dificultad: rosa (fácil), azul (medio), rojo (difícil) y negro (muy difícil). Cada tarjeta especifica el número de piezas necesarias para formar una figura geométrica, así como los requisitos específicos de la tarea, como las formas a utilizar y las combinaciones posibles. Las maestras deben seguir las instrucciones de las tarjetas, seleccionar las piezas adecuadas y ensamblarlas para formar las figuras. Esta actividad promueve la reflexión sobre la relación entre las piezas y las formas geométricas, desarrollando habilidades de razonamiento espacial y lógico. A medida que progresen en los niveles de dificultad, las maestras podrán abordar figuras más complejas y explorar cómo las diferentes formas se relacionan y encajan para completar una figura mayor.
Objetivos	- Seguir las instrucciones de las tarjetas para componer figuras geométricas utilizando bloques geométricos (Pattern Blocks), observando cómo las piezas se combinan para formar nuevas formas. - Resolver los desafíos propuestos en las tarjetas de diferentes niveles de dificultad, aplicando el razonamiento lógico y espacial para seleccionar las piezas adecuadas y encajarlas correctamente. - Reflexionar sobre las relaciones entre las diferentes piezas y las formas geométricas resultantes, comparando las soluciones de los diferentes niveles de dificultad y justificando las elecciones realizadas. - Fomentar el trabajo en equipo y la discusión en grupo, compartiendo las estrategias y métodos utilizados para resolver los problemas de las tarjetas y aprender de las soluciones de los demás.

Agrupamientos	Pequeños grupos
Recursos	Pattern Blocks y tarjetas con las instrucciones 
Consigna	Trabaja en pequeño grupo con los bloques geométricos y las tarjetas de actividad. Selecciona una tarjeta y lee atentamente las instrucciones. Cada tarjeta indica qué piezas debes utilizar y qué figura debes construir. Elige las piezas necesarias y trata de formar la figura indicada, probando diferentes combinaciones hasta encontrar una solución. Puedes comenzar por los niveles más sencillos e ir avanzando progresivamente hacia los más complejos. A medida que trabajas, comenta con tu grupo las decisiones que tomas: qué piezas eliges, cómo las colocas y por qué. Al finalizar, comparte con el grupo la solución encontrada y explica la estrategia utilizada para resolver la actividad.

Tabla 35

Actividad 26. Diagonal y simetría de los cuadriláteros

Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, la instructora proporciona a cada maestra una figura de papel de un cuadrilátero, con el objetivo de que analicen sus propiedades geométricas, como las simetrías, las diagonales y las características de los paralelogramos, mediante la visualización y el doblado de papel. Las maestras trabajarán de manera práctica, manipulando las figuras para identificar y explorar las simetrías, los ejes de simetría y cómo las diagonales dividen la figura. A través del doblado de papel, podrán observar cómo las propiedades de los cuadriláteros, como las simetrías, se hacen evidentes al hacer coincidir partes de la figura. Al final de la sesión, las maestras compartirán sus observaciones, discutiendo las similitudes y diferencias entre los cuadriláteros que han analizado y las propiedades que han descubierto. Esta actividad no solo les permitirá explorar las propiedades geométricas de manera táctil, sino también generar un razonamiento más profundo sobre las características de estas figuras.

Objetivos	- Analizar las propiedades geométricas de los cuadriláteros, como las simetrías, las diagonales y las características de los paralelogramos, mediante la visualización y el doblado de papel. - Descubrir las simetrías y las diagonales de los cuadriláteros a través de la manipulación física de las figuras, utilizando el doblado de papel para visualizar estas propiedades de manera práctica. - Justificar las observaciones realizadas sobre las simetrías y diagonales de los cuadriláteros, explicando cómo el doblado de papel ayuda a identificar y entender estas propiedades geométricas. - Comparar y contrastar las propiedades de diferentes tipos de cuadriláteros, como los paralelogramos, y discutir en grupo las similitudes y diferencias observadas.
Agrupamientos	Gran grupo
Recursos	Figuras recortadas: cuadriláteros 
Consigna	Trabaja con el cuadrilátero que se te ha proporcionado. Explora la figura mediante el doblado de papel, realizando distintos pliegues para analizar sus características. Observa qué ocurre en cada caso y qué partes coinciden. Investiga de manera autónoma si la figura presenta ejes de simetría y cómo se comportan sus diagonales. Puedes probar diferentes formas de doblado o trazar líneas para comprobar tus hipótesis. Describe las propiedades que identifiques, explicando cómo has llegado a tus conclusiones y utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Compara tu figura con las de las demás y comparte tus observaciones con el grupo, reflexionando sobre las semejanzas y diferencias entre los distintos cuadriláteros.

Tabla 36

Actividad 27. Sumando ángulos

Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, la instructora les proporciona varios triángulos con diferentes ángulos, donde el valor de cada ángulo está indicado en el papel. El objetivo es que las maestras, mediante la observación y análisis, lleguen a la generalización de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo siempre es 180 grados. Posteriormente, se les proporciona otros triángulos, pero sin los valores de los ángulos, y deben utilizar el doblado de papel para descubrir la misma propiedad por sí mismas. Luego, el proceso se repite con cuadriláteros, donde las maestras deben llegar a la conclusión de que la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es siempre 360 grados. Esta actividad no solo refuerza el concepto de la suma de los ángulos de figuras geométricas, sino que también fomenta el trabajo colaborativo y el razonamiento visual y táctil al emplear el doblado de papel para confirmar las propiedades.
Objetivos	- Explorar y descubrir, a través de la observación y el análisis de triángulos con ángulos conocidos, que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es siempre 180 grados. - Utilizar el doblado de papel para comprobar de manera práctica que la suma de los ángulos de un triángulo siempre es 180 grados, y explicar cómo el doblado ayuda a visualizar esta propiedad. -: Generalizar que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es siempre 360 grados, basándose en la observación de cuadriláteros y la exploración con doblado de papel. - Justificar, mediante la observación y el razonamiento, cómo las propiedades de los ángulos en los triángulos y cuadriláteros pueden comprobarse de manera práctica, reforzando la comprensión de las figuras geométricas.
Agrupamientos	Pequeños grupos
Recursos	Cuadriláteros de papel Triángulos de papel
Consigna	Trabaja en pequeño grupo con los triángulos que se te han proporcionado.

	Observa los ángulos indicados y calcula su suma en cada caso. Compara los resultados obtenidos y reflexiona sobre si existe alguna relación común entre ellos. A continuación, utiliza los triángulos sin medidas y explora sus ángulos mediante el doblado de papel. Recorta o dobla los vértices y comprueba qué ocurre al juntarlos. Describe tus observaciones y explica qué has descubierto sobre los ángulos de los triángulos. Posteriormente, repite el mismo proceso con los cuadriláteros. Observa, experimenta mediante el doblado y analiza qué ocurre con sus ángulos. Comparte con tu grupo las conclusiones obtenidas y justifica tus respuestas utilizando el lenguaje geométrico adecuado.

Tabla 37

Actividad 28. Descubriendo propiedades redondas

Fase de Aprendizaje 4: Orientación libre	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad:	En esta actividad, la instructora proporciona a cada maestra un círculo y un óvalo de papel. El objetivo es que, mediante el plegado del papel, descubran las propiedades geométricas de estas figuras, centrándose especialmente en sus simetrías y diagonales. Las maestras explorarán de manera práctica cómo se pueden identificar los ejes de simetría de cada figura y cómo se pueden trazar las diagonales, observando las diferencias entre ambas formas. Durante la actividad, las maestras trabajarán de forma autónoma, pero también podrán discutir sus hallazgos con los demás para contrastar sus observaciones. Al final, se fomentará un espacio de reflexión grupal donde se podrán compartir las conclusiones obtenidas sobre las simetrías y las diagonales de los dos tipos de figuras.
Objetivos	- Experimentar con el plegado del papel para descubrir las simetrías y las diagonales en un círculo y un óvalo, reconociendo las diferencias en las propiedades de estas figuras. - Identificar y describir las simetrías y las diagonales de un círculo y un óvalo, comparando cómo varían entre ambas figuras. -: Justificar las observaciones realizadas sobre las simetrías y diagonales mediante el razonamiento, explicando cómo el plegado ayuda a identificar los ejes de simetría y las líneas diagonales.
Agrupamientos	Individual

Recursos	Circulo de papel Óvalo de papel
Consigna	Trabaja de manera individual con las figuras que se te han proporcionado (círculo y óvalo). Explora cada figura mediante el doblado de papel, realizando distintos pliegues para analizar sus propiedades. Observa qué ocurre en cada caso y qué partes coinciden. Investiga de forma autónoma si las figuras presentan ejes de simetría y cuántos pueden tener. Prueba diferentes formas de doblado para comprobar tus ideas. Explora también si es posible identificar diagonales en cada figura y reflexiona sobre cómo se comportan en el círculo y en el óvalo. Describe tus observaciones y explica las conclusiones a las que llegas, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Finalmente, compara tus resultados con los del grupo y reflexiona sobre las semejanzas y diferencias entre ambas figuras.

- FASE DE APRENDIZAJE 5: INTEGRACIÓN-

A continuación, se presentan en las Tablas 39, 40 y 41; las actividades correspondientes a la quinta y última Fase de Aprendizaje.

Tabla 38

Actividad 29. Completando bi-información

Fase de Aprendizaje 5: Integración	**Geometría bidimensional**
Descripción de la actividad	En esta actividad, las maestras trabajarán en equipos para completar un cuadro con las figuras geométricas que han analizado a lo largo de las sesiones anteriores. Cada equipo tendrá que rellenar el cuadro con diferentes formas geométricas como triángulos, cuadriláteros, círculos, etc., y describir sus propiedades fundamentales, como las diagonales, las simetrías, los ángulos, el número de lados, y cualquier otra característica relevante que hayan observado en las actividades previas. El objetivo es que, de manera colaborativa, las maestras desarrollen su capacidad para clasificar las figuras según sus propiedades y, al mismo tiempo, refuercen la comprensión de estos conceptos geométricos a través de la discusión y justificación en grupo. Posteriormente, cada equipo presentará sus conclusiones y comparará cómo han analizado las propiedades de las distintas figuras.
Objetivos	- Completar un cuadro de clasificación con las figuras geométricas analizadas previamente, describiendo detalladamente sus propiedades, como las diagonales, las simetrías y los ángulos. - Desarrollar habilidades de argumentación y razonamiento matemático al justificar las características de las figuras en función de sus propiedades geométricas, como el tipo de ángulo o el número de lados. - Comparar las descripciones de las propiedades geométricas de las figuras dentro de los equipos y presentarlas de forma clara, promoviendo el intercambio de ideas y el aprendizaje colaborativo.
Agrupamientos	Pequeños grupos
Recursos	Anexo III 

Consigna	Trabaja en pequeño grupo para completar el cuadro de clasificación que se te ha proporcionado. Incluye en el cuadro las diferentes figuras geométricas trabajadas (triángulos, cuadriláteros, círculos, etc.) y describe sus propiedades, como el número de lados, los ángulos, las diagonales, las simetrías y otras características relevantes. Utiliza el lenguaje geométrico adecuado y justifica la información que incorporas, basándote en lo aprendido a lo largo de las actividades anteriores. Reflexiona con tu grupo sobre las relaciones entre las distintas figuras y compara sus propiedades, identificando semejanzas y diferencias. Finalmente, presenta las conclusiones de tu grupo y participa en la puesta en común, contrastando las diferentes clasificaciones y argumentaciones.

Tabla 39

Actividad 8. Kahoot

Fase de Aprendizaje 5: Integración	**Todas las dimensiones geométricas**
Descripción de la actividad	En esta actividad final, las maestras participarán en un Kahoot diseñado para repasar y consolidar todo lo trabajado durante las cuatro sesiones del programa. La instructora les pedirá descargar la aplicación en sus dispositivos móviles o participar en línea en el cuestionario interactivo. Las preguntas cubrirán todos los temas que se han abordado, incluyendo la clasificación de triángulos, las propiedades de los polígonos, las simetrías y otros aspectos geométricos clave. Este Kahoot servirá no solo como una herramienta lúdica para repasar lo aprendido, sino también como una evaluación final para medir el progreso de las maestras en la comprensión de los conceptos geométricos. Al final de la actividad, las maestras tendrán la oportunidad de reflexionar sobre su propio aprendizaje y evaluar en qué áreas necesitan seguir desarrollando su comprensión. La actividad se considera parte de la Fase 5: Formalización del modelo Van Hiele, ya que se busca que las maestras formalicen sus conocimientos y los apliquen en un contexto evaluativo.
Objetivos	-Consolidar y reforzar los conocimientos geométricos adquiridos durante las cuatro sesiones del programa mediante un Kahoot, que abarca todas las propiedades geométricas y conceptos estudiados. -: Evaluar el grado de comprensión de las maestras en relación con los conceptos geométricos clave, tales como la clasificación de triángulos,

	las características de los polígonos y las simetrías, mediante una actividad interactiva. - Fomentar la formalización del conocimiento geométrico, permitiendo que las maestras apliquen lo aprendido en un formato de evaluación estructurado, utilizando un lenguaje matemático adecuado y razonado. - Promover la reflexión sobre el aprendizaje al ofrecer una oportunidad para que las maestras identifiquen sus fortalezas y áreas de mejora, lo que les permitirá continuar desarrollando su razonamiento geométrico.
Agrupamientos	Individual
Recursos	Anexo III 
Consigna	Accede al cuestionario Kahoot desde tu dispositivo móvil o mediante el enlace facilitado. Lee atentamente cada pregunta y selecciona la respuesta que consideres correcta, aplicando los conocimientos geométricos trabajados a lo largo de las sesiones. Participa de manera individual, reflexionando sobre cada respuesta y utilizando el lenguaje geométrico adecuado para interpretar las preguntas. Al finalizar el cuestionario, revisa tus resultados e identifica los aspectos en los que has tenido mayor dificultad. Reflexiona sobre tu aprendizaje, valorando qué conceptos has consolidado y en cuáles necesitas seguir profundizando.

Tabla 40

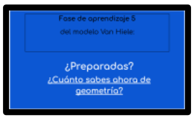
Actividad 18. Artistas matemáticos

Fase de Aprendizaje 5: Integración	**Todas las dimensiones geométricas**
Descripción de la actividad:	En esta actividad, las maestras trabajarán en equipos y se les proporcionarán imágenes de distintas obras de arte, como una pintura y una escultura, que contengan formas geométricas visibles. El objetivo es que utilicen el vocabulario geométrico aprendido en las sesiones anteriores para describir las obras, identificando las formas y figuras presentes, como triángulos, círculos, cuadrados, rectángulos, líneas rectas, curvas, etc. Durante la actividad, las maestras deben

	aplicar lo que han aprendido sobre las propiedades geométricas de las figuras para hacer un análisis detallado de las obras de arte, consolidando sus conocimientos mediante la observación y el uso del lenguaje geométrico. Después de analizar la obra en sus equipos, cada grupo deberá presentar su descripción de las figuras geométricas presentes en la obra de arte, utilizando el vocabulario geométrico adecuado para expresar sus observaciones de manera precisa. Esta actividad busca fortalecer el vínculo entre el arte y la geometría, ayudando a las maestras a consolidar su conocimiento geométrico y a aplicarlo en un contexto visual y creativo.
Objetivos	- Identificar y describir las formas geométricas presentes en una obra de arte (pintura y escultura), utilizando el vocabulario geométrico adecuado (como triángulos, círculos, líneas rectas, etc.). - Aplicar el conocimiento adquirido sobre las figuras geométricas para analizar y describir las obras de arte, desarrollando la capacidad de relacionar elementos artísticos con conceptos geométricos. - Consolidar la red de conocimientos geométricos aprendidos a lo largo de las sesiones, al utilizarlos de manera práctica para interpretar una obra de arte. - Presentar de manera clara y precisa la descripción de la obra de arte, argumentando cómo las formas geométricas se encuentran en la pintura y la escultura, y utilizando correctamente el lenguaje geométrico.
Agrupamientos	Pequeños grupos
Recursos	Anexo III  
Consigna	Trabaja en pequeño grupo con la obra de arte que se te ha asignado. Observa detenidamente la imagen e identifica las formas y elementos geométricos que aparecen en ella. Analiza la obra utilizando el vocabulario geométrico adecuado, describiendo las figuras presentes (triángulos, cuadrados, círculos, líneas rectas, curvas, etc.) y sus propiedades. Reflexiona con tu grupo sobre cómo se relacionan estas formas entre sí y cómo contribuyen a la composición de la obra. Elabora una descripción conjunta en la que expliques qué elementos geométricos habéis identificado y justifica vuestras observaciones utilizando el lenguaje geométrico trabajado. Finalmente, presenta vuestro análisis al resto del grupo, explicando de forma clara y precisa la relación entre la geometría y la obra de arte.

Tabla 41

Actividad 30. Concurso final

<table>
<tr><th>Fase de Aprendizaje 5: Integración</th><th>Todas las dimensiones geométricas</th></tr>
<tr><td>Descripción de la actividad:</td><td>En esta actividad, la instructora presentará una serie de preguntas en formato de presentación PPT en la pizarra digital. Las preguntas estarán diseñadas para que las maestras respondan de manera oral, promoviendo la reflexión y el análisis de conceptos geométricos que han aprendido a lo largo de las sesiones anteriores. Las preguntas estarán enfocadas en propiedades de las figuras geométricas, como las simetrías, los ángulos, las diagonales y la clasificación de las formas.
Durante la sesión, las maestras deberán discutir en grupo las respuestas, justificar sus opiniones y comparar diferentes enfoques. La investigadora actuará como guía, ayudando a formalizar y clarificar las respuestas cuando sea necesario, y asegurándose de que se profundice en la comprensión de los conceptos.</td></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>-Reflexionar sobre y responder oralmente a las preguntas relacionadas con las propiedades geométricas de las figuras, utilizando el lenguaje matemático adecuado para describir las características de las formas.
- Justificar las respuestas a las preguntas basadas en las propiedades geométricas de las figuras, promoviendo el desarrollo del razonamiento lógico-matemático y la argumentación.
- Comparar las respuestas dentro del grupo, discutiendo diferentes enfoques y aclarando conceptos en conjunto para asegurar una comprensión compartida y sólida de los temas tratados.</td></tr>
<tr><td>Agrupamientos</td><td>Gran grupo</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>Anexo III

</td></tr>
<tr><td>Consigna</td><td>Observa las preguntas que se presentan en la pizarra.
Reflexiona sobre cada una de ellas y participa en la respuesta de manera oral, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.
Antes de responder, piensa en las propiedades geométricas que conoces y en cómo puedes justificarlas.</td></tr>
</table>

	Escucha las aportaciones de tus compañeras y compara las distintas respuestas, participando en la discusión para llegar a una explicación común. Argumenta tus respuestas de forma clara, explicando el porqué de tus afirmaciones y relacionando los conceptos trabajados a lo largo de las sesiones. Participa activamente en el concurso, aportando tus ideas y reflexionando sobre los conocimientos adquiridos.

A modo de cierre del diseño de la intervención, se presenta a continuación una síntesis de la secuencia didáctica en relación con las fases del modelo de Van Hiele, con el fin de evidenciar la coherencia interna del programa formativo:

El programa de intervención "*Tocando la geometría"* ha sido diseñado siguiendo de manera coherente y progresiva las fases de aprendizaje propuestas por el modelo de modelo de Van Hiele, lo que ha permitido estructurar la enseñanza de la geometría desde una perspectiva didáctica fundamentada y de forma específica, para ese grupo de maestras.

En la *fase de información,* las actividades se orientan a activar los conocimientos previos de las maestras y a familiarizarlas con los conceptos geométricos básicos mediante la observación y la descripción inicial de elementos como líneas, polígonos y cuerpos geométricos. Esta fase facilita un primer acercamiento al lenguaje geométrico, aún de carácter informal. A continuación, en la *fase de orientación dirigida*, las actividades proponen situaciones guiadas que permiten a las maestras explorar las propiedades de los objetos geométricos mediante la manipulación de materiales y la resolución de tareas estructuradas. En esta etapa, se favorece la construcción progresiva del conocimiento a través de la relación entre representaciones y conceptos. En la *fase de explicitación*, se promueve el uso consciente del lenguaje geométrico, fomentando la descripción, clasificación y justificación de las propiedades de las figuras. Las maestras comienzan a establecer relaciones entre los elementos geométricos, desarrollando un pensamiento más analítico y estructurado. Posteriormente, la *fase de orientación libre* se caracteriza por la resolución autónoma de situaciones problemáticas, en las que las maestras deben aplicar los conocimientos adquiridos sin una guía directa. Las actividades planteadas favorecen la toma de decisiones, el razonamiento deductivo y la utilización del lenguaje geométrico en contextos variados, incluyendo situaciones lúdicas y manipulativas. Finalmente, en la *fase de integración*, las maestras reorganizan y consolidan los conocimientos adquiridos, estableciendo conexiones entre los distintos conceptos trabajados. A través de actividades de síntesis, reflexión y aplicación en contextos diversos —como el análisis de obras artísticas o la resolución de cuestionarios— se favorece la estructuración del conocimiento geométrico y su formalización.

En conjunto, la secuencia de actividades diseñadas permite una progresión desde un conocimiento inicial basado en la percepción hacia un pensamiento geométrico más elaborado, caracterizado por la capacidad de análisis, argumentación y aplicación. De este modo, el programa no solo facilita la adquisición de contenidos geométricos, sino que también promueve el desarrollo del razonamiento geométrico en coherencia con los principios del modelo de Van Hiele.

A partir de la secuencia didáctica descrita y su articulación conforme a las Fases del modelo de Van Hiele, el siguiente capítulo se centra en el análisis de los resultados obtenidos durante la implementación del programa formativo. En este sentido, se pretende examinar cómo la progresión diseñada ha influido en el desarrollo del razonamiento geométrico de las maestras participantes, así como en la evolución de su lenguaje y comprensión de los conceptos geométricos trabajados. De este modo, se analizará en qué medida la intervención ha favorecido el tránsito entre los distintos niveles de pensamiento geométrico propuestos por el modelo.

CAPÍTULO 5: RESULTADOS

El presente capítulo presenta los resultados derivados de la implementación del programa formativo y sustentado en un enfoque cualitativo de carácter fenomenológico-hermenéutico, orientado a comprender en profundidad la experiencia formativa de las participantes y a interpretar el significado de sus procesos de aprendizaje.

En coherencia con este enfoque, el análisis se ha basado en técnicas cualitativas, tales como la observación participante, el análisis de producciones geométricas, la revisión de registros narrativos y audiovisuales, así como cuestionarios y entrevistas abiertas sobre percepciones y aprendizajes. El tratamiento de los datos se ha realizado mediante procedimientos de codificación y categorización temática, permitiendo identificar significados, patrones y transformaciones en la experiencia profesional de las maestras.

De manera complementaria, se administraron instrumentos estandarizados de evaluación del razonamiento geométrico, como el test de Usiskin y la adaptación de Jaime (Usiskin, 1982; Jaime y Gutiérrez, 1990), con el fin de diagnosticar los niveles iniciales y finales de las participantes. No obstante, dado el carácter cualitativo del estudio, los resultados cuantitativos no se incluyen en esta tesis y serán objeto de futuras publicaciones con análisis estadísticos específicos. Por tanto, los resultados que aquí se presentan se centran exclusivamente en los procesos, percepciones y cambios observados en el discurso y la práctica docente a lo largo de la intervención.

Por tanto, este capítulo organiza y expone los hallazgos atendiendo a la estructura metodológica descrita en el Capítulo 3, con el propósito de ofrecer una interpretación rigurosa y fundamentada de la experiencia formativa vivida por las maestras participantes. Se presentan, en primer lugar, los resultados correspondientes al bloque centrado en la mejora del conocimiento geométrico. A continuación, se exponen los resultados relativos a las percepciones y emociones de las maestras participantes. Finalmente, se recoge la información vinculada al desarrollo de la formación, con especial atención a los recursos empleados y a las modalidades de agrupamiento implementadas.

5.1 Resultados del programa *"Tocando la geometría"*

En este apartado se presentan y se analizan los resultados obtenidos tras la implementación de la propuesta didáctica diseñada y explicada en el Capítulo 4. Los resultados se presentan atendiendo a la siguiente ordenación de las dimensiones y categorías:

En la dimensión *Fases de Aprendizaje,* se presentan siguiendo el propio orden secuencial de su diseño, es decir, no representa niveles cognitivos, sino etapas secuenciales en el diseño instruccional que permitieron a las maestras avanzar progresivamente en la comprensión geométrica, a través de diferentes recursos y actividades contextualizadas (desarrolladas de forma pormenorizada en las diferentes dimensiones posteriores).

Los resultados pertenecientes a la dimensión de los *contenidos geométricos trabajados* y *materiales empleados* se abordan de forma longitudinal y transversal, atendiendo a las sesiones y a las dimensiones geométricas. Durante la intervención, el objetivo fue promover que las maestras participantes pudieran transitar progresivamente hacia niveles superiores de comprensión geométrica, entendiendo los *Niveles* no como niveles cognitivos, sino como estructuras de pensamiento jerárquicas, tal como proponen Van Hiele y Van Hiele-Geldof (1957). Es por ello, que este apartado finaliza presentando los hallazgos pertenecientes a la dimensión *niveles de desarrollo geométrico Van Hiele*, tanto en su forma longitudinal como transversal de todos los elementos empleados, pudiendo analizar e interpretar los siguiendo la línea temporal del proceso formativo.

El presente análisis cualitativo se ha desarrollado a partir de los discursos y producciones de las maestras durante las cuatro sesiones formativas implementadas, y cuyas observaciones por parte de la investigadora se complementan con las videograbaciones registradas y su posterior transcripción. A través de un proceso de codificación abierta y categorización temática a través del programa MaxQDA(v.24.9.1), se identificaron cinco dimensiones principales que han permitido comprender el modo en que las maestras conceptualizan la geometría, reflexionan sobre su práctica y manifiestan sus niveles de comprensión: (1) Fases de Aprendizaje, (2) Niveles de Razonamiento geométrico Van Hiele, (3) dimensiones de la geometría, (4) sesiones y (5) recursos y agrupamientos.

La metodología de análisis se sustenta en la codificación de *verbatins* extraídos de las transcripciones audiovisuales, atendiendo tanto al tipo de actividad propuesta (asociada a una fase del modelo y una dimensión geométrica) como al tipo de razonamiento que evidencian las maestras participantes (nivel Van Hiele alcanzado). Esta codificación ha permitido establecer correspondencias entre el diseño instruccional basado en las fases del modelo y los avances en el razonamiento geométrico, permitiendo identificar patrones de progresión o estancamiento en cada eje temático trabajado.

Al ser una investigación longitudinal y dado que se ha trabajado desde un enfoque fenomenológico hermenéutico y centrado en el modelo Van Hiele, el análisis cualitativo que se muestra a continuación está basado tanto en la descripción como en la interpretación de la construcción del proceso de la enseñanza y aprendizaje de la geometría vivida por las maestras participantes, siguiendo una línea temporal del proceso formativo y atendiendo a las dimensiones nombradas anteriormente, finalizando la presentación de resultados de la última dimensión con un análisis transversal recogiendo toda la información que modifica esos Niveles de Razonamiento de las maestras.

5.1.1 Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele

Esta dimensión es el eje vertebrador del estudio junto con la última dimensión (los *Niveles de Razonamiento Van Hiele*, ya que el diseño didáctico incorporó todas las fases del modelo Van Hiele, entendidas como espacios de experiencia donde las maestras dialogaron en cada pequeño reto propuesto. Para ello, las actividades que conformaban las sesiones se diseñaron teniendo en cuenta las dimensiones de la geometría que (desarrolladas en el apartado 5.1.3), las agrupaciones y los recursos. Por tanto, esta dimensión se encuentra íntimamente ligada a los objetivos evolutivos de las sesiones del programa *"Tocando la geometría",* desarrollados en el punto 4.1 de la presente tesis doctoral.

La Tabla 42 refleja la distribución de las actividades en relación con las cinco Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele a lo largo de las ocho sesiones implementadas. La distribución de actividades evidencia un diseño progresivo y coherente con el modelo Van Hiele, comenzando con la contextualización y conocimiento previo (Fase 1-F1), avanzando hacia la orientación (Fase 2-F2) y explicitación (Fase 3-F4), continuando con la orientación libre (Fase 4-F4) y culminando con la integración de contenidos (Fase 5-F5). El peso creciente de la Fase 4 (30%), en equilibrio con las Fases 2 y 3 (con un 23.3% cada una) reflejan una intención pedagógica de acompañar al grupo desde la dependencia inicial hacia la autonomía reflexiva de la Fase 5 (13.3%) dejando en último lugar la Fase 1 con tan solo un 10% de dedicación a la introducción de conocimientos. Todo esto indica un diseño que respeta el carácter cíclico y acumulativo del modelo Van Hiele en el que se introduce, guía, se hace consciente y finalmente se aplica esa integración de contenidos.

Tabla 42

Número de actividades atendiendo a las Fases de Aprendizaje

Fase de Aprendizaje	Actividades	% Total
Fase 1	3	10%
Fase 2	7	23.3%
Fase 3	7	23.3%
Fase 4	9	30%
Fase 5	4	13.3%
Total	30	100%

Nota. Datos obtenidos a partir del diseño metodológico.

Analizando el número de actividades por sesión, se concluyen los siguientes puntos:

Fase 1(F1)-Información (10%): aparece en las tres primeras sesiones, con un peso reducido pero suficiente para introducir contenidos, activar conocimientos previos y contextualizar el nivel de partida. Su ausencia en la última sesión indica tanto que el grupo de maestras ya se encontraba preparado para avanzar sin necesidad de más actividades introductorias, como el propio diseño cíclico y evolutivo del diseño.

Fase 2(F2)- Orientación dirigida (23.3%): tiene mayor presencia en la segunda sesión, donde las tareas guiadas ayudaron a estructurar la comprensión inicial de conceptos geométricos en las diferentes categorías que se analizan en la dimensión 5.1.3 *Dimensiones de la geometría*. La progresión decreciente hacia la cuarta sesión refleja una transición desde la guía por parte de la investigadora docente hacia la autonomía de las maestras.

Fase 3(F3)- Explicitación (23.3%): se distribuye de forma creciente hasta llegar su mayor relevancia en la tercera sesión. En esta fase las maestras en formación tuvieron oportunidad de verbalizar, compartir y discutir sus aprendizajes, condición esencial en el modelo de Van Hiele para consolidar el paso de la observación a la comprensión analítica.

Fase 4(F4)- Orientación libre (30%): su peso aumenta de manera progresiva hasta alcanzar su máximo relevancia en la cuarta sesión. Esto muestra que el programa prioriza el trabajo autónomo y la aplicación flexible del conocimiento, permitiendo que las maestras participantes contrasten sus propios procedimientos y construyan significados personales a través de esos diálogos e interacciones grupales.

Fase 5(F5)- Integración (13.3%): se concentra exclusivamente en la última sesión, lo que responde a la lógica del modelo: un espacio final en el que el grupo sistematiza reflexiona y vincula los aprendizajes adquiridos. Esta culminación confirma que el diseño favorece un cierre integrador y consciente del recorrido formativo.

A continuación, se presentan y desarrollan los resultados de forma pormenorizada atendiendo a las categorías que conforman esta dimensión:

5.1.1.1 Fase 1: información.

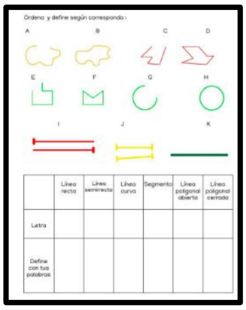
Esta primera fase, según el modelo de Van Hiele, se centra en la toma de contacto inicial con los contenidos y en la activación del conocimiento previo de las participantes. En este sentido, las actividades diseñadas en esta fase tienen como finalidad principal favorecer el reconocimiento inicial de los elementos geométricos y el uso de un vocabulario básico, aún no formalizado, en torno a las distintas dimensiones de la geometría.

Asimismo, la intervención de la investigadora adquiere un papel fundamental como guía inicial del proceso, ya que permite situar a las maestras en el campo de estudio, identificar su punto de partida y orientar el desarrollo posterior de las actividades. Las consignas utilizadas en esta fase se caracterizan por ser abiertas, accesibles y centradas en promover la observación, el diálogo y la reflexión compartida, evitando dirigir hacia respuestas correctas cerradas.

Los resultados muestran que esta fase cumple una función diagnóstica y activadora, permitiendo evidenciar el nivel de conocimiento previo y el tipo de lenguaje geométrico que manejan las maestras al inicio del programa.

Figura 6

Actividad 1: Recordando los tipos de líneas



Con la *actividad 1: recordando los tipos de línea* (véase Figura 6) se observó el conocimiento inicial y el vocabulario empleado por las maestras, la cuales comenzaron a recordar y describir las líneas geométricas basándose en sus características más evidentes, reconociendo y describiendo las líneas mediante definiciones simples, pero sin un análisis formalizado de las propiedades matemáticas de las figuras. Se observa cómo las maestras describen las líneas a partir de sus características más evidentes, utilizando un lenguaje cotidiano y comparaciones con elementos del entorno.

> -" *…Esta es una línea recta porque no tiene curvas, va derecha como una regla…"* (M6, A1)
>
> -" *… Sí, y esta otra —la curva— se parece a un camino que serpentea. No tiene esquinas así que es la poligonal…"* (M17, A1)

Este tipo de respuestas sitúa a las participantes en un nivel inicial de aproximación, donde predomina la intuición sobre el análisis.

Para explorar y diagnosticar el nivel de conociendo de la geometría bidimensional de las maestras participantes, la investigadora iniciaba un recordatorio dialogado que permitió vincularlo con la sesión anterior, recordando que una forma poligonal debe estar formada por al menos tres líneas.

En relación con la geometría bidimensional, la *actividad 9 ¿qué era un polígono?* (véase Figura 7) permite profundizar en la exploración del conocimiento previo mediante un diálogo abierto. Las maestras identifican algunas características definitorias, como la presencia de lados o el uso de líneas rectas, como se observa en intervenciones como "...los polígonos son figuras que tienen lados.

> - *"… ¿Qué figuras de las que hay en el suelo son polígonos? …" (I, A9)*
>
> *-" …Los polígonos son figuras que tienen lados. Si no tienen lados, no son polígonos. Por ejemplo, el 7 no es un polígono…"* (M15, A9)
>
> -" *…Y tienen que ser líneas rectas…:" …Y no pueden tener lados curvos…"* (M13, A9)

Sin embargo, estas definiciones se construyen de forma parcial y aún no sistemática, lo que refleja una comprensión incipiente basada en rasgos aislados más que en una conceptualización completa del término.

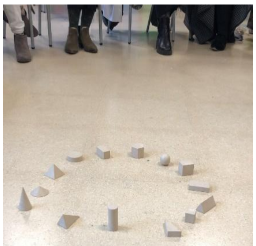
Figura 7

Maestras debatiendo sobre qué elementos se consideran polígonos

Para la geometría tridimensional**,** se llevó a cabo la *actividad 19: descubriendo los cuerpos geométricos.* Esta actividad al igual que las anteriores, la intencionalidad era explorar y diagnosticar el nivel de conocimiento de la geometría tridimensional de las maestras participantes Para ello, se activó el reconocimiento y el vocabulario inicial en torno a los cuerpos geométricos basándose en sus características visibles a través de la exploración sensorial intuitiva y sensorial (vista y tacto). En esta actividad no se les pidió una comprensión formalizada de las propiedades o categorías matemáticas que definen estas figuras, sino que, se centró en que las maestras se familiarizaran con las formas. Al ser el inicio del bloque correspondiente a la geometría tridimensional la investigadora comenzó con una introducción guiada para que las maestras exploraran libremente los cuerpos geométricos con el objetivo de proporcionarles la información necesaria para identificar y clasificar las figuras de manera intuitiva. A través de la manipulación de los cuerpos geométricos, las maestras establecen relaciones entre lo que ven y lo que tocan, favoreciendo un reconocimiento intuitivo de las formas.

Figura 8

Disposición del material tridimensional



La indicación "*…tienes que mirar las del suelo para encontrar la que tú tienes en la mano..." (I, A19)* generó una conexión entre tacto y vista que enfatizó el valor de la tridimensionalidad (véase Figura 8):

-" *…Este es un cono cortado…"* (M23, A19)

- *"…Este cuántos ángulos tiene, a vale 6, hexágono…" (contando y refiriéndose a las aristas del cubo). …"* (M3, A19)

Al verbalizar las propiedades en el juego táctil, las maestras reflexionaron sobre el lenguaje geométrico. Esta fase inicial fue clave: el lenguaje como medio para la comprensión de propiedades.

- *"…Mira la pirámide de Keops…"* (M20, A19)

De manera transversal, los datos evidencian que, en esta fase, el lenguaje geométrico utilizado es mayoritariamente informal, apoyado en comparaciones, ejemplos cotidianos y descripciones basadas en la apariencia. No obstante, este lenguaje constituye una base necesaria para el desarrollo posterior, ya que permite a las maestras comenzar a nombrar, identificar y diferenciar elementos geométricos, aunque todavía sin una estructuración conceptual clara.

En conjunto, los resultados indican que las actividades de la Fase 1 favorecen la activación del conocimiento previo, el uso inicial del vocabulario geométrico y el reconocimiento de figuras a partir de sus rasgos más evidentes. Sin embargo, este reconocimiento se sitúa aún en un nivel fundamentalmente perceptivo, sin una formalización de las propiedades ni una organización sistemática del conocimiento, lo que confirma el carácter introductorio y diagnóstico de esta fase dentro del modelo.

5.1.1.2 Fase 2: orientación dirigida.

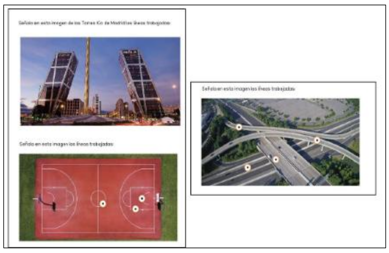
Esta segunda categoría, correspondiente a la Fase 2 del modelo de Van Hiele, se caracteriza por un razonamiento más estructurado, orientado al reconocimiento y clasificación de figuras geométricas a partir de características observables, siempre bajo la orientación de la investigadora. En esta fase, las maestras ya no se sitúan únicamente en una evocación inicial de conocimientos, sino que comienzan a explorar relaciones entre propiedades geométricas mediante tareas guiadas que favorecen la observación, la comparación y la toma de decisiones.

Los datos muestran que, en esta etapa, la guía de la investigadora resulta clave para que emerjan relaciones entre conceptos, se introduzcan criterios de clasificación y se avance hacia una comprensión más organizada de las figuras. Aunque las tareas dejan cierto margen para la exploración, esta sigue estando mediada por preguntas, materiales y consignas que orientan la atención de las maestras hacia determinadas propiedades sin llegar todavía a una formalización completa.

Se llevó a cabo la *actividad 2: definiendo los tipos de líneas*. Esta actividad constituye un primer ejemplo de esta orientación guiada. En ella, la investigadora recupera la clasificación de las líneas según su posición, forma y relación entre sí, y propone tareas estructuradas para que las maestras reconozcan estas propiedades tanto en representaciones abstractas como en contextos reales. Estas intervenciones:

Figura 9

Actividad 2: Definiendo los tipos de líneas



-*" … En estas imágenes de entornos reales ¿qué líneas de las que se han recordado encontráis? …"* (I, A2) (Véase Figura 9)

-" *… En la cancha de baloncesto veo muchas líneas rectas. Como las que marcan los lados y el centro. Todas van derechas…"* (M8, A2)

-" *… Sí, pero mira las líneas que marcan la zona de tiro libre, son como curvas. Aunque están bien hechas, no tienen esquinas…"* (M7, A2)

-" *… Y las líneas de los dos laterales son paralelas, porque siempre están a la misma distancia una de otra, no se cruzan…" (*M17, A2)

evidencian que las participantes empiezan a trasladar conceptos geométricos a situaciones cotidianas. En este sentido, la actividad favorece la conexión entre concepto y representación, haciendo visible un primer nivel de clasificación apoyado en la observación.

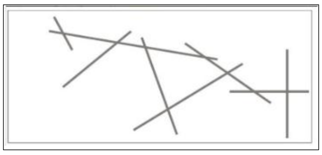
El segundo día del programa fue más dinámico y centrado en actividades diseñadas cuidadosamente para progresar en la geometría unidimensional y bidimensional, se llevaron a cabo tres actividades:

-la actividad 3: descubriendo los ángulos (véase Figura 10). Se dio un paso importante hacia la articulación de conceptos sobre líneas y ángulos, con una fuerte carga de interacción verbal, visual y reflexiva. Previamente se recordó la clasificación de los tipos de ángulos al unir dos líneas rectas. La actividad logró que las maestras observaran y describieran las características de las figuras con el apoyo dialogado del grupo y bajo el guion propuesto por la investigadora, las maestras identificaron los conceptos geométricos, (aunque sin una formalización total), pero si desarrollando una comprensión más estructurada. Las maestras avanzan en la articulación de relaciones entre líneas y ángulos. Bajo la guía de la

investigadora, comienzan a identificar configuraciones geométricas más complejas y a nombrarlas utilizando un vocabulario específico.

Figura 10

Plantilla actividad 3



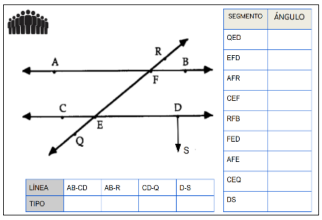
- "*...Mira, aquí hay claramente dos líneas rectas que se cruzan formando un ángulo recto. Esta debe ser una perpendicular...*" (señalando la imagen en la PDI) *(M11, A3)*

-" *...Sí, y esta otra de aquí no la corta en ángulo recto... se nota que el ángulo es más abierto. Eso sería un ángulo obtuso, ¿no? ...*" (M5, A3)

Con esos diálogos se evidencia que las maestras atienden ya no solo a la figura global, sino a elementos concretos y a las relaciones entre ellos. Aunque este reconocimiento sigue apoyándose en lo visual, la actividad evidencia un avance hacia una observación más analítica. Esta progresión se refuerza en

Figura 11

Plantilla actividad 4



la actividad 4: ángulos y líneas en una misma imagen(véase Figura 11) donde el uso de una tabla para registrar información introduce un mayor nivel de sistematicidad en el análisis. La observación intencionada, la categorización guiada y el registro de propiedades favorecen una mirada más estructurada sobre los elementos geométricos presentes en la imagen. Así, la orientación dirigida se manifiesta aquí en la ayuda proporcionada para organizar la información y transformar la percepción inicial en una clasificación más consciente. Esta actividad buscaba la profundización en el reconocimiento sistemático de elementos geométricos (líneas y ángulos) a través de la categorización guiada con el uso de una tabla con variables y códigos. La observación intencionada, el análisis guiado de imágenes y el uso de tablas para registrar información evocaron una mirada más analítica por parte de las maestras, ya que iban compartiendo sus recuerdos, sus conocimientos y descubrimientos, aunque aún basados en la apariencia visual.

Estas dos actividades (bajo la orientación y dirección de la investigadora para ayudar a las maestras a estructurar su análisis), les permitió" aprender a observar y describir" las características específicas de la geometría unidimensional y la formación de ángulos. El enfoque por tanto de las actividades cumplió su objetivo: reconocer y clasificar estos elementos geométricos.

Figura 12

Maestras debatiendo sobre la agrupación de polígonos

En el ámbito de la geometría bidimensional, la *actividad 10: clasificando los polígonos,* las maestras comenzaron a identificar y clasificar propiedades internas de las formas geométricas (lados, ángulos, simetrías, diagonales, regularidad…), a través de una tarea estructurada pero abierta, que fomentaba el descubrimiento *(véase Figura 12).*

> -" *… Regulares e irregulares…"* (M22, A10)
>
> -*" …Vale, regulares e irregulares, ¿por qué era regular o irregular? Explícalo con tus palabras…"* (IA, A10)
>
> -*" …Pues mira por ejemplo la estrella es irregular…"* (M18, A10)

Figura 13

Maestras analizando la simetría de figuras bidimensionales regulares

La manipulación de figuras (véase Figura 13*).* en el suelo y la exploración guiada propiciaron la emergencia de significados. Las maestras estaban en el proceso de reconocer y clasificar figuras geométricas basándose en sus propiedades observables, pero aún bajo la guía de la investigadora que les tenía que dirigir hacia la observación de las propiedades de los polígonos y a tomar decisiones sobre cómo clasificarla, recordando la importancia de emplear un lenguaje geométrico adecuado, esto los llevó a una mayor comprensión y organización de los conceptos geométricos.

> - *"…Vale ya lo tenéis, ahora queda otro" (*refiriéndose a otra posible clasificación) (I, A10)
>
> -*" … ¿qué? ¿otra? aaa! ya sé, por los ángulos" (*M13, A10)

-*" ...Por triángulos- no triángulos"* (M9, A10*)*

-*" ...Cóncavo y convexo, pero no recuerdo cual era cada uno..."* (M10, A10)

-*" ... lo muestra a modo de ejemplo con la palma de la mano..."* (M23, A10)

-*" ...Pues el 5 tiene ambos..."* (M2, A10)

-*" ...Es que en cuanto uno lo tiene hacia dentro, ya se llama cóncavo..."* (M5, A10)

-*" ...ósea que el 1 lo sería..."* (M10, A10)

-*" ... Y el 7..."* (M13, A10)

-*" ... Podemos hacer los que están como para adentro y los que no..."* (M10, A10)

-*" ...Eso era lo de cóncavo y con-beso..."* (se ríe mientras hace el gesto con las manos) (M23, A10)

-*" ...Claro, pero están mezclados, quiero decir, algunas figuras son las dos cosas..."* (M2, A10)

-*" ...Ahii si esto lo está viendo mi hija en Primaria, vaya tela, los convexos están todos fuera y los que tienen un trozo metido son cóncavos...". (M21, A10)*

-*" ...si eso es, convexos tienen todos sus ángulos hacia afuera, pero si tiene alguno "que entra" son los cóncavos tienen al menos un ángulo que "entra"..." (I, A10)*

-*" ...muy bien ya tenemos otra clasificación, nos quedaría otra que es la más fácil y no la decís..."* (I, A10)

-" ...Bueno, pues a ver .... por número de lados..." (M2, A10)

Figura 14

Maestras clasificando figuras bidimensionales

-" *...Venga yo hago las de 3 ...venga el resto decir, no me dejéis sola ahora que he salido...".* (M3, A10) (véase Figura 14)

Sin embargo, el papel de la investigadora sigue siendo decisivo, ya que es ella quien impulsa nuevas clasificaciones, solicita explicaciones y orienta el proceso cuando aparecen dudas o imprecisiones terminológicas. Esto confirma que las maestras avanzan hacia una comprensión más organizada, aunque todavía dependiente del andamiaje externo. En el transcurso del programa se pudo avanzar en esa clasificación de figuras, llevándose a cabo dos actividades:

-la actividad 11: descubriendo los cuadriláteros con geoplanos 3x3 (véase Figura 15). El objetivo era que las maestras identificaran y clasificaran figuras de cuatro lados, reconociendo sus diferencias y semejanzas a través de la observación directa, mediante el

diseño de los cuadriláteros, favoreciendo la transición conceptual desde el reconocimiento visual hacia el análisis formal gracias a esa clasificación. El uso del Geoplano en papel representó un punto de inflexión pedagógica ya que las maestras manipularon el material para construir líneas y figuras, lo que fortaleció su comprensión conceptual y favoreció la expresión verbal. Este diálogo espontáneo evidenció un progreso significativo en la interiorización de conceptos geométricos y el uso del lenguaje disciplinar. Esta actividad supone un nuevo paso en esta dirección. El uso del Geoplano permite pasar del reconocimiento visual a la construcción y comparación activa de figuras, favoreciendo la observación de semejanzas y diferencias entre cuadriláteros.

> -" *… ¿pero no tienen que ser regulares, ¿no? …" (*M23, A11)
>
> -" *… El cuadrado y el rectángulo esos tienen ángulos que son perfectos en sus vértices…" (*M21, A11)
>
> -" *… Pero los que dibujamos M19 y yo no tienen esos ángulos tan exactos…" (*M4, A11)
>
> -" *…Sí, los lados parecen inclinados y algunos son más largos que otros…". (*M19, A11)
>
> -" *… Y la mía… se ve como si se doblara hacia adentro. No es como las demás. ¿Esa era cóncava? …" (*M23, A11)

Con estos diálogos se evidencia que las maestras comienzan a movilizar propiedades geométricas para describir las figuras construidas. La actividad revela así un avance en la interiorización del vocabulario y en la capacidad para clasificar a partir de rasgos observables, aunque todavía con un apoyo importante del contexto de la tarea.

Figura 15

Maestras realizando la actividad 11

En relación con la geometría tridimensional, *la actividad 20: clasificando los cuerpos geométricos,* permite ampliar esta lógica de clasificación guiada al ámbito de los cuerpos. Las maestras comparan figuras, establecen agrupaciones y justifican sus decisiones a partir de criterios como la forma de la base o la presencia de superficies curvas.

Figura 16

Maestra analizando un cuerpo de revolución

-" *…Ya, pero es que esos* (cuadrados*) también pueden ir en esta porque mira tienen la base cuadrada…" (*refiriéndose a los prismas) (M9, A20)

-" *… ¿por qué ha puesto el cono en el grupo de los redondos con el cilindro y no de los pinchos? …"* (M12, A20) (véase Figura 16).

-" …es *que la base es redonda…"* (M11, A20)

En este caso, la orientación dirigida se refleja en el modo en que la tarea impulsa la comparación y obliga a explicitar criterios, sin llegar aún a una categorización completamente autónoma.

Con *la actividad 12: doblado de papel, el círculo y el óvalo.* Las maestras reconocieron propiedades específicas de estas figuras, lo que añadió más información a su conocimiento y propició nuevas clasificaciones, describiendo y utilizando el lenguaje geométrico adecuado. Esta actividad aporta una transición interesante hacia una comprensión más precisa de propiedades específicas.

-" *…Arco: el trocito de la circunferencia que está marcada por dos puntos y la cuerda es la línea que está dentro del círculo, pero sin tocar el centro…".* (M3, A12)

-" *…Radio: como la bici, la línea que va desde el centro a la circunferencia. Y luego pues aclarar la diferencia entre círculo y circunferencia, que el círculo es lo de dentro, porque el circulo tiene interior. El hula-hop es la circunferencia y una moneda sería el círculo…"* (M5, A12)

Como lo hicieron bajo la guía de la investigadora, exploraron las propiedades geométricas de las figuras de manera más estructurada gracias al doblado de papel

-" …Yo veo que tanto el círculo como el óvalo tienen una línea que no tiene esquinas ni cortes. Son curvas cerradas…" (M6, A12)

-" …Sí, pero el círculo es como más "equilibrado". Si doblas cualquier parte, siempre coincide. En el óvalo no pasa eso. …" (M17, A12)

-" …Lo que pasa es que, en el círculo, todos los puntos de la línea curva están a la misma distancia del centro. En el óvalo, eso no ocurre. Por eso no tiene radio fijo. …." (M12, A12*)*

Esta actividad amplía, por tanto, la clasificación geométrica más allá de los polígonos, incorporando figuras curvas y promoviendo una observación más fina de sus diferencias.

En conjunto, los resultados de esta fase muestran que las actividades de orientación dirigida favorecen la clasificación guiada y la comparación de propiedades geométricas, siendo la intervención de la investigadora fundamental para que emerjan relaciones entre conceptos. Los intercambios evidencian que las maestras ya no se limitan al reconocimiento global de las figuras, sino que comienzan a atender a propiedades observables específicas y a utilizarlas como base para organizar sus clasificaciones. No obstante, este proceso sigue dependiendo en buena medida del apoyo externo, lo que sitúa a las participantes en una etapa intermedia entre la percepción inicial y la posterior explicitación analítica.

5.1.1.3 Fase 3: explicitación

Esta tercera categoría, correspondiente a la Fase 3 del modelo de modelo de Van Hiele, se orienta a la explicitación del conocimiento geométrico a través de la argumentación, la reflexión y la verbalización. En esta fase, las actividades no se centran únicamente en el reconocimiento o la exploración, sino en la capacidad de las maestras para expresar, organizar y justificar los conocimientos adquiridos, utilizando un lenguaje geométrico cada vez más preciso.

Los datos muestran que, en esta etapa, las maestras comienzan a formalizar sus ideas, estableciendo relaciones entre propiedades, comparando figuras y elaborando explicaciones más estructuradas. Este proceso implica una transición desde un conocimiento fundamentalmente perceptivo hacia una comprensión más analítica, en la que el lenguaje adquiere un papel central como herramienta de pensamiento y comunicación.

Se llevó a cabo la *actividad 5: conociendo el Geoplano* (véase Figura 17). El uso del Geoplano como recurso manipulativo y exploratorio permitió que emergieran nuevos conceptos que, en actividades y fases anteriores, utilizaban de forma intuitiva (como la limitación de representar curvas) y se fomentó la reflexión sobre las propiedades de las líneas y ángulos. Las maestras empezaron a poner en palabras sus observaciones. Comenzaron a estructurar su lenguaje geométrico de forma más precisa y consciente por lo que constituye un primer momento relevante de explicitación. El uso del material manipulativo favoreció la emergencia de conceptos que previamente eran utilizados de forma intuitiva, permitiendo a las maestras verbalizar sus observaciones y reflexionar sobre las propiedades de las líneas.

Figura 17

Maestras utilizando el Geoplano

-*" … Claro pero aquí no podemos hacer la línea curva ni recta abierta, claro…" (M13, A5)*

Las maestras en esta actividad formalizaban sus conocimientos geométricos al reflexionar sobre las propiedades de las figuras y líneas mediante la manipulación de materiales. Esta actividad permitió explorar de manera concreta y explicar lo que descubrían con el material a través de la acción.

-*" ... Yo hice dos líneas paralelas en el geoplano este, el isométrico. Al principio no sabía si eran realmente paralelas, pero medí la distancia entre los puntos y sí. No se cruzaban ni se inclinaban…". (*M7, A5)

-*" ... ¿y secantes? ¿no creo que se puedan en todos, ¿no…?" (*M4, A5)

Además, surgieron reflexiones sobre las limitaciones del material, especialmente en relación con las líneas curvas y las figuras continuas como el círculo, lo que propició una discusión sobre la naturaleza de las representaciones geométricas.

-" *... Miren (es argentina), yo intenté hacer una curva en el geoplano circular… ¡y no es tan fácil! Tuve que ir cambiando poco a poco los puntos para que se viera redonda y que no se estirase la goma…" (*M17, A5)

Las instrucciones específicas y las preguntas reflexivas por parte de la investigadora impulsaron el uso emergente de terminología matemática como segmento, semirrecta, líneas paralelas, líneas secantes y línea curva.

-*… ¿Pueden representar todas las líneas en todos los tipos de geoplanos?"* (I, A5)

-" *… pero aquí no podemos hacer ni líneas poligonales abiertas, ni líneas curvas ni abiertas ni cerradas…" (M23, A5)*

-" *… y, por ejemplo, aquí los clavos representan los puntos, ¿no?"* (M3, A5)

-" *… ¡Esta es más corta, como… ¿una porción de línea? …"* (M23, A5)

-" *… Sí… creo que esto se llama segmento. Me suena de la primera actividad…"* (M3, A5)

-" *… entonces es como una línea con límites. Tiene dos puntitos que la encierran, ¿no?"* (M23, A5)

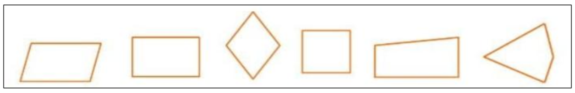
-" *… Yo creo que si…"* (M3, A5)

Las discusiones en torno a las limitaciones del material —por ejemplo, la dificultad de representar curvas— muestran una reflexión incipiente sobre la relación entre objeto geométrico y representación, lo que supone un avance significativo en la comprensión conceptual.

-la actividad 14: analizando los cuadriláteros. En esta actividad las maestras empezaron a formalizar y estructurar sus conocimientos geométricos, aplicando un lenguaje matemático preciso para verbalizar, describir y analizar las figuras. El objetivo era que explicaran y justificara las propiedades geométricas de las figuras, estableciendo relaciones entre las características observadas y aplicar conocimientos ya adquiridos (tipos de líneas, figuras cerradas, ángulos). Para ello se mostraron seis figuras de cuatro lados (véase Figura 18) para que las maestras analizaran sus características. Las maestras avanzan hacia una explicitación más estructurada, utilizando el lenguaje geométrico para describir, comparar y clasificar figuras.

Figura 18

Plantilla actividad 14



-*" ... Son polígonos…"* (M2, A14)

-*" ... Bueno, todas tienen cuatro lados, así que todas son cuadriláteros. Y no todas son regulares…" ..."* (M14, A14)

-*" ...Sí, pero mira, Por ejemplo, el cuadrado y el rectángulo tienen ángulos rectos, mientras que el rombo y el trapecio no siempre, así que no son regulares…" (*M11, A14)

-" *…Entonces aquí solo es el cuadrado…" (*M10, A14)

-" *…Y también tienen líneas paralelas este y este…" (*señala)…" (M21, A14)

-*" …Todos menos el último tiene paralela…" (*M9, A14)

-" *…A claro y secantes tiene otras como el rombo y perpendiculares el (2,4,5) ..."* (M10, A14)

-*" …Y el cuadrado y el rombo tienen todos sus lados iguales, a diferencia del rectángulo y el trapecio. Y ninguna es cóncava…"* (M5, A14)

-" *…Entonces podemos hacer dos grupos: Los que tienen ángulos rectos (cuadrado y rectángulo). Los que no tienen ángulos rectos (rombo y trapecio) ..." (*M14, A14)

Esos diálogos y la diferenciación entre figuras según la presencia de ángulos rectos evidencian que las participantes no solo identifican propiedades, sino que comienzan a organizarlas en criterios de clasificación. En este sentido, la actividad muestra un progreso en la capacidad para relacionar características geométricas y justificar dichas relaciones.

-la actividad 25: simetría triángulos introduce un elemento clave en esta fase: la justificación de propiedades a partir de la manipulación. A través de la papiroflexia, las maestras no solo observan, sino que explican las relaciones entre lados, ángulos y simetrías.

Figura 19

Maestras analizando los triángulos y su simetría

-*" …con el rosa solo 1 eje…". (*Aun así, lo prueban y comprueban). *…" (*M9, A25)

-" *… ¿y en el naranja* (escaleno*)? …" (*I, A25)

-" *…No sale…" (*M19, A25)

En esta actividad, las maestras ya explicaban las propiedades geométricas de las figuras, estableciendo relaciones claras y realizando justificaciones lógicas, verbalizando diferencias y semejanzas entre triángulos. El uso de la papiroflexia (véase Figura 19) permitió una exploración directa y manipulativa de las propiedades geométricas, ayudando a que formalizasen sus observaciones.

> - "*… ¿Cómo son sus* ángulos y lados *al plegar?" (*I, A25)
>
> -" *…Pues en el triángulo equilátero, al doblar por cualquiera de sus alturas, los lados se superponen perfectamente, y los ángulos también quedan enfrentados. Eso me confirma que todos los lados y ángulos son iguales…" (*M11, A25)
>
> -" *…Y el escaleno no tiene ninguna coincidencia al doblar. Ningún lado coincide con otro ni ningún ángulo se superpone. Ahí se ve claro que no hay simetría y que todos sus lados y ángulos son diferentes…" (*M5, A25)

En este caso, la manipulación actúa como soporte para la explicitación, permitiendo que conceptos previamente implícitos —como la simetría— sean formulados de manera consciente.

-la actividad 13: adivina adivinanza mi triángulo. En esta actividad, (véase Figura 20 y 21) las maestras profundizan en la formalización del conocimiento al clasificar figuras en función de sus propiedades.

Figura 20

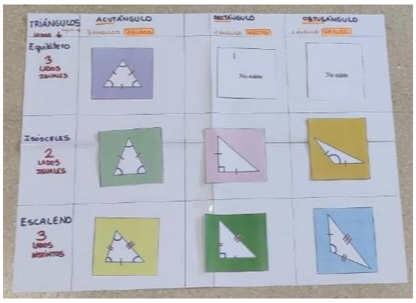
Investigadora realizando la explicación de la actividad 13

> -" *…el nombre de rectángulo para el rosa y para el verde es rectángulo, solo que el verde es a la vez escaleno porque sus tres lados son distintos…" (*M3, A13)

Esa intervención muestra una capacidad para integrar diferentes criterios de clasificación en una misma explicación, lo que evidencia una comprensión más compleja y estructurada de los conceptos geométricos.

Figura 21

Resultado final del cuadro de doble entrada: clasificación de los triángulos



-la actividad 26: diagonal y simetrías de los cuadriláteros. El doblado de papel permitió una aproximación directa y manipulativa a los conceptos geométricos que favoreció la reflexión y la generalización de propiedades relacionadas con los cuadriláteros. Esta actividad adquiere especial relevancia ya que permite conectar conocimientos previos con nuevas propiedades. Las discusiones sobre la diferencia entre cuadrado y rectángulo o sobre el número de diagonales muestran que las maestras son capaces de formular y revisar definiciones de manera más rigurosa. Además, la pregunta sobre las diagonales de los triángulos genera un proceso de razonamiento en el que las participantes justifican sus respuestas a partir de las propiedades de los vértices, evidenciando un avance hacia formas de pensamiento más relacionales.

- *"… ¿Podemos ver si en todas las figuras los lados son iguales? …"* (I, A26)

-*" … Aquí tengo un rectángulo. Sabemos que es un cuadrilátero porque tiene cuatro lados, y, además, sus ángulos son todos rectos. Sí, pero el cuadrado también tiene cuatro ángulos rectos. ¿Cuál es la diferencia entre un rectángulo y un cuadrado de forma formal a ver espera que piense como lo diríamos? …"* (M1, A26)

-*" … La diferencia está en los lados, ¿no? O sea, es que, en un cuadrado, los cuatro lados son iguales, ¿pero en un rectángulo solo los lados opuestos? se dirían que son iguales…"* (M6, A26)

Esta actividad representó un avance muy significativo en el razonamiento geométrico de las maestras, ya que conectó lo aprendido previamente (clasificación de cuadriláteros y paralelogramos) con la exploración de una nueva propiedad, la simetría y la diagonal, a través de la exploración manipulativa y la observación reflexiva. Con esta actividad se fomentó la verbalización, análisis y toma de conciencia de relaciones y atributos que antes no se habían considerado explícitamente. Para ello se les propuso justificar las nuevas propiedades de las figuras (véase Figura 22).

Figura 22

Maestra analizando los cuadriláteros

-" … *Venga vamos a hacer como con triángulos, y vamos a comprobar la simetría, id doblando las formas a ver que sucede…y cuantos ejes de simetría tiene cada figura…*" (I, A26)

-" …*Todos 2 menos el romboide. Este también dos (*refiriéndose al rombo) *menos el romboide…*" (M11, A26)

-" … *Nooo que el cuadrado tenía más, mira (y le enseña la doblez) …*" (M10, A26)

-" *…todos los cuadriláteros tienen 2 diagonales…" (*M6, A26)

- *"…es verdad,* pero mira los ejes de simetría... no tiene, claro. *(*M1, A26)

- *"… el romboide no tiene…"* (M6, A26)

La investigadora les hizo a continuación otra pregunta *trampa,* haciéndoles reflexionar y argumentar:

-" … *¿Cuántas diagonales tienen los triángulos? …*" (I, A26)

-" … *No tienen…*" (M22 y M19, A26)

-" … *Claro porque si tienen que ser no consecutivos no hay suficientes vértices…*" (M23, A26)

-la actividad 21: ¿qué tienes? Esta actividad tenía dos funciones, en primer lugar, las maestras durante el juego debían pensar y explicar las propiedades de las figuras de manera clara y accesible para sus compañeras. Esta actividad se basaba en reconocer mentalmente las propiedades de los cuerpos geométricos a partir de la experiencia sensorial, es decir, tenía como fin la verbalización inmediata, y que las propiedades conocidas se activaran mentalmente, pudiendo ser explicitadas. De esta forma se está validando de forma interna lo

que saben (debían pensar en elementos como el número de caras, si las figuras eran curvas o planas, número de vértices y aristas, etc.). Pone de manifiesto la capacidad de las maestras para verbalizar propiedades geométricas de manera inmediata, utilizando el lenguaje como herramienta para describir y comunicar. La necesidad de identificar una figura a partir de descripciones verbales favorece la activación y explicitación del conocimiento, evidenciando que las propiedades geométricas ya forman parte de su repertorio cognitivo.

Figura 23

Maestras realizando la actividad 21

En segundo lugar, se conectaba la percepción táctil con el lenguaje geométrico (véase Figura 23 y 24), lo que fortaleció la comprensión conceptual y toma de conciencia del conocimiento internalizado, al tener que nombrar y justificar propiedades usando su propio lenguaje ya que se debían verbalizar las propiedades geométricas con el objetivo de que la otra persona la identificara por el tacto.

Figura 24

Maestras realizando la segunda parte de la actividad 21

-" *… Tiene 6 lados, con forma de cuadrado y es un cuerpo geométrico con volumen, se puede ver por todos sus lados, y …todas sus caras son iguales) …"* (M3, A21)

-" *tomaaaaa*… (muestra la figura-el cubo- correcta y aplauden) …" (M10, A21)

-La actividad 15: yo tengo, quién tiene. En esta actividad las maestras formalizaron sus conocimientos sobre las propiedades geométricas, en este caso, de los polígonos. El juego les permitió explorar las propiedades de las figuras de forma más estructurada, mientras consolidaban lo aprendido mediante la formulación de preguntas y respuestas claras del propio juego. Esta actividad refuerza este proceso al exigir la formulación de preguntas y respuestas basadas en propiedades geométricas, consolidando así la capacidad de las maestras para expresar y relacionar conceptos de forma estructurada.

En conjunto, los resultados de esta fase muestran un avance significativo en la explicitación del conocimiento geométrico. Las maestras no solo identifican propiedades, sino que comienzan a nombrarlas, compararlas y justificarlas con mayor precisión, utilizando un lenguaje más consciente y estructurado. Este cambio evidencia una transición desde un reconocimiento basado en la percepción hacia una comprensión analítica, en la que la verbalización se convierte en un elemento clave para la construcción y consolidación del conocimiento.

5.1.1.4 Fase 4: orientación libre

La cuarta categoría, correspondiente a la Fase 4 del modelo, se caracteriza por ofrecer a las maestras la posibilidad de aplicar los conocimientos geométricos adquiridos en contextos más abiertos, lúdicos y menos dirigidos. A diferencia de las fases anteriores, en esta etapa las participantes debían organizar, movilizar y comunicar lo aprendido con un mayor grado de autonomía, tomando decisiones y poniendo en juego estrategias propias. De este modo, las tareas planteadas favorecieron no solo la aplicación del conocimiento geométrico, sino también su uso funcional en situaciones de interacción, resolución de problemas y argumentación.

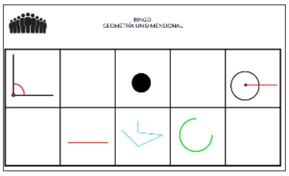
En esta fase, los datos muestran una evolución relevante en la actuación de las maestras, ya que se observa una menor dependencia de la guía de la investigadora y una mayor capacidad para explorar, comparar, justificar y reformular sus respuestas. Las actividades propuestas facilitaron espacios en los que el error, la comprobación y la negociación de significados formaron parte del proceso de aprendizaje, en coherencia con el carácter de orientación libre descrito por el modelo de Van Hiele.

-la actividad 6: Bingo geométrico (véase Figura 25). En esta actividad las maestras participaron en una actividad estructurada pero que requería autonomía en el reconocimiento y uso del lenguaje geométrico, aplicando lo aprendido en un contexto de juego tradicional como es el Bingo, pero adaptado a los contenidos de la formación, donde pueden identificar y relacionar conceptos geométricos de manera más libre, pero aún con cierto nivel de guiado. permitió comprobar cómo las maestras eran capaces de reconocer conceptos geométricos de manera relativamente autónoma en un contexto lúdico. Aunque la actividad mantenía una estructura cerrada propia del juego, exigía identificar definiciones y relacionarlas con

conceptos previamente trabajados, activando el vocabulario geométrico de forma funcional y rápida.

Figura 25

Plantilla cartón actividad 6: Bingo geométrico



- *“...polígono de 4 lados de la misma longitud y de ángulos interiores iguales…” (*I, A21)

-” *…o sea el cuadrado…”* (M9, A6)

Esas expresiones tras escuchar la definición leída por la investigadora evidencian que las maestras ya no se sitúan en una fase inicial de reconocimiento informal, sino que pueden vincular propiedades y conceptos con mayor agilidad. En este sentido, la actividad muestra una aplicación autónoma del conocimiento, aunque todavía en un entorno estructurado.

- *la actividad 7: yo dibujo tu dibujo.* Esta actividad promovía la aplicación de sus conocimientos de manera práctica a través de la comunicación, mediante la explicación y la utilización del lenguaje geométrico para describir propiedades de manera clara y precisa para que la otra maestra creara la figura (véase Figura 26)., logrando una correcta reproducción del dibujo, mediante la interpretación de las instrucciones recibidas por parte de su compañera. Las maestras aplicaron el lenguaje geométrico como herramienta de comunicación precisa. La tarea exigía describir y reproducir figuras sin apoyo visual compartido, lo que implicaba seleccionar información relevante, organizarla verbalmente y transmitirla con claridad.

> -*” …Vale entonces, dibuja dos paralelas, líneas rectas horizontales, y deja bastante hueco entre ellas, y ahora dibuja una línea vertical que una los dos inicios de las paralelas. Vale bien, ahora dibuja lo mismo dentro, pero demás debes cerrarlo con otra línea vertical…”* M11, A7)

La indicación de esta participante muestra un uso funcional del vocabulario geométrico en una situación auténtica de comunicación. Más allá del reconocimiento de conceptos, esta actividad evidencia que las maestras comienzan a utilizar el lenguaje geométrico para actuar sobre la tarea y guiar la producción de otra persona, lo que constituye un rasgo claro de autonomía cognitiva y verbal.

Figura 26

Maestras realizando la actividad 7

-la actividad 16: teselamos con Pattern Blocks. El objetivo de esta actividad era que las maestras tomasen decisiones por sí mismas, seleccionando las figuras que mejor se adaptaran a la tarea de teselación (véase Figura 27). y justificando sus elecciones de forma razonada, verbalizando qué figuras eran las mejores para completar el plano. Esta actividad favoreció la toma de decisiones razonadas en torno a la composición de figuras y el recubrimiento del plano. Las maestras debían seleccionar piezas, probar combinaciones, descartar opciones y justificar sus elecciones en función de las propiedades de las formas.

Figura 27

Maestras realizando la actividad 16

-*" ...Como pongamos pétalos se nos acaba porque son redondos y se van a chocar unas con otras, no va a cuadrar bien. entonces en todo caso habrá que poner algo así (y coge un rombo encajando entre dos hexágonos) porque esto sí que cuadra..."* (M5, A16)

-*" ...Voy a empezar con estos cuadrados. que, encajan perfectamente..."* (M16, A16)

-" *...Sí, y con los rombos también se pueden llenar espacios..."* (M22, A16)

-" *…con círculos no chicas, las descartamos, aunque los semicírculos si las podemos usar al final que tienen una parte recta..."* (M4, A16)

-" *…Pero habrá que unir todo, ¿no? bueno vamos juntando y a ver ahora que hacemos con el resto Entonces, ¿qué figuras sí sirven para llenar todo el espacio sin dejar huecos? ..."* (M22, A16)

-*" ...Mira con estas, con los trapecios hacemos más hexágonos..." (M23, A16)*

Esas intervenciones muestran que las decisiones no se basan únicamente en ensayo y error, sino en una reflexión sobre la forma, el encaje y la cobertura del espacio. Así, la actividad evidencia una comprensión más operativa de las relaciones entre figuras geométricas y un uso del razonamiento espacial orientado a la resolución de problemas. Es decir, esta actividad y de acuerdo con la Fase 4, les permitió experimentar de forma libre y aplicar sus aprendizajes de manera directa.

-la actividad 17: Hundir la forma. En esta actividad, las maestras tuvieron la oportunidad de explorar y aplicar los conocimientos a través de la resolución de problemas de forma lúdica. Debían emplear conceptos geométricos de manera autónoma en un contexto más abierto y creativo, como en el juego original de *"Hundir la Flota",* desarrollando sus habilidades para identificar y describir formas geométricas, en concreto, las propiedades de los triángulos, (véase Figura 28). Las maestras pusieron en juego de manera autónoma sus conocimientos sobre triángulos, coordenadas y propiedades geométricas en un contexto lúdico de deducción. La actividad exigía formular hipótesis, interpretar pistas y ajustar las respuestas en función de la información disponible.

> -" *…Voy a empezar.: si tienes un triángulo que tenga un ángulo recto…"* (M19, S3, A17)
>
> -" *… (Mirando su geoplano) ¡Sí! El tuyo tiene los tres lados iguales…"* (M12, S3, A17)
>
> -" *… no, pero el tuyo esssssss triángulo rectángulo, porque tiene un ángulo recto…"* (M19, S3, A17)
>
> -" *… pues ala ya está…" (risas)* (M12, S3, A17)

Figura 28

Maestras realizando la actividad 17

Esas expresiones reflejan que las participantes son capaces de emplear propiedades geométricas como base para inferir y verificar respuestas. En este caso, el conocimiento no se limita a ser recordado, sino que es utilizado estratégicamente para resolver una situación abierta.

- la actividad 24: formando formas. La actividad se enfocaba en que las maestras resolvieran problemas de forma autónoma y creativa, eligiendo cómo abordar los desafíos propuestos en las tarjetas en base a esas instrucciones (véase Figura 29). En esta actividad, debían construir una forma bidimensional atendiendo a unas indicaciones precisas. Al ser

grupal, debían seleccionar y justificar las elecciones de los bloques geométricos. Con esta actividad se profundizó en esta misma lógica, al plantear retos de composición geométrica con distintos niveles de dificultad. Las maestras debían seleccionar materiales, ensayar configuraciones y justificar las soluciones alcanzadas.

Figura 29

Maestras componiendo figuras con Pattern Blocks

-" *… mira si, juntando tres triángulos sale un trapecio…"* (M3, A24)
-" *…alaaaaaaa oleeee…" (*M23, A24)

Esos diálogos muestran que las participantes identifican relaciones de composición entre figuras y utilizan ese conocimiento para construir nuevas formas. La actividad evidencia, por tanto, una aplicación flexible del conocimiento geométrico y una mayor autonomía en la resolución de tareas no completamente pautadas.

-la actividad 22: cuadro de doble entrada. La actividad fomentaba una mayor reflexión y razonamiento independiente ya que las maestras debían aplicar sus conocimientos geométricos, utilizando el cuadrante para clasificar y organizar las propiedades de los cuerpos geométricos (véase Figura 30).

De forma similar, la *actividad 22: cuadro de doble entrada* y la *actividad 23: ¿Quién es quién? geométrico* reforzaron la organización autónoma de la información geométrica y el razonamiento basado en propiedades. En ambas tareas, las maestras debían clasificar, discriminar y formular preguntas precisas, utilizando el lenguaje geométrico como instrumento de análisis y selección. Estas actividades ponen de manifiesto que el conocimiento comienza a estar suficientemente estructurado como para ser movilizado en contextos distintos, sin necesidad de una guía constante por parte de la investigadora.

Figura 30

Clasificación final de los cuerpos geométricos

-la actividad 23: ¿Quién es quién? Geométrico. Esta actividad lúdica y estructurada, permitió a las maestras pensar de manera lógica y reflexiva sobre las propiedades de las figuras geométricas, basado en tradicional juego de mesa ¿Quién es quién?, pero modificado para los conceptos abordados en la formación (véase Figura 31).

Figura 31

Maestras realizando la actividad 23

-la actividad 27: sumando ángulos. En esta actividad, las maestras tuvieron la oportunidad de descubrir nuevas propiedades geométricas con mayor autonomía y reflexión resolviendo un problema, ya que debían reinterpretar una propiedad desde otro método que no fuera la suma de ángulos. Al recibir la instrucción por parte de la investigadora y no tienen tener los grados escritos, debían buscar una justificación utilizando el doblado de papel. Lograron llegar a la conclusión de que el conjunto de vértices hace una línea recta y que por eso son 180º la suma de los ángulos de los triángulos, relacionando propiedades previamente descubiertas (suma de 180° en triángulos). Esta actividad tiene especial relevancia ya que constituye una evidencia especialmente significativa del tipo de razonamiento que promueve

esta fase. En esta actividad, las maestras no se limitaron a reproducir un procedimiento conocido, sino que reinterpretaron una propiedad geométrica mediante una estrategia alternativa: el doblado de papel. Con esos diálogos evidencian un proceso de descubrimiento y generalización a partir de la manipulación, mostrando la capacidad de las maestras para encadenar deducciones y transferir una propiedad a una nueva situación geométrica. Este tipo de intervención confirma un avance claro hacia formas de razonamiento más autónomas, relacionales y justificadas.

> -*"... Yo tampoco sabía por dónde empezar, pero con la pista del doblado… he cortado un triángulo, lo he doblado por los vértices hacia el centro y... ¡mira! ..."* (M5, A27)
>
> - *"... ¡Ah, lo he hecho también! Cuando doblas los tres vértices hacia un punto, las puntas encajan perfectamente en línea recta. Como si formaran una línea horizontal…"* (M4, A27)
>
> -*"... Entonces, si las tres esquinas del triángulo juntas forman una línea recta… eso significa que suman 180 grados, porque una línea recta tiene ese valor…"* (M11, A27)
>
> -" *... ¡Es verdad! Es como si los tres ángulos se reorganizaran en una línea recta. No hace falta medirlos, lo demuestra el doblado. ..."* (M19, A27)

Ese descubrimiento produjo una generalización en los cuadriláteros (2 triángulos son 180→ la suma es 360°). Esto hito supuso un gran desafío cognitivo, apareciendo conocimiento con deducciones encadenadas. El objetivo de la actividad logró el objetivo: el empleo de estrategias (en este caso, el doblado de papel) para llegar a generalizaciones sobre las propiedades de los ángulos en triángulos y cuadriláteros.

> - *"...ya tía como se enteren los padres (risas) Entonces, Espera. Si el triángulo suma 180°, y eso es una línea recta, entonces… ¿podríamos dividir un cuadrilátero en dos triángulos? ..."* (M4, A27)
>
> - *"...Sí! Si uno une una diagonal, cualquier cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos. Y si cada triángulo suma 180°, entonces 180 + 180 = 360 grados. ..."* (M5, A27)
>
> - *"... ¡Claro! No es que el cuadrado "tenga más" porque sea más grande, sino porque tiene más ángulos. Es como si sumaras dos triángulos pegados. ..."* (M11, A27

La actividad 27 constituye una evidencia especialmente significativa de esta fase, ya que las maestras no se limitan a reproducir un procedimiento conocido, sino que reinterpretan una propiedad geométrica mediante una estrategia alternativa —el doblado— y alcanzan una generalización a partir de la comparación y el razonamiento.

-la actividad 28: descubriendo propiedades redondas. En esta actividad el objetivo era que aplicaran sus conocimientos en un contexto más abierto y práctico a través del debate y el uso de las manos como recurso de validación perceptiva. Esta actividad continuó esta línea de trabajo al invitar a las maestras a explorar propiedades geométricas en un contexto

más abierto, comparando círculo y óvalo a partir de la manipulación y el debate. Aunque la tarea se apoya en la experiencia perceptiva, los resultados muestran que las participantes no se quedan en una observación superficial, sino que tratan de validar sus hipótesis y contrastarlas con las del grupo, consolidando así un uso más independiente del conocimiento geométrico.

En conjunto, los datos correspondientes a esta fase muestran que las maestras aplican el conocimiento geométrico en situaciones menos dirigidas, tomando decisiones, formulando hipótesis, ajustando estrategias y utilizando el lenguaje geométrico de forma funcional. Esta evolución permite interpretar que la orientación libre no se limita a una mayor libertad en la ejecución de las tareas, sino que se traduce en una autonomía creciente para movilizar, comunicar y justificar el conocimiento construido en las fases anteriores.

5.1.1.5 Fase 5: integración

Esta última fase, según el modelo de modelo de Van Hiele, se orienta a favorecer la reorganización y consolidación del conocimiento geométrico adquirido a lo largo de las fases anteriores. En este momento del proceso, el aprendizaje deja de centrarse en la exploración o el descubrimiento para avanzar hacia la estructuración, conexión y formalización de los conceptos, permitiendo a las maestras aplicar sus conocimientos de manera más profunda y justificada.

En coherencia con la secuencialidad del modelo, esta fase se desarrolló en la última sesión, actuando como un espacio de síntesis en el que las participantes integraron los aprendizajes construidos previamente. Los datos muestran que, en esta etapa, las maestras utilizan un lenguaje geométrico más preciso, establecen relaciones entre diferentes propiedades y son capaces de justificar sus respuestas con mayor rigor.

-la actividad 8: Kahoot (véase Figura 32): permitió revisar y consolidar los contenidos trabajados a lo largo del programa. Aunque se trata de una actividad estructurada, las respuestas de las maestras evidencian una mayor rapidez y seguridad en la identificación de conceptos geométricos, lo que sugiere una interiorización del conocimiento. En este sentido, la actividad no se limita a la repetición, sino que refleja una reorganización de los contenidos en una estructura más estable.

Figura 32

Imagen de la maestra ganadora de la actividad Kahoot

-la actividad 18: artistas matemáticos. constituye una evidencia especialmente significativa de esta fase, al implicar la transferencia del conocimiento geométrico a un contexto distinto del estrictamente escolar. Las maestras analizan una obra artística utilizando categorías y vocabulario geométrico, lo que evidencia una comprensión que trasciende el reconocimiento de figuras para convertirse en interpretación. (véase Figura 33).

Figura 33

Maestras realizando la actividad 18

Equipo 1

- *"…es un cuadrilátero y en su interior podemos ver circunferencias, círculos, rectángulos y triángulos, Los triángulos que se pueden observar son isósceles, escalenos, equiláteros al igual que podemos apreciar sus ángulos agudos, obtusos y rectángulos. Todas estas figuras conforman una obra de arte…"* (M4, A28)

-" *…perdonad, pero no hay ángulos obtusos. …"* (M23, A28)

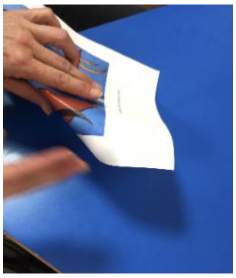
-" *…hombre que no, …"* (M19, A28)

-" *…hay uno…"* (M5, A28)

-" *… tu sí que eres obtusa…"* (riendo) (M4, A28)

Figura 34

Maestra doblando la imagen para comprobar el ángulo del triángulo



- "*...mira es este...*" (señala el triángulo obtuso) (M9, A28)
- "*…yo lo veo recto, las demás le dicen que no, que lo han medido doblando el papel...*" (M23, A28)
-*".. que no, que lo hemos medido doblando el papel…" (*M9, A28) (véase Figura 34).

Equipo 2

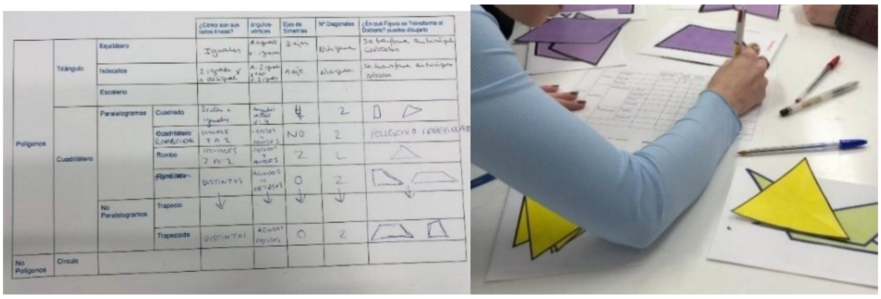
- *"…Bosque de cuerpos geométricos con distintos volúmenes. Cabe destacar la presencia de esferas, cuerpos piramidales y prismas. En resumen, es una composición de poliedros irregulares, sólidos platónicos y de cuerpos redondos o de revolución…" (*M23, S4, A28)

La actividad 18 resulta especialmente relevante como evidencia de integración, ya que las maestras trasladan el conocimiento geométrico a un contexto distinto del estrictamente escolar, interpretando una obra artística desde categorías geométricas y utilizando el vocabulario disciplinar para justificar sus observaciones; evidenciando la capacidad de integrar múltiples conceptos en un mismo discurso. Asimismo, los intercambios entre las participantes, como el debate sobre la existencia de ángulos obtusos y su comprobación mediante el doblado del papel (véase Figura 34), evidencian un proceso de validación colectiva del conocimiento. Este tipo de interacción indica que las maestras no solo aplican conceptos, sino que los contrastan, revisan y argumentan, consolidando así un conocimiento compartido y reflexivo.

-la actividad 29: completando bi-información. refuerza esta integración al exigir a las maestras organizar y clasificar de manera sistemática las propiedades de las figuras geométricas trabajadas previamente (véase Figura 35). En esta tarea, las participantes articulan diferentes dimensiones del conocimiento —lados, ángulos, simetrías o diagonales— dentro de un mismo esquema, lo que evidencia una reorganización conceptual más compleja y estructurada.

Figura 35

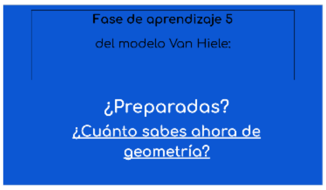
Maestras realizando la actividad 29



-la actividad 30: concurso final. (véase Figura 36) pone de manifiesto un nivel más elevado de formalización del lenguaje geométrico. Las respuestas de las maestras, como "...Cuadrado: 4 lados, 4 vértices. Es un polígono regular..." (M18, S4, A30), muestran no solo el uso correcto de la terminología, sino también la capacidad para integrar diferentes propiedades en una explicación coherente. En estas intervenciones se observa una articulación del conocimiento que combina clasificación, definición y justificación.

Figura 36

Imagen de la primera diapositiva de la actividad 30



- "*… Cuadrado: 4 lados, 4 vértices. Es un polígono regular porque todos sus lados y ángulos son iguales. Es convexo y tiene 4 ángulos rectos. Además, es un cuadrilátero y un paralelogramo. …"* (M18, S4, A30)

- "*… Rectángulo: 4 lados, 4 vértices. Es regular en términos de sus ángulos, porque todos son rectos, pero no de sus lados porque dos son más largos. También es convexo y un paralelogramo. …"* (M5, S4, A30)

- *"...Rombo: 4 lados, 4 vértices. No es regular porque sus ángulos no son iguales, pero sí tiene todos sus lados de la misma longitud. Es convexo y es un paralelogramo porque tiene lados opuestos paralelos. …"* (M7, S4, A30)

En conjunto, los resultados correspondientes a esta fase muestran que las maestras reorganizan y articulan los conocimientos previamente trabajados, utilizando un lenguaje geométrico más preciso y estableciendo relaciones entre conceptos de distintas dimensiones de la geometría. Las actividades de cierre evidencian no solo el recuerdo de contenidos, sino también la capacidad de síntesis, transferencia y argumentación, lo que permite interpretar que el conocimiento geométrico ha sido integrado en una estructura conceptual más amplia y funcional.

El análisis de las cinco Fases de Aprendizaje pone de manifiesto una progresión coherente en el modo en que las maestras se aproximan al conocimiento geométrico a lo largo del programa. Desde una primera fase centrada en el reconocimiento perceptivo y el uso de un lenguaje informal, las participantes avanzan hacia procesos de clasificación guiada, explicitación de propiedades y, finalmente, aplicación autónoma e integración de los conocimientos adquiridos.

Los datos evidencian que esta evolución no se produce de manera lineal, sino a través de un proceso gradual en el que la interacción, la manipulación de materiales y el uso progresivo del lenguaje geométrico desempeñan un papel fundamental. En este sentido, las maestras pasan de describir las figuras a partir de su apariencia global a identificar, comparar y justificar propiedades específicas, utilizando un vocabulario cada vez más preciso y estructurado.

Asimismo, se observa que el papel de la investigadora es especialmente relevante en las fases intermedias, donde actúa como mediadora para favorecer la transición desde un conocimiento intuitivo hacia una comprensión más analítica. A medida que avanza el programa, esta mediación disminuye, dando paso a una mayor autonomía en la aplicación del conocimiento y en la argumentación geométrica.

Esta progresión en las formas de razonamiento y en el uso del lenguaje geométrico sugiere una evolución en los modos de comprensión de las participantes que se vincula directamente con los niveles de razonamiento geométrico descritos por el modelo de Van Hiele, cuyo análisis se presenta en el siguiente apartado.

5.1.2 Niveles de Razonamiento geométrico Van Hiele

En esta dimensión se realiza un análisis transversal en conexión con las dimensiones previamente desarrolladas, con el fin de comprender cómo las maestras transitan por los distintos niveles de razonamiento geométrico descritos en el modelo de Van Hiele. Este análisis permite identificar los momentos en los que emergen cambios en las formas de pensamiento, así como posibles estancamientos, contradicciones internas, reformulaciones discursivas y procesos de toma de conciencia.

Para ello, se analizan los intercambios dialógicos producidos durante las actividades, atendiendo a cómo las maestras verbalizan sus ideas, qué tipo de lenguaje emplean, qué dificultades manifiestan y qué intervenciones o recursos favorecen la evolución de su razonamiento. Este proceso se interpreta a la luz del modelo de Van Hiele, sin imponer categorías externas, sino mostrando cómo los significados emergen y se transforman a lo largo del tiempo, en coherencia con el enfoque fenomenológico-hermenéutico que sustenta esta investigación (Capítulo 3).

El análisis se organiza atendiendo a los siguientes aspectos:

- La identificación de los niveles de razonamiento (desde la visualización hasta formas incipientes de deducción), a partir de evidencias discursivas.
- Las fases de aprendizaje que favorecen una mayor reflexión y verbalización geométrica.
- La evolución en la precisión del lenguaje geométrico utilizado.
- Las dinámicas, recursos y situaciones que generan conflicto cognitivo o favorecen el cambio conceptual.

5.1.2.1 Sesiones 1-2

La primera sesión de formación estuvo marcada por un clima inicial de desconcierto y ansiedad, generado por la realización de los cuestionarios diagnósticos (Usiskin, 1982; Jaime y Gutiérrez, 1990) (véase Figura 37). Este momento se entiende como una irrupción negativa: las maestras se enfrentan a una tarea que desborda sus certezas inmediatas y pone en evidencia la distancia entre lo que recuerdan y lo que se les demanda. Esta vivencia se articula en expresiones cargadas de humor y autocrítica que funcionan como estrategias de defensa frente al desconcierto y ante la dificultad de ambas pruebas.

- "*…Pero si yo voy por la 3 aún, esto es muy complicado…" (*M18)
-:" *…Ostras menudo examen" a pillar" …" (*M3)
-:" *… ¡Totalmente tía, son super difíciles! …" (*M10)
-" *…Menudo chute cerebral si…" (*M23)
-" *…Yo tengo ya el cerebro para irme a mi casa…" (*M19)
*- "...Madre mía nos has matado después de todo el día estos exámenes" (*M18)
*-" … ¿te imaginas que alguien lo aprueba? Flipas…" (*M20)
-:" *…Pues mi lenguaje es como el de mis niños…" (*M22)
*-" …Esto lo estamos viendo en Primaria y yo dudo…madre mía…" (risas) (*M15)
*-" …Esto e imposible tía peor si no entiendo ni el enunciado…" (*M22)

-" *…Claro si yo sé que todo esto lo he dado, pero no lo recuerdo, pero me suena…"* *(*M16)

-" *…Mi cabeza es incompatible con esto, de verdad…" (M*18)

-" *… ¿pero y esto lo tenemos que hacer otra vez luego cuando acabemos la formación? (*M20)

-*" …Yo ese día no vengo…" (Risas) (*M21)

Figura 37

Maestras realizando las pruebas geométricas iniciales

La Fase 1 de información no se centraba tanto en los contenidos geométricos como en crear un punto de partida común entre las maestras y la investigadora: reconocer las dificultades, aceptar que no se sabe todo y estar dispuestas a comenzar desde lo más básico. Este primer momento, de poner en común las dudas y la incomodidad, permitió a la investigadora marcar el marco de trabajo y resaltar el carácter progresivo y práctico de la formación, modificando las dinámicas. De este modo, se configuró un clima de confianza que hará posible el tránsito hacia fases posteriores del modelo en las siguientes sesiones.

En la *actividad 1 (recordando los tipos de líneas),* las maestras comenzaban a verbalizar sus concepciones iniciales mediante definiciones y se observó un intento de ir más allá de la simple apariencia, encontrándose entre el Nivel 1 (visualización) (N1) y el Nivel 2 (análisis) (N2).

-" *… El segmento es un trozo de línea…"* (por tanto, detecta que es una línea con un principio y un fin) *(*M11, A1)

-" *… la línea cortada es una semirrecta…" (*M23, A1)

-" *… línea poligonal abierta es como un zigzag que no se cierra, como unos rayos …" (*M3, A1)

De manera similar, hay maestras que añadieron matices a esas definiciones iniciales, mostrando un razonamiento más analítico:

-" *… Yo creo que la línea recta se puede extender en ambas direcciones sin fin, por eso no tiene principio ni final visibles…" (*M10, A1)

> -" *… La diferencia entre una línea y una semirrecta está en los extremos: la semirrecta tiene un punto de inicio, pero sigue infinitamente en una dirección. …" (*M14, A1)
>
> -" *… Es que justo por eso se llama "cerrada", porque los segmentos que la forman se conectan y no hay inicio ni final visibles. Mientras que en la poligonal abierta, los segmentos no se conectan al final……" (*M8, A1)
>
> -" *… Esta línea me parece curva porque no tiene ángulos…" (*M18, A1)

Estas aportaciones reflejaban el inicio de un discurso que empezaba a reconocer propiedades y atributos, y no solo la forma de las figuras. La sesión, mostró también estancamientos o errores conceptuales, confundiendo, por ejemplo, la recta con el segmento, revelando un anclaje visual. Desde el marco de Van Hiele, este momento reveló un posicionamiento en el Nivel 1(visualización) (N1), ya que el discurso se centraba en el reconocimiento superficial de las formas, sin hacer referencia a propiedades internas ni a relaciones lógicas.

> - *"...pensaba que la recta es solo lo que se ve en el dibujo…" (*M21, A1)
>
> -" … ¡Ah! Entonces no es que tenga "media línea", sino que tiene un punto de origen y sigue para siempre… *" (*M18, A1)
>
> -" *… Yo antes pensaba que la línea recta y la semirrecta eran lo mismo, pero ahora veo que no es solo cómo se ven, sino cómo están definidas…". (*M3, A1)

De manera similar, la dificultad para diferenciar la curva de la poligonal reflejó cómo la interpretación de la imagen puede conducir a errores si no se media con categorías precisas.

> - *"...se parece a un camino que serpentea… no tiene esquinas así que es la poligonal" (*M18, A1)
>
> -" *… sí una línea tiene piquitos, es una línea poligonal, ¿no? No es lisa como la curva…". (*M2, A1)

Estos momentos de confusión son especialmente porque muestran cómo el lenguaje cotidiano colisiona con el lenguaje propio matemático. Al hacerse visibles en el diálogo, permiten replantear y reconstruir el significado de los conceptos. además, indicaban su consciencia respecto a las dudas que les está generando la primera actividad y la investigadora les recordó que los datos serán anónimos.

> -" *... Pues menuda vergüenza, menos mal que solo lo corriges tu…". (*M16, A1)
>
> -" *... Si, pero para su tesis…" (*M11, A1)
>
> -" *... Tranquilas, no aparecen vuestros nombres…" (*I, A1)

En la *actividad 2,* comenzaban a visualizar los tipos de líneas en el entorno, manteniendo ambos Niveles de Razonamiento:

> -" *… Y las líneas de los dos laterales son paralelas, porque siempre están a la misma distancia una de otra, no se cruzan…" (*M17, A2)

> -" *… Y las líneas de los dos laterales son paralelas, porque siempre están a la misma distancia una de otra, no se cruzan…" (*M17, A2)

> -" *... ¿Eso es lo que hace que sean paralelas? Yo pensaba que eran porque iban como "juntas" ...". (*M6, A2)

> -" *… Claro, M6. Las paralelas son dos líneas que nunca se cruzan y mantienen siempre la misma distancia…" (*M14, A2)

> -" *… Pero también hay líneas secantes. Mira, por ejemplo, donde dos carreteras se cruzan en un puente o cruce: eso es una intersección, son secantes…" (*M16, A2)

La *actividad 5*, con el Geoplano, supuso un punto de inflexión en la sesión. La introducción del recurso manipulativo favoreció el paso de la visualización a un análisis más estructurado, además de mejorar el dinamismo y la atención de las maestras al cambiar de recurso didáctico, dejando agotadas a las maestras tanto los Test, como las primeras actividades de definir.

> -*" ... También te digo que en cuanto salga da aquí, la cabeza se me autodestruye…" (*M19, A5)

El hecho de tener que representar las líneas en un material con limitaciones propias, forzó a las maestras a reflexionar sobre las propiedades esenciales de cada objeto geométrico de la primera dimensión abordada.

> - *"... con este geoplano cuadrado hice una línea recta… la goma va de un clavo al otro, se ve como una cuerda tensa…", (*M7, A5)

La maestra 4 introduce el criterio de origen para la semirrecta:

> - *"...si marcas un punto inicial y dejas el otro abierto visualmente, ya estás representando una semirrecta".* (M4, A5)

Este recurso facilitó el tránsito claro hacia el Nivel 2 (análisis) (N2), ya que el discurso incorporó propiedades y condiciones de definición. La imposibilidad de representar ciertas figuras (círculo, curva, poligonal abierta) en el Geoplano abrió un reto cognitivo, provocando una reflexión sobre la continuidad y la naturaleza de las líneas curvas. Este diálogo amplió la comprensión geométrica y se considera que la experiencia con el material favoreció la interpretación de los conceptos y a confrontarlo con sus límites al tener que representarlos (véase Figura 38).

> -" … Claro pero aquí no podemos hacer la línea curva ni recta abierta claro…" *(*M13, A5)

> -" … claro por las gomas, a lo mejor con una cuerda…" *(*M21, A5)

-" *… pero aquí no podemos hacer ni líneas poligonales abiertas, ni líneas curvas ni abiertas ni cerradas…" (*M23, A5)

-" *… y, por ejemplo, aquí los clavos representan los puntos, ¿no? …" (*M9, A5)

-" *… El círculo no podemos hacerlo porque se crea segmentos de un pivote a otro, aún con el geoplano este…" (señalando el geoplano circular). (*M16, A5)

-" *… ¿Por qué? …"* (I, A5)

-" *… Porque es una goma y se queda tensa y es que claro está cerrada…" (*M2, A5)

-" *… ¡eso me pasaba a mí! …" (*M8, A5)

El surgimiento espontáneo del término "segmento" en la interacción entre M23 y M3 resultó especialmente revelador: se constató cómo la manipulación y el diálogo condujeron a una transformación discursiva, en la que las maestras pasaban de expresiones coloquiales ("porción de línea") a categorías geométricas precisas. Este paso, aunque todavía situado en el Nivel 2(N2), constituyó la base para un posible avance hacia el Nivel 3 (deducción informal) (N3), ya que empezaba a vislumbrarse la posibilidad de relacionar conceptos y establecer jerarquías.

-" *… ¿Mira, M3, a ver, puse la gomita entre estos dos clavos… quedó como una línea recta, pero es un segmento? …" (*M23, A5)

-" *… es como una línea, pero tiene un principio y un final… empieza en un punto y termina en el otro. No sigue más. ¿no? …" (*M8, A5)

-" *… ¡Esta es más corta, como… ¿una porción de línea? …" (*M23, A5)

-" *… Sí… creo que esto se llama segmento. Me suena de la primera actividad…" (*M3, A5)

-" *… entonces es como una línea con límites. Tiene dos puntitos que la encierran, ¿no? …" (*M23, A5)

Figura 38

Maestras en equipos manipulando los Geoplanos

En síntesis, la primera sesión muestra un tránsito inicial desde un razonamiento centrado en la visualización (Nivel 1) hacia formas incipientes de análisis (Nivel 2), caracterizadas por la identificación progresiva de propiedades y el uso emergente de un lenguaje más preciso. Este avance no se produce de manera lineal, sino a través de momentos de duda, error y reformulación que evidencian la construcción progresiva del conocimiento geométrico.

La experiencia inicial de desconcierto, lejos de constituir un obstáculo, actúa como detonante del proceso de aprendizaje, favoreciendo la toma de conciencia sobre las propias limitaciones y la necesidad de reconstruir significados. En este contexto, el uso de materiales manipulativos, como el geoplano, junto con el diálogo grupal, se revela como un elemento clave para promover la transición desde un reconocimiento perceptivo hacia una comprensión más analítica de los conceptos.

Así, los resultados evidencian que el razonamiento geométrico de las maestras comienza a desplazarse desde descripciones basadas en la apariencia hacia la identificación de propiedades y relaciones, sentando las bases para progresiones posteriores hacia niveles de razonamiento más avanzados.

5.1.2.2 Sesiones 3-4

La segunda sesión supuso un claro punto de inflexión en la formación: pasó de la geometría unidimensional (líneas, segmentos, semirrectas) a la geometría bidimensional y un primer estudio de polígonos, por lo que se abrió un nuevo horizonte de experiencia: las maestras ya no se limitan a pensar en "trazos" o "caminos", sino en figuras cerradas que poseen atributos múltiples. Este cambio de foco activó la necesidad de utilizar nuevos recursos lingüísticos y de criterios de clasificación más elaborados por parte de las maestras. En un primer momento, las intervenciones se situaban en el Nivel 1(N1) (visualización) ya que describen las figuras en función de su apariencia global:

> -" *…sí, que se meten "hacia dentro" …"* (M7, A9)
>
> -*" …Entonces podemos hacer una clasificación de los que tiene partes para dentro y los que no.* Determina que los que se meten son *(figuras 1, 7, 11, 13, 18 y 5) …"* (M17, A9)
>
> -" *…Creo que este es un polígono porque tiene varios lados rectos y se ve como un triángulo* (señalando la figura 1) …" (M3, A9)

Figura 39

Maestras realizando la actividad 9

Sin embargo, al enfrentarse a la tarea de distinguir polígonos de los no polígonos (véase Figura 39)., se vieron obligadas a explicitar propiedades definitorias, emergiendo ya al Nivel 2 (N2) (análisis) desencadenando la reflexión colectiva de que *para ser polígono es necesario que los lados sean rectilíneos y que la figura esté cerrada*. El conflicto apareció con el círculo, ya que siendo evidente por su "forma cerrada", no cumplía con los dos requisitos clave, siendo en ese momento cuando las maestras descubrieron que no basta con la apariencia, sino que hay que atender al modo en que está construido el contorno.

-*" …Entonces, ¿los círculos nunca son polígonos? …"* (M18, A9)

-*" …Sí, y tiene que tener al menos tres lados, porque con dos no se cierra. …"* (M19, A9)

-" … *¡Claroooo! ¿Si tiene curvas, ya no es un polígono no? o me estoy liando…".* (M18, A9)

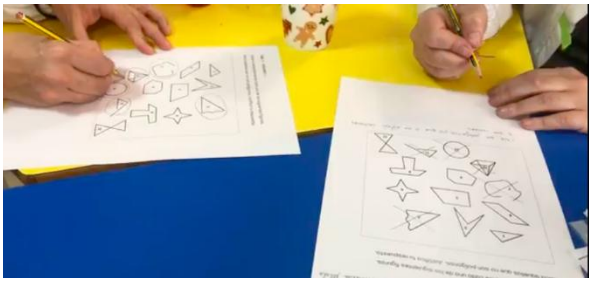
-" … *Parece que no… porque todos los polígonos que hemos separado tienen lados que son líneas rectas…"* (M3, A9)

-" …*El círculo tampoco claro…"* (M14, A9)

-" *…y esta entonces la descartamos porque no está cerrada…"* (figura 7) (M20, A9)

Figura 40

Maestras rodeando las figuras que consideran polígonos



La fase de orientación dirigida adquirió aquí un papel central. Las plantillas de clasificación y la consigna de discriminar permitieron que el grupo transitara desde las descripciones visuales a definiciones basadas en propiedades. Por tanto, el concepto de polígono dejó de ser una "imagen prototípica" para convertirse en una categoría con condiciones de pertenencia.

- "*…esta la descartamos porque no está cerrada…*" (M3, A9)

- "*si tiene lados rectos y está cerrado, sí que es polígono*". (M20, A9)

Un segundo desafío surgió al mezclar regularidad y simetría. Varias maestras clasificaban como *"regulares*" aquellas figuras que "*se pueden doblar por la mitad*". La intervención de la investigadora, que aclaró que estaban mezclando criterios diferentes, desveló cómo las participantes intentaban dar sentido a la tarea desde sus recursos disponibles. Este instante constituye supuso una ruptura cognitiva: lo que parecía evidente (doblar y comprobar coincidencia) se problematiza, y el grupo tuvo que reinterpretar las nociones de simetría y regularidad como atributos distintos. Esta confusión se convirtió en una ocasión de aprendizaje que favoreció el tránsito del Nivel 2 -N2, hacia un Nivel 3 incipiente-N3 (deducción informal), al tener que relacionar y diferenciar criterios (véase Figura 40).

-" *…Aaaaaaaaaaaaa vale por eso no nos ponemos de acuerdo…"* (risas) (A10)

-*" … vale, pues ¿qué le pasa al regular? …"* (I, A9)

-*" …Que todos sus lados son iguales…"* (M2, A9)

-*" …Y los ángulos* (M15, A9)

-*" …que el 2y el 9 si, y M3: que se pueden doblar…"* (M12, A9)

-*" …pero júntalas, no cuadran…"* (M13, A9)

-" *…Cuando se queda en forma de cuadrado o triángulo al hacer así…" (y hace como un gesto de doblar)* (M7, A0)

-" …aaaaa ahora si lo veo, claro se le salen las esquinas (se ríe), no lo visualizaba en la imagen madre mía…" (M7, A9)

-" … ¿Ves? no coincide …" (M10, A9)

También fueron conscientes de una generalidad en relación al número de lados y número de vértices:

-" *… el número de esquinas…*" (M18, A10)

-*:" …Por favor habla bien, vértices…"* (le corrige el vocabulario en tono sarcástico y cómico) …" (M3, A10)

-" *…Pero es igual que el número de lados…*" (M5, A10)

-*" …Si eso no vale, porque si tiene 6 siempre tendrá 6 vértices…*" (M11, A10)

Y a una deducción en relación a los ángulos, siendo la clave del Nivel 3 del modelo Van Hiele: empezar a usar las propiedades para razonar más allá de la figura, generando inferencias *(razonamiento que se hace a partir de lo que observamos, sabemos o deducimos, para llegar a una conclusión que no está expresada directamente).*

-(entusiasmada):" *… ¡Ahí estamos ya deduciendo! Si dos líneas se cruzan, se forman cuatro ángulos, y los que están frente a frente son iguales. Entonces podríamos clasificar también los ángulos según esas relaciones …*" (M10, A3)

-" *…Y también veo que hay líneas paralelas que no se tocan en ningún punto, pero una línea que las corta genera como... ángulos repetidos en distintos lugares…"* (M11, A3)

Otro momento clave fue la discusión y debate en torno a los cuadriláteros en la *actividad 14*, las maestras ya no se limitaban a describir, sino que establecían relaciones jerárquicas entre clases. Este tipo de razonamiento supuso un avance hacia el Nivel 3 de Van Hiele, ya que implica reconocer que unas propiedades incluyen a otras y que la clasificación geométrica es jerárquica. Un episodio ilustrativo de esto fue la discusión sobre los trapecios y los trapezoides. Las maestras se enfrentaban a la ambigüedad de los criterios, lo que provocaba confusión y generaba desconcierto, sin embargo, se convirtió en una ocasión para reinterpretar los conceptos y distinguirlos con mayor precisión.

> -" *… entonces todos son en el mismo grupo como tú dices, Y el rectángulo y el rombo estarían dentro del grupo de los paralelogramos, porque tienen lados opuestos paralelos…" (M5)*
>
> -*" …y el trapecio no entra en esa categoría porque solo tiene un par de lados paralelos …" (M9)*
>
> -*" … ¿y está que no me acuerdo? …" (señala el trapezoide) (M10)*
>
> -*" …Esa… con esta, ¿no? …" (refiriéndose al trapecio) (M9)*

El grupo acabó consensuando que el trapecio requiere un par de lados paralelos y que, si aparecen dos pares, se trataría ya de un paralelogramo. Este momento de negociación refleja el tránsito hacia el Nivel 3 (deducción informal), ya que las maestras no solo reconocían propiedades, sino que delimitaban categorías en función de relaciones necesarias y suficientes.

> -*" … Bueno, todas tienen cuatro lados, así que todas son cuadriláteros. Y no todas son regulares…"* (M14, A14)
>
> -*" …Sí, pero mira, Por ejemplo, el cuadrado y el rectángulo tienen ángulos rectos, mientras que el rombo y el trapecio no siempre, así que no son regulares…"* (M12, A14)
>
> -*" …Y el cuadrado y el rombo tienen todos sus lados iguales, a diferencia del rectángulo y el trapecio. Y ninguna es cóncava…"* (M5, A14)
>
> -" …Entonces podemos hacer dos grupos: Los que tienen ángulos rectos (cuadrado y rectángulo). Los que no tienen ángulos rectos (rombo y trapecio) …" (M14, A14)
>
> -" …Pero el cuadrado y el rombo también tienen algo en común: ambos tienen todos sus lados iguales…" (M21, A14)
>
> -" *… entonces todos son en el mismo grupo como tú dices, Y el rectángulo y el rombo estarían dentro del grupo de los paralelogramos, porque tienen lados opuestos paralelos…"* (M5, A14)

En la *actividad 25, simetría en triángulos* reforzó esta progresión. La acción de plegar el papel (manipulativo) actuó como un "dispositivo", las maestras comprobaron coincidencias y descubrieron regularidades. Los diálogos mostraron cómo se afianzaban las propiedades Este paso de la experiencia corporal al enunciado verbal evidenció la consolidación del Nivel

2-N2 (análisis), con atisbos de razonamiento más sistemático al relacionar tipos de triángulos y número de ejes (incipiente Nivel 3-N3.)

> -*" …con el rosa solo 1 eje…". (*Aun así, lo prueban y comprueban). (M9, A14)
>
> -" *… ¿y en el naranja (escaleno)? …"* (I, A14)
>
> -" *…No sale. …"* (M19, A14)
>
> -" *…Pues en el triángulo equilátero, al doblar por cualquiera de sus alturas, los lados se superponen perfectamente, y los ángulos también quedan enfrentados. Eso me confirma que todos los lados y ángulos son iguales…"* (M11, A14)
>
> -" *…Sí. En cambio, con el isósceles, solo uno de los lados sirve como eje. Cuando lo doblamos por esa altura, se emparejan los dos lados iguales, y los ángulos de la base se superponen. Eso muestra que esos dos ángulos también son iguales…"* (M9, A14)
>
> -" *…Y el escaleno no tiene ninguna coincidencia al doblar. Ningún lado coincide con otro ni ningún ángulo se superpone. Ahí se ve claro que no hay simetría y que todos sus lados y ángulos son diferentes…"* (M5, A14)
>
> -" *…Lo interesante es que, aunque el escaleno no tenga simetría, sigue cumpliendo con la suma de ángulos internos. Al doblarlo por distintos lados, no hay superposición…"* (M8, A14)

La segunda sesión supuso un punto de inflexión en la formación, al producirse el tránsito desde la geometría unidimensional (líneas, segmentos, semirrectas) hacia la geometría bidimensional y el estudio inicial de los polígonos. Este cambio implicó la apertura de un nuevo horizonte conceptual: las maestras dejaron de centrarse en "trazos" o "caminos" para comenzar a pensar en figuras cerradas con múltiples atributos, lo que exigió la incorporación de nuevos recursos lingüísticos y criterios de clasificación más elaborados.

En un primer momento, las intervenciones se situaban en el Nivel 1 (visualización), ya que las figuras eran descritas en función de su apariencia global:

> *"...sí, que se meten 'hacia dentro'..." (M7, A9)*
>
> *"...este es un polígono porque se ve como un triángulo..." (M3, A9)*

Sin embargo, al enfrentarse a la tarea de distinguir polígonos de no polígonos (véase Figura 39), las maestras se vieron obligadas a explicitar propiedades definitorias, lo que favoreció el tránsito hacia el Nivel 2 (análisis). En este proceso emergió una reflexión colectiva en torno a dos condiciones fundamentales: que la figura estuviera cerrada y que sus lados fueran rectilíneos. El caso del círculo generó un conflicto cognitivo especialmente significativo, ya que, pese a su apariencia cerrada, no cumplía con dichas condiciones:

> *"...¿entonces los círculos nunca son polígonos?..." (M18, A9)*
>
> *"...si tiene curvas, ya no es un polígono, ¿no?..." (M18, A9)*

Este momento evidenció el paso de una identificación basada en la apariencia a una comprensión sustentada en propiedades estructurales, donde el concepto de polígono deja de ser una imagen prototípica para convertirse en una categoría definida por condiciones necesarias.

La fase de orientación dirigida resultó clave en este avance, ya que las consignas y herramientas de clasificación facilitaron la transición desde descripciones globales hacia definiciones más precisas. Así, las maestras comenzaron a utilizar criterios explícitos:

"...si tiene lados rectos y está cerrado, sí que es polígono..." (M20, A9)

Un segundo momento de especial relevancia se produjo al confundir regularidad con simetría. Varias maestras identificaban como regulares aquellas figuras que "se pueden doblar por la mitad", lo que llevó a una ruptura cognitiva al evidenciarse la necesidad de diferenciar ambos conceptos. Esta situación obligó a establecer relaciones entre propiedades y a discriminar criterios, lo que supone un avance hacia un Nivel 3 incipiente (deducción informal):

"...ahora sí lo veo... no coincide..." (M7, A9)

Asimismo, comenzaron a emerger generalizaciones, como la relación entre número de lados y vértices:

"...pero es igual que el número de lados..." (M5, A10)

Y razonamientos más complejos en torno a los ángulos:

"...si dos líneas se cruzan, se forman cuatro ángulos..." (M10, A3)

Estos procesos indican el inicio de un razonamiento que va más allá de la figura concreta, permitiendo establecer inferencias y relaciones entre propiedades.

Otro momento clave se produjo en la *actividad 14 (cuadriláteros),* donde las maestras comenzaron a establecer relaciones jerárquicas entre clases geométricas. La discusión sobre trapecios, trapezoides y paralelogramos evidenció la necesidad de delimitar categorías mediante condiciones necesarias y suficientes, lo que constituye un claro indicador del Nivel 3:

"...el rectángulo y el rombo estarían dentro de los paralelogramos..." (M5, A14)
"...el trapecio no entra porque solo tiene un par de lados paralelos..." (M9, A14)

Este tipo de razonamiento muestra una comprensión más estructurada de la clasificación geométrica, en la que unas categorías se incluyen dentro de otras.

La *actividad 25 (simetría en triángulos)* reforzó esta progresión mediante el uso del plegado como recurso manipulativo. La experiencia corporal permitió comprobar propiedades y traducirlas posteriormente al lenguaje matemático:

"...en el equilátero coinciden todos..." (M11, A14)
"...el escaleno no tiene coincidencia..." (M5, A14)

Este paso de la acción a la verbalización evidencia la consolidación del Nivel 2, con indicios de avance hacia el Nivel 3 al relacionar tipos de triángulos con sus propiedades de simetría.

En conjunto, los resultados muestran una alternancia constante entre lo conocido y lo que se va descubriendo a través de la experiencia. Los conflictos conceptuales —como la inclusión del círculo, la confusión entre simetría y regularidad o la clasificación de cuadriláteros— se convierten en motores del aprendizaje, al ser discutidos y reinterpretados colectivamente.

Se observa así un tránsito progresivo desde el Nivel 1 (visualización) hacia el Nivel 2 (análisis), acompañado de los primeros indicios del Nivel 3 (deducción informal), especialmente en la aparición de razonamientos jerárquicos y en la diferenciación de criterios de clasificación. En este proceso, los materiales manipulativos y las situaciones de conflicto cognitivo actúan como catalizadores del cambio conceptual, favoreciendo el paso de la observación a la argumentación y consolidando una comprensión geométrica más profunda.

5.1.2.3 Sesiones 5-6

Estas sesiones representan un momento de consolidación y al mismo tiempo de expansión conceptual. Mientras que en la sesión anterior el foco estaba en la clasificación de polígonos y sus propiedades más inmediatas, en esta ocasión las maestras avanzan hacia relaciones más complejas entre figuras y atributos, lo que abre la posibilidad de transitar con mayor claridad hacia el Nivel 3 (deducción informal) del modelo de Van Hiele. En estas sesiones además aparecen las figuras tridimensionales, provocando una nueva concepción general sobre la geometría: los cuerpos con volumen, que están conformados por los polígonos. Esto genera una conexión de ideas y conceptos entre las diversas figuras que analizaron en las sesiones anteriores.

Al incluir las nuevas figuras, los cuerpos geométricos, dispuestos en el suelo, se observó una dificultad para usar el vocabulario geométrico formal, verbalizando los nombres por analogías, refiriéndose a ellos desde la apariencia o con nombres coloquiales, mostrando un bloqueo lingüístico en esta tercera dimensión de la geometría, este hecho evidenció que las maestras partían desde el Nivel 1-N1 (visualización):

- *"…Mira la pirámide de Keops…"* (M20, A19)
- *"…Este es un cono cortado…"* (M23, A19)

La identificación formal de las propiedades geométricas es incipiente, mostrando inseguridad en su vocabulario.

- *"…A ver, son fáciles si no me pides cómo se llaman…"* (M19, A19)
- *" …Es muy fácil es el oaoedro…" (hace broma pareciendo que dice los nombres)* (M13, A19)

La visualización inicial de la *actividad 19, descubriendo los cuerpos geométricos* se transforma en atribución de propiedades geométricas para justificar agrupaciones con la *actividad 20, clasificando cuerpos geométricos* que permiten reorganizar la clasificación, resultando clave para favorecer el reconocimiento perceptual y abrir paso al Nivel 2 (análisis). El grupo describe figuras (véase Figura 41). a partir de propiedades aisladas con clasificaciones diversas y en ocasiones contradictorias que propiciaban conflictos cognitivos que impulsaron la toma de conciencia sobre las propiedades geométricas y la necesidad de un lenguaje más preciso. Empezaron a identificar propiedades, aunque de manera parcial y con criterios no sistemáticos. Se evidencian avances hacia el análisis de atributos geométricos, pero aún con lenguaje coloquial. Sin embargo, a diferencia de la sesión inicial, ahora estas propiedades no aparecen como observaciones dispersas, sino que se integran progresivamente en un discurso más relacional. El paso es claro: lo que antes se vivía como una dificultad para "nombrar" o "reconocer", ahora se experimenta como la posibilidad de argumentar con base en condiciones geométricas basados en atributos perceptibles (presencia de picos, bases cuadradas, posibilidad de rodar).

Figura 41

Maestras clasificando los cuerpos geométricos

- … *"también pueden ir en esa(agrupación) porque mira, tienen la base cuadrada…", (diferenciando los prismas y pirámides)* (M9, A20)

M18 le pregunta a M11:" … *¿por qué ha puesto el cono en el grupo de los redondos con el cilindro y no de los pinchos? …" A20*

-- "*es que la base es redonda*". (M11,20)

- …" *¿pero la base de la pirámide no es cuadrada? …"* (M3, A20)

-…" *depende, que esa la tiene de círculo…" (*M20, A20)

Con la *actividad 21 ¿Qué tienes?,* y el uso de la bolsa opaca y el hecho de tener que describir la figura sin recurrir al nombre (el cubo en este caso) obliga a las maestras a centrarse en las propiedades y a verbalizarlo de manera forma, apareciendo el Nivel 3 (deducción informal). El impacto de esta vivencia es profundo, ya que obliga a tomar conciencia de la necesidad de argumentar y justificar las decisiones tantas condiciones necesarias y suficientes para que la otra persona identifique la figura.

Con la clasificación de triángulos en cuadro de doble entrada de la *actividad 13*, se consolidan procesos de Nivel 2 (análisis), y se adentran en el Nivel 3 (deducción informal). En esta actividad las maestras pueden comprender gracias al del cuadro de doble entrada, cómo una figura puede pertenecer simultáneamente a varias categorías en función de diferentes criterios. Ese cambio de Nivel del 2 al 3 se evidencia también en el análisis de las diagonales en los cuadriláteros de la *actividad 26*, al identifican propiedades de paralelogramos y diferenciar relaciones jerárquicas:

> - *…Vale guay, entonces, podemos decir que los cuadrados también son rectángulos, pero no todo rectángulo es un cuadrado, porque el cuadrado cumple con todas las propiedades del rectángulo yyyyyyyyy: que el cuadrado tiene todos los lados iguales, tommaaaaa ya somos listas…"* (risas)…" (M1, A26)

Según avanzaba la actividad y los procesos dialógicos, se va observando de forma más nítida ese Nivel 3:

> -" *… Todas tienen 4 lados y 4 vértices. Los ángulos del cuadrado y rectángulo son iguales. Los lados iguales son solo en el cuadrado y en rombo. La figura que tiene más ejes es el cuadrado. El rectángulo y el rombo 2. El romboide ninguno…"* (M1, A26)
>
> -" *… ¿Y entonces cuales son los que no son paralelogramos? …"* (M18, A26)
>
> -" *… el trapecio y el trapezoide…"* (M5, A26)

Lo más significativo de esta sesión es la vivencia del descubrimiento compartido de esas interpretaciones, el concepto de cuadrilátero ya no se vive como un conjunto de formas aisladas, sino como una red estructurada de relaciones. Los comentarios espontáneos revelan la alegría del grupo al encontrar coherencia en lo que antes aparecía fragmentado. No obstante, se observaron dificultades iniciales con el concepto de diagonal, superadas mediante la manipulación y el contraste de ejemplos.

> -" *…solo tiene una, el rombo…" (M11)*
>
> -" *…No mujer dos, mira…" (M20)*
>
> -" *… es verdad…" (M11)*
>
> -" *… Claro es que una cosa es la diagonal y otra el eje…" (M3)*
>
> -" *… Claro en el cuadrado si coincide mira…" (y lo muestra). (M21)*

Más adelante, en la *actividad 11 descubriendo cuadriláteros con Geoplanos 3x3*, favoreció la construcción y diferenciación de cuadriláteros convexos y cóncavos, situando a las maestras en el Nivel 2 (análisis), destacando la exploración libre y la validación de hipótesis a través de la acción sobre el material. Este recurso evidenció además ser versátil y fácilmente replicable en contextos escolares.

> -" *… Y la mía… se ve como si se doblara hacia adentro. No es como las demás. ¿Esa era cóncava? …"* (M23)

En la *actividad 16, teselamos con Pattern Blocks* se evidenció un razonamiento desde el Nivel 2 (análisis) al Nivel 3 (deducción informal). al tener que componer y descomponer figuras. El hallazgo de que los polígonos regulares (triángulo equilátero, cuadrado y hexágono) son los más adecuados para este fin revela una comprensión progresiva de propiedades geométricas formales, así como el descubrimiento espontáneo de equivalencias geométricas (trapecio formado por triángulos).

> *-" … mira si, juntando tres triángulos sale un trapecio…"* (M23, A24)
>
> -" *…vamos a empezar por los hexágonos porque es la que más lados tiene y es regular, así llenaremos la mesa mejor…"* (M20, A16)
>
> *-" …Mira con estas, con los trapecios hacemos más hexágonos…"* (M23, A16)
>
> -" *…Parece que las figuras regulares funcionan mejor para esto…".* (M18, A16)
>
> -:" *…Exacto. El cuadrado, el triángulo equilátero y el hexágono son figuras regulares y cubren el plano perfectamente…"* (M3, A16)
>
> -" *…Pero el trapecio no es regular y también… …"* (M20, A16)
>
> -" *…eso eso, que dos trapecios juntos hacen un hexágono, que sí es regular. …"* (M23, A16)

Figura 42

Maestras teselando

Además, emergieron conexiones con la vida cotidiana, lo que sugiere un vínculo entre la experiencia personal y el conocimiento matemático.

-" *…esto ya no es una flor, esto parecen los azulejos de mi baño… "* (M1, A16) (véase Figura 42).

-" *…, si si mira como los quesitos del trivial (mientras une las esquinas)* (M23, A24)

Figura 43

Maestras realizando la actividad 24

Sin embargo, también apareció la frustración ante niveles altos de dificultad con la *actividad 24, formando formas* (véase Figura 43), lo que muestra la necesidad de mantener ese andamiaje progresivo.

Con la *actividad 17, Hundir la forma y* esa necesidad de "mapear" similitudes y diferencias supone un salto cualitativo: ya no se trata solo de listar atributos, sino de entrelazar propiedades y generar explicaciones. Se percibe aquí la necesidad de emplear un vocabulario y explicación geométrica más formalizada, que, aunque aún no llega al Nivel 4 (deducción formal), sí prepara el terreno para él. Esta actividad por tanto favoreció el razonamiento deductivo y la comunicación precisa constató un avance hacia un pensamiento más formalizado.

Por tanto, se aprecia una consolidación del Nivel 2 (análisis), evidenciada por la creciente atención a propiedades específicas como las líneas paralelas, los ángulos o las diagonales, resaltando una evolución del léxico. Al mismo tiempo, emerge el Nivel 3 (deducción informal), especialmente en las actividades de clasificación de trapecios, trapezoides y paralelogramos, así como en la comparación sistemática de diferentes cuadriláteros.

Las actividades que más discusión o conflicto produjeron y que, sirvieron para avanzar de niveles, al tener que obligar a justificar y reelaborar conceptos fueron:

- La clasificación de prismas y pirámides: con el debate sobre si agrupar por *"pinchos"* o por "*base cuadrada"*.

- Triángulos según los ángulos: confusión inicial con el rectángulo escaleno.

- Cuadriláteros y paralelogramos: comprensión de relaciones jerárquicas y propiedades con las diagonales y simetrías.

En relación con las fases, hay que indicar que la Fase de orientación dirigida y explicación (Fases 2 y 3) resultaron clave, ya que impulsaron tanto la reflexión como la argumentación, ofreciendo a las maestras en formación la oportunidad de poner a prueba y contrastar sus propias ideas en los diálogos. La consigna de clasificar cuerpos y explicar criterios obliga a pasar de lo intuitivo a lo justificativo.

- "…lo importante ahora es que expliquéis por qué las habéis agrupado así…" (I)

La explicitación oral, mediada por la investigadora y contrastada entre compañeras, desencadenó momentos de duda y reformulación, como en la distinción entre "pinchos" y "bases triangulares". La Fase 4 (orientación libre) también cobró relevancia en actividades como la teselación con Pattern Blocks, donde las maestras exploraron múltiples configuraciones y descubrieron propiedades emergentes: *"...parece que las figuras regulares funcionan mejor para esto…"* (M18). Esta exploración abierta promueve razonamientos más elaborados y comparativos.

Finalmente, la vivencia compartida y del descubrimiento relacional se convierten en el motor del aprendizaje, transformando la manera en que las maestras interpretan las figuras geométricas dotando de mayor profundidad a su razonamiento.

Sobre las dinámicas, hay que destacar que fueron especialmente determinantes los pequeños grupos y parejas ya que promovieron los momentos de mayor precisión conceptual. El ejemplo de Maestra 3 describiendo el cubo sin nombrarlo permitió que Maestra 10 lo identificara, mostrando cómo el diálogo guiado por propiedades favorece el avance de nivel.

El uso de manipulativos (cuerpos, geoplanos, Pattern Blocks) actuaron como mediadores: al manipular, comprobar y experimentar, las maestras reformularon sus ideas. Así lo expresa M23: *"…esto seguro que las otras no lo han sacado…"*, celebrando el descubrimiento compartido tras comprobar las diagonales.

Finalmente, la intervención puntual de la investigadora, recordando la importancia de criterios múltiples *"...al igual que el otro día vimos que los polígonos podían clasificarse de distintas formas..."*, permitió desbloquear estancamientos y abrir el horizonte de razonamiento.

En resumen, el análisis de las transcripciones obtenidas en la formación muestra que las maestras participantes se sitúan en distintos niveles del modelo de Van Hiele en función de la actividad realizada, evidenciándose una progresión gradual desde el Nivel 1(visualización)**,** consolidando el Nivel 2(análisis), hasta aproximaciones al nivel de Nivel 3(deducción informal). El uso de materiales manipulativos (cuerpos geométricos, recortes de papel, geoplanos, Pattern Blocks) fue determinante para favorecer la transición entre niveles, así como la metodología por talleres y juegos, generando un clima de exploración y disfrute, facilitando tanto la apropiación de vocabulario formal como la argumentación geométrica. Se destaca la importancia de los conflictos cognitivos que actuaban como detonantes para avanzar en el razonamiento geométrico surgidos en debates, evidenciando una evolución del discurso, cada vez más técnico.

5.1.2.4 Sesiones 7-8

El último día de la formación convergen tanto el momento de integración de los conocimientos adquiridos por las maestras como el cierre en el itinerario formativo según las Fases de Aprendizaje. El análisis revela por un lado que la experiencia vivenciada por las maestras se caracteriza por el reconocimiento explícito de un aprendizaje progresivo de las compresiones geométricas y que tanto los recursos como las dinámicas utilizadas favorecieron la transición de niveles.

La sesión comienza con expresiones que revelan un desconocimiento del contenido, realizando comentarios anecdóticos sobre ello, al descubrir los sólidos platónicos reflejan tanto desconocimiento inicial como un primer acercamiento a las propiedades definitorias de estas figuras, por lo que se puede indicar que se encuentran en el Nivel 1(visualización).

Figura 44

Investigadora/instructora explicando la clasificación de los cuerpos geométricos

- *"...Jamás lo había escuchado..."* (M13, A22)
- *"... ¿pero no es de filosofía?"* (M10, A22)

La investigadora facilita el tránsito hacia la explicitación de características formales (poliedros, cuerpos de revolución) con el desarrollo de la *actividad 22, clasificamos los cuerpos geométricos* por lo que las maestras pasan de la visualización de la apariencia para clasificar (véase Figura 44), a un análisis más consciente de las figuras y sus atributos, avanzando por tanto a un Nivel 2 (análisis).

- "…mira, tienen la base cuadrada…" (M9),
- "…el cono con el cilindro porque la base es redonda…" (M10)

Después, con el de la papiroflexia de las *actividades 28* y *12* alcanzan momentos de razonamiento de Nivel 3 (deducción informal) ya que verbalizan criterios, diferenciando conceptos que antes eran solo interpretaciones visuales, el diálogo siembre interesantes puntos de conexión con propiedades matemáticas. Se evidencia aquí un avance hacia el Nivel 3 (deducción informal), al establecer relaciones de necesidad entre propiedades (distancia al centro, existencia de focos) y no solo por simple observación. Por lo tanto, se evidencia como la Fase 2 (orientación dirigida) y la Fase 3 (explicación) han resultado ser esenciales para promover la riqueza verbal.)

- *"...tiene ejes de simetría infinitos..." (*M5, A28+12)
- *" ...Lo que pasa es que, en el círculo, todos los puntos de la línea curva están a la misma distancia del centro. En el óvalo, eso no ocurre. Por eso no tiene radio fijo. ...". (*M10, A28+12)
- *" ...Y la línea que los rodea, aunque sea curva en ambos, no tiene las mismas propiedades. Creo que en el círculo es perfectamente simétrica respecto a cualquier eje, y en el óvalo no. ..." (*M2, A28+12)

La intervención de M14 añade una propiedad basada en la deductiva: *"el óvalo tiene dos focos, no un solo centro. Su forma se define de otra manera...a diferencia del círculo". (*M14, A28+12)

- *"...claro, porque el círculo se dobla por todos los sitios, y además no tiene lados". (*M3, A28+12)

La *actividad 27, sumamos ángulos* representa uno de los hitos destacados en la formación. En un primer momento, las maestras se confiaron en la medición numérica, pero al recibir la instrucción del uso del del doblado de papel se produce un giro decisivo:

- *"…a ver saca el móvil que lo sumamos…"* (M19, A27)

-*"… Entonces, si las tres esquinas del triángulo juntas forman una línea recta… eso significa que suman 180 grados, porque una línea recta tiene ese valor…".* (M11, A27)

- *"…cuando doblas los tres vértices hacia un punto, las puntas encajan perfectamente en línea recta…".* (M4, A27)

- *"…no estamos solo viendo que suman 180, ahora estamos justificando por qué es así…".* (M5, A27)

Este tránsito revela que las maestras comprenden y argumentan propiedades geométricas sin recurrir a cálculos externos, accediendo a un Nivel 3 (deducción informal). Además, se produce la generalización de los cuadriláteros, amplificando este razonamiento deductivo.

- *"…cualquier cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos… entonces 180 + 180 = 360".* (M5, A27)

A partir de aquí surge una cadena de inferencias (conclusión o deducción que una persona obtiene a partir de ciertos datos, aunque esa conclusión no esté expresada de manera explícita.), concluyendo la fórmula general de la suma de ángulos en polígonos.

"…Entonces, Espera. Si el triángulo suma 180°, y eso es una línea recta, entonces… ¿podríamos dividir un cuadrilátero en dos triángulos? …" (M4, A27)

-: *"…Sí! Si uno une una diagonal, cualquier cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos. Y si cada triángulo suma 180°, entonces 180 + 180 = 360 grados. …"* (M5, A27)

- *"… ¡Claro! No es que el cuadrado "tenga más" porque sea más grande, sino porque tiene más ángulos. Es como si sumaras dos triángulos pegados. …"* (M11, A27)

En esta actividad y con este dialogo, se vislumbra y evidencia un acercamiento al Nivel 4 (deducción formal) dentro de la experiencia en la formación, ya que las maestras no se limitan a comprobar, sino que empieza a formular y verbalizar una regla general a partir de un razonamiento deductivo, apoyado por esa manipulación con el doblado de papel.

Figura 45

Material de la actividad 23

Además, en los talleres, se destaca la *actividad 23, Quién es quién geométrico,* (véase Figura 45), en la que gracias a la Fase de Aprendizaje 4 del modelo se fomenta la capacidad de preguntar propiedades, esto supone en las maestras una reflexión geométrica profunda, ya que dan significado a los conceptos interiorizados y por otro lado, a deducir esas propiedades para descubrir la figura.

En la *actividad 18, artistas matemáticos* las maestras describen obras utilizando lenguaje geométrico, haciéndose visible el progreso discursivo alcanzado. M4 enumera triángulos, cuadriláteros y ángulos con precisión, aunque surgen disputas sobre si un ángulo es obtuso o recto. La risa compartida y la necesidad de volver a comprobar doblando el papel generan un aprendizaje dialógico que revaloriza la observación y argumentación.

Finalmente, el *concurso* de *la actividad 30* y el *Kahoot* de la *actividad 8* refuerzan la Fase de Aprendizaje 5, integración. Las maestras, ya con mayor seguridad, son capaces de diferenciar entre cuadriláteros y paralelogramos, consolidando lo aprendido y consolidando el nivel 3 siendo esa jerarquía de propiedades comprendidas con claridad.

> - *"… Un paralelogramo son los cuadriláteros con lados paralelos. El cuadrado, el rectángulo y el rombo lo son, pero el trapecio, el trapezoide y la figura irregular no.* (M9, A30)
>
> -"… *eso es, todos los paralelogramos son cuadriláteros, pero no todos los cuadriláteros son paralelogramos. …"* (M5, A30)

El cierre de la sesión no solo es evaluativo, sino también vivencial: se comparte satisfacción, humor y un sentido de logro colectivo, lo que refuerza la apropiación del conocimiento. Al finalizar la sesión, se pudo observar como el ambiente estaba cargado de un tono celebrativo y de síntesis: las maestras reconocen lo aprendido, confrontan dudas y descubren nuevas dimensiones de la geometría.

En conclusión, la sesión 4 se caracteriza por un claro avance en el razonamiento geométrico de las maestras, quienes avanzan desde del Nivel 1 (visualización) hasta el Nivel 3 (deducción informal), con un razonamiento próximo al Nivel 4 (deducción formal) al generalizar la suma de los ángulos y promovido por esas cuestiones planteadas por la investigadora. Este progreso se ve favorecido por el uso de materiales manipulativos como la papiroflexia, el doblado o la clasificación de objetos, que funcionan como mediadores y facilitan la construcción del descubrimiento gracias a la necesidad de justificar y dialogar. En esas dinámicas grupales y en parejas de las distintas actividades. A lo largo de la sesión 4 emergen diversos conflictos conceptuales (círculo frente a óvalo, cuadriláteros frente a paralelogramos, ángulo obtuso frente a ángulo recto), que actúan como detonantes interpretativos y amplían el horizonte de comprensión de las participantes. Finalmente, la Fase de integración convierte el cierre de la sesión en un proceso de explicitación, consolidación y apropiación discursiva, en el que las maestras demuestran un dominio cada vez más seguro y consciente del lenguaje geométrico.

5.1.3 Dimensiones de la geometría

En esta dimensión se aborda el contenido específico desarrollado durante el programa relacionados con los contenidos geométricos, se han abordado como categorías en las que se implican habilidades cognitivas distintas y retos particulares para las maestras, por tanto, se tratan como categorías individuales cíclicas a lo largo de las cuatro sesiones, valorando tanto su propio desarrollo como el propio diseño del programa, propiciando una comprensión cada vez más profunda y, por tanto, un aprendizaje significativo de los elementos que componen cada dimensión: geometría unidimensional(G1), geometría bidimensional(G2) y geometría tridimensional(G3).

Por lo tanto, las categorías que conforman esta dimensión se encuentran íntimamente conectadas a los objetivos de las sesiones del programa "*Tocando la geometría",* explicados en el apartado 4.1 de la presente tesis doctoral.

Tabla 43

Número de actividades por dimensión

Dimensión de la geometría	**Sesiones 1-2**	**Sesiones 3-4**	**Sesiones 5-6**	**Sesiones 7-8**	**Total**	**% Total**
Geometría unidimensional	3	4	0	0	7	23.3%
Geometría bidimensional	0	3	6	5	15	50%
Geometría tridimensional	0	0	3	2	5	16.7%
Evaluación	0	0	0	3	3	10%
Total	3	8	9	10	30	100%
% Total	10%	26.7%	30%	33.3%	100%	

Nota. Datos obtenidos a partir del diseño metodológico.

La Tabla 43 muestra una distribución de las actividades en torno a las diferentes dimensiones geométricas con un peso significativo de la categoría geometría bidimensional, alcanza un peso del 50%, y cuyo conocimiento debe estar prevalecido por esa geometría unidimensional (23.3%), y dando lugar al entendimiento de la geometría tridimensional

(16.7%). Esta secuencia de porcentajes refleja una progresión didáctica coherente con el modelo de Van Hiele finalizando con la integración de conocimientos evaluación y valoración del aprendizaje alcanzado (10%), de acuerdo con las Fases de Aprendizaje del propio modelo.

Respecto al número de actividades por sesiones, destacan las sesiones 7 y 8 (33.3%) y 5-6 (30%). Esto es debido a varios factores: las maestras conocen la dinámica en la que encuentran, las actividades, tipo de agrupamientos, y los recursos empleados facilitan y favorecen la participación y el positivismo de ellas hacia la formación, provocando una mejora en el tiempo final de las actividades y una mejora en la dinámica en general.

El primer día de formación, se concentra actividades de carácter introductorio y exploratorio en torno a la categoría geometría unidimensional, en la sesión 3 y 4 se introducen actividades en torno a la categoría geometría bidimensional, propias de los niveles iniciales de visualización y análisis, de acuerdo a ese diseño metodológico de las Fases de Aprendizaje. A medida que avanza el programa, en la sesión 5 y 6, se observa una diversificación de mayor porcentaje hacia la categoría geometría tridimensionalidad y bidimensional avanzando en su estudio con las transformaciones geométricas, lo que implica un tránsito hacia niveles más complejos de razonamiento en los que resulta imprescindible reconocer relaciones entre propiedades y establecer conexiones espaciales.

A continuación, se presentan y desarrollan los resultados de forma pormenorizada atendiendo a las categorías que conforman esta dimensión en cada una de las sesiones:

5.1.3.1 Geometría unidimensional.

Esta categoría, siendo la primera la primera actividad y por la que se compone el resto de geometría, apareció en las dos primeras sesiones, en ellas se atendieron a los tipos de líneas, elementos y definiciones aportados por las maestras apareciendo los siguientes elementos: segmento, semirrecta, línea recta, línea curva, punto, línea poligonal cerrada, línea poligonal abierta.

En la *actividad 1 y 2* se abordaron los tipos de líneas: elementos, definiciones y clasificación de carácter más formal atendiendo a la relación entre ellas (oblicuas o secantes, perpendiculares, paralelas); forma (recta y curva) y según esto las líneas abiertas y cerradas; y a su posición en el espacio (vertical, horizontal, ascendente, descendente).

- *"… ¿sabéis lo qué es? …" (*I, A1 y 2)

-*" … Son las rectas…"* (M20, A30)

-*" … Eso es, la unidimensional son las líneas que lo veremos hoy...y el elemento más sencillo que es el punto…"* (I, A30)

-*" … El segmento es un trozo de línea…"* (M11, A1)

-" … *la línea cortada es una semirrecta…"* (M23, A1)

-" … *Número infinito de puntos…de la línea recta…"* (M20, A1)

-" … *La línea poligonal cerrada parece una figura, como una casa o una estrella. Porque se cierra…"* (M5, A1)

-*" … A mí me parece que lo que diferencia una línea curva de una poligonal es que la curva no tiene vértices ni segmentos rectos. En cambio, la poligonal está formada por segmentos rectos unidos…".* (M4, A1)

Con la *actividad 5* y el Geoplano, experimentaron algunas características de las líneas y su desarrollo manipulativo, verbalizando en el cómo una figura se forma por líneas cerradas.

-" … *Es que las curvas no se forman con segmentos rectos como las poligonales. Pero en este geoplano se puede "simular" una curva si vas variando con pequeños tramos. ¿no Elena? (refiriéndose a la investigadora) …".* (M4, A5)

-*" … En realidad, si marcas un punto inicial y dejas el otro "abierto" visualmente, ya estás representando una semirrecta. Lo importante es el origen…"* (M4, A5)

-*" … Hice una línea poligonal cerrada. ¡Me salió un pentágono! Supongo que eso cuenta, ¿no? …"* (M4, A5)

Al día siguiente, tras un breve repaso de los contenidos previos, se enfatizó cómo todo lo que nos rodea está conformado por líneas. A partir de ahí se progresó desde el estudio de los ángulos hacia la introducción de la primera figura geométrica: los polígonos, avanzando posteriormente a su clasificación en función de los tipos de ángulos.

Finaliza con la *actividad 8 Kahoot* donde se consolidaron los términos trabajados, utilizándolo como recurso de evaluación formativa. En concreto había 1 pregunta relativa a esta dimensión. Con la *actividad 30 concurso final* se asentaron los términos a modo de evaluación. Con la *actividad 18* las maestras pusieron en práctica el vocabulario adquirido, empleándolo para definir y describir una pintura o una escultura (explicada en la dimensión anterior).

5.1.3.2 Geometría bidimensional

El primer día de formación, aunque estaba centrada en la dimensión anterior, se abordó la importancia y el valor de que todo nuestro entorno está formado por líneas, y que estas son la base de la formación de todas las figuras geométricas. Se recordó el valor de no solo para el trabajo en lectoescritura, ya que, al aprender a dibujar líneas, el alumnado también aprende a formar letras y números correctamente, sino también para la comprensión de las propiedades geométricas que se verán en el resto de las actividades y sesiones.

En las sesiones 3 y 4 se progresó de la clasificación de líneas a la noción de ángulo (recto, obtuso, agudo, completo y llano) y la palabra vértice. Se avanzó de la clasificación de los ángulos al concepto de polígono como primera figura geométrica de dos dimensiones, profundizando en sus características y propiedades, entendiendo que se llama así porque tienen largo y ancho. Una vez tomaron conciencia de los polígonos, se abordó de forma precisa la forma geométrica compuesta por tres líneas rectas: los triángulos. Analizaron esta primera forma atendiendo a sus lados: equilátero, isósceles y escaleno a través del doblado de papel, además analizaron otra propiedad, los ejes de simetría en relación a los lados de los triángulos. De esta forma añadieron un conocimiento más la clasificación de los triángulos: según sus lados y según los ejes de simetría. Posteriormente se abordó de forma inicial la forma geométrica compuesta por cuatro líneas: los cuadriláteros, atendiendo a las líneas y los ángulos.

La primera *actividad* sobre esta categoría fue la *9*, para valorar qué sabían sobre qué es una figura cerrada, y qué características se necesita para que se considere polígono. La investigadora aprovechó este momento para recordarles una premisa fundamental y una pregunta introductoria:

> - *"… para que una forma geométrica sea considerada bidimensional, debe cumplir con un requisito básico: estar formada por al menos tres líneas ¿Qué característica debe tener la figura para que se considere un polígono? …"* (I, A9)
>
> -*" …Entonces, ¿los círculos nunca son polígonos? …"* (M18, A9)
>
> -*" …Sí, y tiene que tener al menos tres lados, porque con dos no se cierra. …"* (M19, A9)
>
> -" *…Y formado por líneas rectas eso es, el 3 no es, el 7 tampoco…"* (M15, A9)
>
> -" *…Los polígonos son figuras geométricas de dos planos compuesto por un conjunto de líneas poligonales cerradas, sin curvas …es la definición que tenemos de Edelvives …"* (M15, A9)

Y con el diálogo surgen nuevas propiedades o posible clasificación:

> -" *...pero entonces, ¿qué pasa con esta? ...*" (señala la que es como una estrella, figura 6) *Tiene lados rectos, pero no sé si cuenta como un polígono porque está como para dentro…*" (M3, S2, A9)
>
> -" *...A ver, a lo mejor como es así no cuenta como que es un polígono…*"
>
> -…" *La 13 porque es triplana…*" (M15, S2, A9)
>
> -" *…Espera, espera…, es tridimensional es una pirámide…*" (M10, S2, A9)

En la *actividad 10* (una vez ya sabían las condiciones que requiere la figura para ser considerada polígono), descubriendo que, dependiendo del criterio escogido, había diferentes opciones para su clasificación: según el número de lados, los polígonos regulares o e irregulares y los términos cóncavos y convexos; eje de simetría y diagonales. Empezaron mezclando dos criterios, que supuso una duda conceptual: regularidad y simetría:

> -" *… ¿Pero regulares dices que los lados de las líneas sean iguales de tamaño, o que si las partes con una línea y sean iguales? ...*" (M13, A9)
>
> -" *…Que sean simétricos 2 a 2 los lados ...*" (M14, A9)
>
> -" *...es que los polígonos tienen diversas características, y es que la regularidad se refiere a que todos los lados y ángulos de una figura deben ser iguales. En el caso del trapezoide, como sus lados no son todos iguales y sus ángulos tampoco lo son, no puede considerarse regular, aunque puede tener simetría en algunos casos. ...*" (I, A9)
>
> -(M17 interrumpe):" *…Claro al doblar se ve si están igual o no…*" (M17, A9)

Posteriormente realizaron otra clasificación atendiendo a los ángulos, y apareció el concepto de cóncavo-convexo.

> -" *…sí, que se meten "hacia dentro" ...*" (M7, A9)
>
> -" *... en cuanto uno lo tiene hacia dentro, ya se llama cóncavo…*" (M4, A9)
>
> -" *... Podemos hacer los que están como para adentro y los que no…*" (M10, A9)
>
> -" *...Ahii si esto lo está viendo mi hija en Primaria, vaya tela, los convexos están todos fuera y los que tienen un trozo metido son cóncavos…*". (M21, A9)
>
> -" *...si eso es, convexos tienen todos sus ángulos hacia afuera, pero si tiene alguno "que entra" son los cóncavos tienen al menos un ángulo que "entra"…*" (I, A9)

A continuación, hacen otra clasificación, atendiendo al número de *"esquinas"* y descubren que los vértices surgen en conexión con el número de lados:

> -" *... el número de esquinas…*" (M18, A9)
>
> -" *...Pero es igual que el número de lados…*" (M4, A9)

Cuando terminan de contar y clasificar todas las figuras, la maestra 5 propone una nueva clasificación:

" ... otra opción y es que, dentro de esa clasificación por lados, podemos clasificarlos por si son regulares o irregulares ..." (M5, A9)

La sesión finalizo cuando la investigadora hizo un resumen de todo lo que habían construido, y les propuso una línea futura de clasificación…. *"Todas las figuras que tienen ángulos rectos".* Con esta reflexión, concluyeron que hay gran diversidad a la hora de clasificar polígonos, todo depende de la propiedad que se escoja y, por tanto, de los conocimientos que se dispongan sore esas figuras.

A continuación, profundizaron en los ángulos con la *actividad 3:*

- (señalando la imagen en la PDI):" *...Mira, aquí hay claramente dos líneas rectas que se cruzan formando un ángulo recto. Esta debe ser una perpendicular…"* (M11, A3)

-" *...Sí, y esta otra de aquí no la corta en ángulo recto… se nota que el ángulo es más abierto. Eso sería un ángulo obtuso, ¿no? ..."* (M4, A3)

-" *...Exacto. Y si seguimos esta línea hacia el otro lado del punto donde se cruzan, ¡también se forma otro ángulo! Nunca me había fijado en que en un vértice hay más de un ángulo" ..."* (M23, A3)

- "*…Claro, porque cada vértice es como un punto de encuentro… y las líneas pueden seguir en distintas direcciones. Si medimos desde un lado de la línea hacia el otro, hay dos ángulos opuestos, ¿no? Uno en un lado, y otro en el opuesto…"* (M8, A3)

-" *... ¡Sí! Eso lo vi una vez con los niños: si giras una regla sobre un punto, formas dos ángulos. Creo que esos se llaman ángulos adyacentes o algo así…"* (M9, A3)

-" *…Opuestos por el vértice, creo. Porque están uno frente al otro, como reflejados. Y deben tener la misma medida, ¿no? Eso ya sería una propiedad…"* (M4, A3)

En la *actividad 14* analizaron los tipos de figuras de 4 lados: los cuadriláteros, descubriendo propiedades que igualaban o diferenciaba a las figuras:

-" *...Pero el cuadrado y el rombo también tienen algo en común: ambos tienen todos sus lados iguales…" (*M21, A14)

-*" ...el cuadrado tiene ángulos rectos y el rombo no, pero si los lados iguales como tú dices…"* (*(*M5, A14)

-" *…Esto es genial para explicar el rombo y el cuadrado a los niños…"*

-" *...Aquí solo es regular el cuadrado…" (*M18, A14)

-" *…a ver chicas, vamos como de lo más general y de ahí a lo mejor si sacamos como subgrupos o como se diga en matemáticas, entonces… a ver…. el cuadrado y los rectángulos van en el mismo pack por los lados…" (*M11, A14)

-" *… y el rombo ..." (*M8, A14)

-" *… entonces todos son en el mismo grupo como tú dices, Y el rectángulo y el rombo estarían dentro del grupo de los paralelogramos, porque tienen lados opuestos paralelos…" (*M5, A14)

- *…y el trapecio no entra en esa categoría porque solo tiene un par de lados paralelos ..." (*M9, A14)

- "*… ¿y está que no me acuerdo? ..." (señala el trapezoide) (*M12, A14)

-*" …Esa… con esta, ¿no? ..." (refiriéndose al trapecio) (*M9, A14)

> -” *…"y si encontraran una figura con cuatro lados y ningún lado paralelo como la última, ¿qué es?" (*I, A14)
>
> -:” *… Eso sería un cuadrilátero que no va aquí, es irregular, no es paralelogramo, vas a pillar…” (*M9, A14)
>
> -” *…Alaaaaa es verdad yo he cortocircuitado…” (*M16, A14)
>
> -*” …Eso es, están los No paralelogramos como los Trapecios (solo un par de lados paralelos) Y los Trapezoides (lados no paralelos ni ángulos) …” (*I, A14)

Con la *actividad 13* van recordaron una propiedad (nueva para ellas hasta el momento) de los triángulos, su clasificación atendiendo a sus ángulos, ampliando, por tanto, su conocimiento sobre la forma compuesta por tres líneas Aparecieron nuevos términos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo, y descubrieron que solo hay un rectángulo con ambas cualidades: los tres lados iguales y los tres ángulos agudos.

> -” *… tenemos el que tiene tres lados iguales y además los tres ángulos iguales, que son los tres agudos, y por se llama acutángulo…” (*I, A13)
>
> -*” …por eso el equilátero se llama Acutángulo también!”* (M5, A13)

Las transformaciones geométricas se consideraron muy importantes para la construcción del desarrollo geométrico, haciendo un símil con el aprendizaje de los numerales (al igual que una vez se conocen los números y se pueden operar y descomponer con ellas, añadiendo, restando, dividiendo……las formas también se pueden operar). Por tanto, un cuadrado, se puede transformar en otras figuras, y, por tanto, en otras dimensiones de la geometría.

Con la *actividad 25* como primera figura bidimensional compuesta por tres líneas y analizaron sus lados y a sus ejes de simetría.

> -*” …Pues en el triángulo equilátero, al doblar por cualquiera de sus alturas, los lados se superponen perfectamente…”* (M11, A25)
>
> -*” …Sí. En cambio, con el isósceles, solo uno de los lados sirve como eje…”* (M11, A25)
>
> -*” …Y el escaleno no tiene ninguna coincidencia al doblar..”* (M5, A25)

Con la *actividad 26 Cuadriláteros* ampliaron los conocimientos sobre los cuadriláteros paralelogramos y sus simetrías con el doblado de papel. Después, revisaron el número de diagonales que tenía cada figura, descubriendo en ese momento que los triángulos no tienen diagonales.

> -” *…El cuadrado tiene 4…” (*M21, A26)
>
> -” *…todos los cuadriláteros tienen 2 diagonales …” (*M6, A26)

-" *… entonces a ver en el romboide la diagonal, a pues también dos…" (*M18, A26)-" *… Todas tienen 4 lados y 4 vértices. Los ángulos del cuadrado y rectángulo son iguales. Los lados iguales son solo en el cuadrado y en rombo. La figura que tiene más ejes es el cuadrado. El rectángulo y el rombo 2. El romboide ninguno…" (*M1,A26)

Con la *actividad 16 y las Teselaciones* descubrieron que para realizar la actividad era preferible utilizar los polígonos regulares con mayor número de lados (los hexágonos), dejando en último lugar las figuras no poligonales (los semicírculos o sectores circulares).

-" *…Mira con estas, con los trapecios hacemos más hexágonos…" (*M23, A16)

-" *…Parece que las figuras regulares funcionan mejor para esto…". (*M18, A16)

-" *…Exacto. El cuadrado, el triángulo equilátero y el hexágono son figuras regulares y cubren el plano perfectamente…" (*M3, A16)

-" *…Pero el trapecio no es regular y también… …" (*M21, A16)

-" *…eso eso, que dos trapecios juntos hacen un hexágono, que sí es regular. …" (*M23, A16)

-" *… mira si, juntando tres triángulos sale un trapecio…" (*M23, A16)

En la *actividad 24* también se centró en las operaciones matemáticas, y las combinaciones de figuras para recrear otras. Las combinaciones propuestas de las tarjetas se encuentran en el Anexo III.

En la última sesión se avanzó en el conocimiento de una figura bidimensional pero no poligonal, conectando las *actividades 28* y *12*, relacionadas con el círculo y sus elementos (*radio, circunferencia, diámetro, centro, arco y cuerda)* y el óvalo.

Con la *actividad 15: yo tengo quien tiene*, y la *29: completando bi-información* se asentaron los conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores.

Al igual que en la categoría anterior, con la *actividad 8 Kahoot* se consolidaron los términos trabajados, utilizándolo como recurso de evaluación formativa. En concreto había 6 pregunta relativa a esta dimensión. Con la *actividad 30 concurso final* se asentaron los términos a modo de evaluación. Con la *actividad 18* las maestras pusieron en práctica el vocabulario adquirido, empleándolo para definir y describir una pintura o una escultura (explicada en la dimensión anterior).

Además, recordaron las partes del círculo, en la unión de las *actividades,* 28 y 12, analizando nuevas propiedades, semejanzas y diferencias entre el círculo y el óvalo por medios del doblado de papel. Analizaron también si tenían simetrías y diagonales.

-" *…Circunferencia: la línea cerrada que forma el círculo…". (*M4, A28+A12)

-" *…Arco: el trocito de la circunferencia que está marcada por dos puntos y la cuerda es la línea que está dentro del círculo, pero sin tocar el centro…". (*M3, A28+A12)

-" *…Radio: como la bici, la línea que va desde el centro a la circunferencia. Y luego pues aclarar la diferencia entre círculo y circunferencia, que el círculo es lo de dentro, porque el circulo tiene interior. El hulahop es la circunferencia y una moneda sería el círculo…". (*M5, A28+A12)

-" *…Tiene ejes de simetría infinitos…" (*M5, A28+A12)

-" *…Claro porque se dobla por todos los sitios, y además no tiene lados…". (*M3, A28+A12)

-" *…Ni ángulos, claro ni diagonal…" (*M23, A28+A12)

-" *...Sí, pero el círculo es como más "equilibrado". Si doblas cualquier parte, siempre coincide. En el óvalo no pasa eso. …" (*M17, A28+A12)

Con la *actividad 27* descubrieron nuevas propiedades: la suma de los ángulos, con y sin necesidad de tener los grados de los ángulos internos, tanto de los triángulos como de los cuadriláteros.

*-" ...pues ala, que sale 180º siempre…" (*M19, A27)

*-"... Entonces, si las tres esquinas del triángulo juntas forman una línea recta… eso significa que suman 180 grados, porque una línea recta tiene ese valor. (*M1, A27)

*-" ... ¡Es verdad! Es como si los tres ángulos se reorganizaran en una línea recta. No hace falta medirlos, lo demuestra el doblado. …" (*M19, A27)

Al igual que en las anteriores categorías con la *actividad 8 Kahoot* se consolidaron los términos trabajados, utilizándolo como recurso de evaluación formativa. En concreto había 5 preguntas relativa a esta dimensión. Con la *actividad 30 concurso final* se asentaron los términos a modo de evaluación.

5.1.3.3 Geometría tridimensional

Esta categoría corresponde con la geometría tridimensional, y apareció por primera vez en las sesiones 5 y 6. En primer lugar, se hizo una primera aproximación de los cuerpos con volumen a través de la manipulación empleando materiales manipulativos de madera, indicando su propiedad fundamental: son figuras con tres dimensiones alto, largo y ancho. Y sus partes: bases, lados, aristas y vértices. Descubrieron al igual que en los polígonos, que depende de las propiedades en las que se centren, aparecen distintas clasificaciones.

- *… ¿por qué ha puesto el cono en el grupo de los redondos con el cilindro y no de los pinchos? …" (*M18 a M11, A13)

-" …es *que la base es redonda…" (*M11, A19)

-" *… Pero bueno es que aquí cada una tiene su criterio…" (queriendo explicar que hay diversas opciones) (*M20, A19)

> -" *… Es que yo pondría este que tiene triangulito allí…"* (en la otra agrupación) *(*M20, A19)
>
> -" *… ¿pero la base de la pirámide no es cuadrada? …" (*M3, A19)

En la *actividad 20* realizaron una integración de conocimientos, utilizando las propiedades de las figuras.

> -" *… Tiene 6 lados, con forma de cuadrado y es un cuerpo geométrico con volumen, se puede ver por todos sus lados, y …todas sus caras son iguales) …" (*M3, A20)
>
> -" *… "es un cuerpo geométrico, con volumen, cuerpo alargado, base de 2 cuadrados, el resto son rectángulos, son 4 rectángulos, se puede ver por todos los lados…". (*M18 a M13, A13)

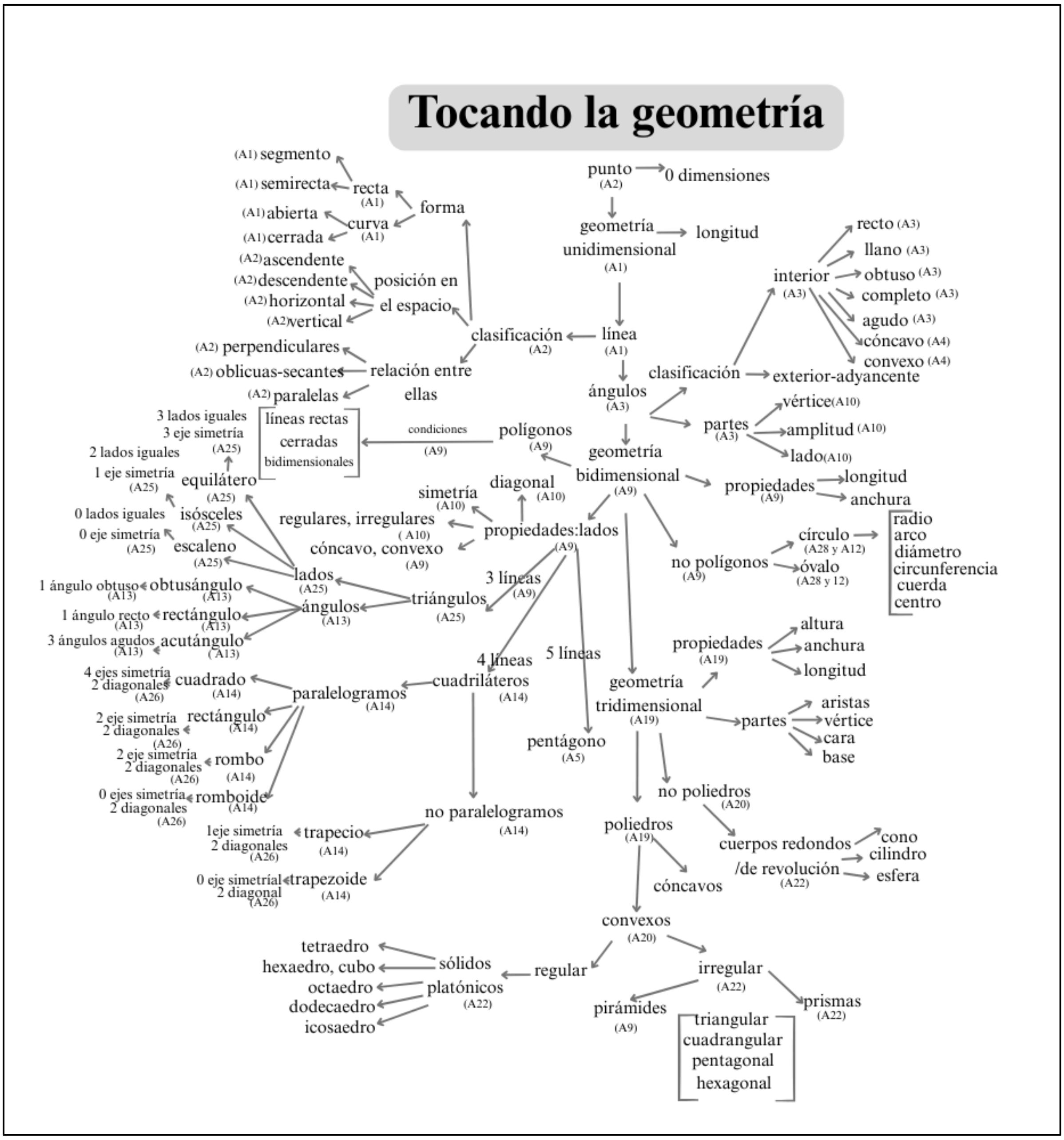
En la última sesión, se avanzó en el conocimiento de la clasificación de los cuerpos redondos o de revolución, y los poliedros (y dentro de estos los 5 sólidos platónicos). Con la *actividad 23, ¿Quién es quién? geométrico* se asentaron los conocimientos adquiridos en esta sesión.

Y al igual que en las dos categorías anteriores, con la *actividad 8 Kahoot* se consolidaron los términos trabajados, utilizándolo como recurso de evaluación formativa. En concreto había 10 preguntas relativas a esta dimensión. Con la *actividad 30 concurso final* se asentaron los términos a modo de evaluación, y con la *actividad 18* las maestras pusieron en práctica el vocabulario adquirido, empleándolo para definir y describir una pintura o una escultura (explicada en la dimensión anterior).

En la Figura 46 se muestra cómo van emergiendo los conceptos geométricos a lo largo de las actividades.

Figura 46

Desarrollo y avance de los conceptos de las dimensiones geométricas que surgen durante la formación.



Nota. el código indica la actividad en la que el concepto aparece por primera vez.

5.1.4 Síntesis integradora de los resultados: recursos, Fases y evolución del razonamiento geométrico

El desarrollo de las ocho sesiones muestra con claridad que el progreso en los Niveles de Razonamiento geométrico de Van Hiele no se produjo de manera lineal, sino como un proceso dialógico y experiencial, en el que los recursos manipulativos y las Fases de Aprendizaje desempeñaron un papel fundamental para posibilitar el tránsito conceptual. En este apartado se recoge una síntesis de las dimensiones anteriormente analizadas y desarrolladas.

5.1.4.1 Niveles de Razonamiento alcanzados

En la sesión 1-2, predominó el nivel 1 (visualización), adentrándose poco a poco en el nivel 2 (análisis) gracias al Geoplano. El lenguaje de las maestras se mantuvo inicialmente en lo perceptual "… *La línea poligonal cerrada parece una figura, como una casa o una estrella. Porque se cierra…" (*M5, A1), aunque hacia el final emergieron descripciones más estructuradas "… *A mí me parece que lo que diferencia una línea curva de una poligonal es que la curva no tiene vértices ni segmentos rectos. En cambio, la poligonal está formada por segmentos rectos unidos…".* (M4, A1)

En la sesión 3-4, el nivel 2(análisis) se consolidó en la clasificación de polígonos, pero surgieron los primeros indicios del nivel 3(deducción informal), en las jerárquicas de cuadriláteros y en la diferenciación entre simetría y regularidad. La frase de M18, A19 -" … *¡Claroooo! ¿Si tiene curvas, ya no es un polígono no? o me estoy liando…".* marcó un hito de ruptura de horizonte, obligando a explicitar propiedades que no son visibles a simple vista.

En la sesión 5-6 el nivel 2(análisis) alcanzó mayor madurez con el análisis de diagonales y paralelismo, mientras que el nivel 3 (deducción informal), emergió con fuerza en los razonamientos sobre trapecios, trapezoides y paralelogramos. Comentarios como "… *mira si, juntando tres triángulos sale un trapecio…"M23, A24"* ilustran este salto deductivo.

En la sesión 7-8, las maestras transitaron hacia un Nivel 3(deducción informal), consolidado, con destellos de Nivel 4 (deducción formal) en la generalización de la fórmula de la suma de ángulos de un polígono: *"... Podríamos deducir que con cada lado nuevo que añadimos, estamos sumando otro triángulo… es decir, un pentágono tendría tres triángulos: 3×180 = 540. …" (M5, A27)*

Aunque no se alcanzó una formalización rigurosa, sí se evidenció la capacidad de formular razonamientos de carácter general.

En conjunto, el nivel que más prevalece a lo largo de las sesiones es el Nivel 2 (análisis), pero el aporte más significativo de la formación fue lograr que la mayoría de las maestras alcanzaran un Nivel 3(deducción informal), especialmente en el ámbito de las clasificaciones jerárquicas y las deducciones sobre polígonos.

5.1.4.2 Dimensión geométrica que más ha avanzado

En términos de contenido, el avance más notable se produjo en la geometría bidimensional. El paso de describir polígonos como simples "formas conocidas", es decir, reconocimiento visual, a analizarlos y relacionarlos jerárquicamente avanzando en una comprensión y relacional, constituyendo un cambio radical. El discurso en torno a los cuadriláteros, la diferenciación entre círculo y óvalo y la deducción sobre los ángulos internos de los polígonos son ejemplos de ese progreso de deducción informal.

La geometría tridimensional también estuvo presente en la sesión 7 y 8, al introducirse los poliedros y sólidos platónicos. No obstante, las intervenciones revelan que en este ámbito las maestras se situaron mayoritariamente en el Nivel 1 (visualización) y en un Nivel 2 inicial, reconociendo propiedades de manera descriptiva sin alcanzar deducciones más elaboradas. Frases como *"jamás lo había escuchado"* (M13, A22) al referirse a los sólidos platónicos reflejan tanto el desconocimiento inicial como la necesidad de un trabajo más profundo para avanzar en este campo en futuras formaciones.

En la Tabla 44 se puede observar como la geometría unidimensional (G1) avanza de Nivel 1 a Nivel 2; la geometría bidimensional (G2) evidencia un gran salto de Nivel 1 hasta iniciar un Nivel 3; la geometría tridimensional (G3) se queda en niveles iniciales.

Tabla 44

Niveles alcanzados en las distintas dimensiones

Dimensión / Nivel Van Hiele	Nivel 1 (Visualización)	Nivel 2 (Análisis)	Nivel 3 (Deducción informal)
Unidimensional (líneas, segmentos)	Alto (descripciones perceptuales: "parece un camino")	Medio-Alto (inicio de propiedades: "tiene principio y final")	Medio (apenas se vislumbra en definiciones más precisas)
Bidimensional (polígonos, cuadriláteros, simetría)	Medio (formas conocidas: "casita", "estrella")	Alto (clasificación, propiedades, ángulos, diagonales) (identificación de ejes de simetría)	Alto (jerarquías: "todos los cuadrados son rectángulos", clasificaciones propias) (justificación de ángulos, relaciones entre polígonos)
Tridimensional (poliedros, sólidos platónicos)	Medio-Alto (desconocimiento inicial, reconocimiento global)	Medio (atributos simples: caras, aristas, simetrías)	Muy Bajo (no llega a consolidarse)

La categoría geometría bidimensional alcanzó los niveles más altos del modelo (hasta Nivel 2- análisis e iniciándose en el Nivel 3-deducción informal), mientras que la categoría geometría unidimensional y la categoría tridimensional quedaron en niveles más iniciales (Nivel 2 análisis).

Por tanto, queda reflejado cómo los niveles inferiores disminuyen progresivamente a lo largo de las sesiones frente a los niveles superiores que van aumentando a lo largo de la formación, indicando que el modelo empleado para la mejora del razonamiento geométrico evidencia signos de confirmación en su puesta en marcha.

5.2 Resultados perceptuales y emocionales

5.2.1 Resultados del análisis del Cuestionario inicial.

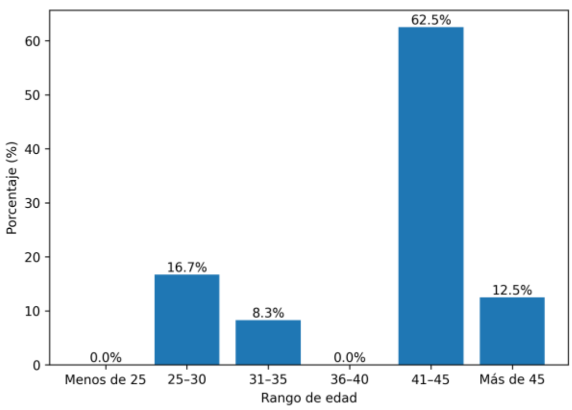
En este apartado se presentan y se analizan los resultados obtenidos del Cuestionario inicial. Estos resultados pertenecen a la Comunicación presentada el 18 de junio de 2024, en el XXI *Congreso Internacional Investigación educativa e innovación ante los retos de la sostenibilidad,* por la investigadora principal de esta investigación

Tal y como se señala en el apartado 3.2.1.1, se diseñó con el propósito de poner de manifiesto la situación de las maestras que iban a participar en la investigación, y siguiendo el cronograma de investigación reflejado en el apartado 3.5.2, entre los meses de diciembre de 2023-enero de 2024 se recogieron los datos. Esta información resultó fundamental como punto de partida para la investigación, ya que permitió recoger datos generales de las maestras, conocer su experiencia profesional y formación previa, así como caracterizar el centro educativo. Además, posibilitó identificar sus percepciones acerca de sus conocimientos iniciales en geometría, los recursos didácticos disponibles y su propia formación matemática, elementos clave para comprender el contexto formativo en el que se desarrolló la intervención.

Los resultados de esta dimensión han sido abordados previamente en el apartado 3.7.1. por lo que en este apartado se deja reflejado la Figura 47 con la edad de las maestras y la Figura 48 de su experiencia en aula. Estos resultados son extraídos del *Cuestionario Inicial* implementado.

Figura 47

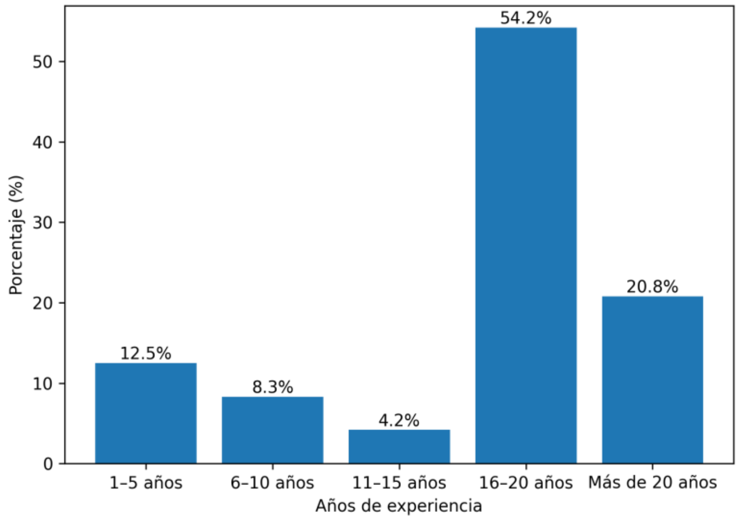
Distribución de la edad de las maestras participantes



Nota. Elaboración propia.

Figura 48

Años de experiencia en aula de las maestras participantes



Nota. Elaboración propia.

A continuación, se muestran algunos de los aspectos relevantes para la investigación:

En la etapa de Educación Infantil, hay coordinación entre las maestras del mismo grupo, sin embargo, se detecta la necesidad de mejorar la coordinación entre niveles. entre ciclos. Sin embargo, no hay coordinación en cuanto a las programaciones de Infantil a la etapa de Primaria. Se trabaja a través de una Editorial educativa y las programaciones se basan en esos cuadernos de trabajo. Este dato se constata en las respuestas ofrecidas en la variable 3 del cuestionario: *conocimientos y recursos disponibles en el aula en el área de la geometría,* indican que el libro de texto del alumnado o trabajo por fichas se emplea el 91.7%. En las respuestas abiertas del cuestionario las maestras señalaban que debido a la necesidad de "cumplir" plazos y la finalización d ellos libros, queda en segundo plano el objetivo real matemático de lo que se quiere enseñar, no profundizando en el concepto. En relación a la geometría, señalan que trabajan lo que aparece en el libro de la editorial, sobre todo en aprender el nombre de las figuras bidimensionales, tridimensionales y la diferenciación de éstas.

Se evidencia la consciencia que presentan las maestras en relación a sus propias limitaciones formativas, confirmando la necesidad y el interés de recibir formación, sin embargo, siempre y cuando se relace dentro de la jornada laboral. En concreto, el 78.3% de las encuestadas les gustaría reciclarse para tener un conocimiento más profundo en geometría ya que considera que no dispone de una buena formación.

En los resultados relacionados con la percepción y formación que tienen las maestras sobre recursos dedicados a la enseñanza de la geometría, se evidencia un altísimo porcentaje de desconocimiento en su utilización por falta de formación: Geoplano (78.3%); Pattern Blocks (65.2%) y cuerpos geométricos (65.2%).

En la Tabla 45 se muestra un alto porcentaje sobre las cuestiones relativas a que las actividades geométricas deben estar basadas en una enseñanza deductiva basada en materiales manipulativos, y que para ello se requiere de un conocimiento sobre estos. Por tanto, se destacan aspectos que en la práctica no se llevan a cabo y la percepción por parte de las maestras de su falta de formación. Este dato se evidencia en las preguntas de la variable 4, en la que el 87.5% señalan que hace más de tres años que no reciben formación sobre la enseñanza de las matemáticas y el 79.2% indican que, si el centro facilitara más recursos manipulativos, harían uso de ellos y que se formarían si el centro facilitara la formación. El 79% además indican que no consideran que dispongan de una buena formación en didáctica de la geometría pero que le gustaría reciclarse sobre la materia y tener un conocimiento más profundo sobre ella.

Tabla 45

Respuestas ítem: Percepción sobre sus propios conocimientos

Ítem	Valor	%
Consideras la geometría para tus estudiantes como una parte de las matemáticas:	Muy importante	65.2%
	Importante	30.4%
	Poco importante	4.4%
Las actividades de geometría deben estar basadas en cuestiones abiertas que permitan al estudiante investigar:	De acuerdo	91.3%
	Sin opinión	8.7%
Las actividades de geometría deben estar basadas en actividades que requieran un razonamiento deductivo:	De acuerdo	87%
	Sin opinión	13%
	En desacuerdo	0%
Las actividades de geometría deben estar basadas en el uso de modelos manipulativos:	De acuerdo	100%
¿Consideras que dispones de una buena formación en la didáctica de la geometría?	Sí, pero me gustaría reciclarme sobre esta materia y tener un conocimiento más profundo.	20.8%
	No, pero me gustaría reciclarme sobre esta materia y tener un conocimiento más profundo.	79.2%

Nota. información extraída del cuestionario inicial. Se sombrea la información relativa a la geometría.

A continuación, se facilita la referencia del documento publicado (*véase Capítulo 7*):

Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A., y Roa González, J. (2025). La formación de maestros en activo de educación infantil: Análisis y percepción del desarrollo del pensamiento geométrico. En M. Torrado Fonseca (Coord.), *Investigación educativa e innovación ante los retos de la sostenibilidad: Libro de actas del XXI Congreso Internacional de Investigación Educativa y IV Encuentro de Doctorandos/as e Investigadores/as Noveles de AIDIPE* (pp. 457–461). Asociación Interuniversitaria de Investigación Pedagógica (AIDIPE). https://hdl.handle.net/2445/218438

5.2.2 Resultados Escala" Actitud ante las matemáticas-EAM"

En este apartado se presentan y analizan los resultados obtenidos en la escala" *Actitud ante las matemáticas",* aplicada antes de la implementación del programa y "*Tocando la geometría"*. Los resultados se presentan atendiendo a los factores que componen la escala, y al perfil de las maestras participantes, desde una perspectiva descriptiva, se procedió al desarrollo de distintos análisis, empleando el paquete estadístico SPSS v.24.

El análisis descriptivo revela una actitud global de 73,8 puntos sobre un máximo de 125. Este resultado sitúa al grupo en una actitud general hacía las matemáticas situadas en el percentil 22, indicando una disposición general pobre hacia la disciplina.

En el *factor ansiedad* hacia las matemáticas, los ítems están formulados de manera que estar de acuerdo (valores altos) significa más ansiedad. El factor ansiedad se mide mediante los siguientes 9 ítems:

Tabla 46

Resultados del Factor Ansiedad hacia las matemáticas

N.º	**TD 1**	**D 2**	**N 3**	**A 4**	**TA 5**	$\bar{x}$	***s***	**s²**
2*	6	3	9	4	2	2,7	1,26	1,6
3	2	4	9	5	4	3.2	1,17	1,38
7*	4	7	6	6	1	2,7	1,16	1,34
8	5	7	10	2	0	2.37	0,92	0,85
12*	3	5	10	4	2	2,87	1,11	1,24
13	3	6	12	3	0	2,63	0,87	0,76
17*	1	4	9	8	2	3,25	0,98	0,97
18	1	11	8	3	1	2.67	0,91	0,84
22*	4	5	10	4	1	2,70	1,08	1,17
Puntuación total global total						2,78	0,7	0,49

Nota. los marcados* son ítems invertidos que se presentan ya corregidos para su interpretación.

Como puede apreciarse en la Tabla 46 la puntuación media total está en 2,78 y presenta una desviación baja por lo que es un aspecto consistente en el conjunto de maestras analizadas, la baja variabilidad observada sugiere que el nivel de ansiedad hacia las matemáticas es relativamente homogéneo en el grupo de maestras analizadas.

Los ítems ligeramente por encima de la media y que por tanto presentan más agrado que desagrado son: Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto (3,2) y trabajar con las matemáticas hace que me sienta nerviosa (3,25). Ambos ítems hacen referencia al trabajo lo que indica que dentro del factor ansiedad el trabajo diario con las matemáticas que llevan no es el factor que más preocupa.

El resto de los ítems se encuentran por debajo de lo media y generan más desagrado entre ellos destacan especialmente: Tengo confianza en mí mismo cuando me enfrento a un problema matemático (2,37) y estoy calmada y tranquila cuando me enfrento a un problema de matemáticas (2,63). Como puede verse los ítems que más ansiedad generan son los relacionados con el uso de las matemáticas y la resolución de problemas.

Este valor se corresponde, según la escala aplicada, con un percentil de 22,5 respecto a otros grupos analizados lo que sitúa a las maestras en el primer cuartil del factor ansiedad y demuestra que el colectivo estudiado tiene una relación con las matemáticas que les produce una alta ansiedad.

En el *factor agrado* hacia las matemáticas, los ítems están formulados de manera que, a más puntuación, más agrado, es decir, son ítems directos que reflejan el gusto y disfrute al trabajar con las matemáticas. El factor agrado se mide mediante los siguientes 4 ítems:

Tabla 47

Resultados del Factor agrado hacia las matemáticas

N.º	**TD 1**	**D 2**	**N 3**	**A 4**	**TA 5**	$\bar{x}$	s	s^2
4	1	7	7	9	0	3.00	0.93	0.86
9	7	9	6	1	1	2.17	1.04	1.10
14	3	10	8	2	1	2.50	0.97	0.95
24	3	6	6	8	1	2.92	1.13	1.29
Puntuación total global total						2.64	0.72	0.53

Como puede apreciarse en la Tabla 47 la puntuación media total está en 2.64 y presenta una desviación baja por lo que es un aspecto consistente en el conjunto de maestras analizadas, con una desviación típica de 0.72. Este valor indica una baja variabilidad en las respuestas, lo que muestra que las puntuaciones se distribuyen de forma relativamente homogénea entre las maestras analizadas.

En este factor, únicamente uno de los ítems se sitúa en torno al valor medio de la escala: “Utilizar las matemáticas es una diversión” (3). El resto de los ítems presentan valores inferiores a la media, lo que indica una tendencia general hacia un menor grado de agrado. Entre ellos destaca especialmente el ítem “Me divierte hablar con otros de matemáticas” (2.17), que presenta la puntuación más baja.

Este valor se corresponde, según la escala aplicada, con un percentil de 55 respecto a otros grupos analizados lo que sitúa a las maestras en el tercer cuartil del factor agrado y demuestra que el colectivo estudiado tiene una relación ligeramente positiva en este factor que indica que la actividad matemática les produce cierto agrado.

En el *factor utilidad* de las matemáticas, los ítems están formulados de manera que miden la percepción de la relevancia, la aplicación y el valor práctico de las matemáticas en la vida cotidiana o futuro laboral. En este factor los valores altos indican que las maestras reconocen y aportan valor y utilidad a las matemáticas, de forma general. El factor utilidad se mide mediante los siguientes 6 ítems:

Tabla 48

Resultados del Factor de utilidad de las matemáticas

N.º	**TD 1**	**D 2**	**N 3**	**A 4**	**TA 5**	$\bar{x}$	s	s^2
1	1	0	5	5	13	4.21	1.06	1.12
6	0	0	7	8	9	4.08	0.82	0.68
15*	3	2	7	7	4	3,29	1,23	1,51
16*	1	5	10	4	4	3,2	1,10	1,21
19	14	2	7	0	1	1.83	1.12	1.27
21	2	8	10	2	2	2.75	1.03	1.06
Puntuación total global total						3.22	0.61	0.37

Nota. los marcados* son ítems invertidos que se presentan ya corregidos para su interpretación.

Como puede apreciarse en la Tabla 48, la puntuación media total es de 3.22, con una desviación típica de 0.61. Este valor indica una baja variabilidad en las respuestas, lo que sugiere que las puntuaciones se distribuyen de forma relativamente homogénea entre las maestras participantes. No obstante, al analizar los ítems de forma individual, se observan diferencias relevantes entre ellos, lo que apunta a una cierta heterogeneidad en la percepción de la utilidad de las matemáticas según el tipo de situación planteada.

Los ítems con puntuaciones superiores a la media son: “Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios” (4.21) y “Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas” (4.08). Ambos reflejan una valoración positiva de la importancia de las matemáticas, especialmente en relación con su relevancia formativa y profesional.

Por el contrario, entre los ítems con puntuaciones inferiores a la media destaca especialmente: “Me gustaría tener una ocupación (si no trabajase de maestra) en la cual tuviera que utilizar las matemáticas” (1.83). Este resultado sugiere una menor disposición hacia el uso de las matemáticas en contextos profesionales alternativos.

Este valor se corresponde, según la escala aplicada, con un percentil de 40 respecto a otros grupos analizados lo que sitúa a las maestras en el segundo cuartil del factor utilidad y demuestra que el colectivo estudiado considera las matemáticas con una utilidad ligeramente baja.

En el *factor motivación* de las matemáticas, los ítems están formulados en sentido negativo, por tanto, son inversos, por lo que estar de acuerdo con ellos significa baja motivación. Al tener que invertirlos, se está reflejando la motivación real y no desmotivación. El factor de motivación se mide mediante los siguientes 3 ítems:

Tabla 49

Resultados del Factor motivación hacia las matemáticas.

N.º	**TD 1**	**D 2**	**N 3**	**A 4**	**TA 5**	$\bar{x}$	s	s^2
5*	0	0	7	8	9	3,58	1,24	1,55
10*	9	9	2	2	2	2,12	1,26	1,59
25*	4	8	7	2	3	2,66	1,23	1,53
Puntuación total global total						2,79	0,62	0,39

Nota. los marcados* son ítems invertidos que se presentan ya corregidos para su interpretación.

Como puede apreciarse en la Tabla 49, la puntuación media total es de 2.79, con una desviación típica de 0.62. Este valor indica una baja variabilidad en las respuestas, lo que sugiere que las puntuaciones se distribuyen de forma relativamente homogénea entre las maestras participantes.

No obstante, el análisis de los ítems de forma individual muestra ciertas diferencias entre ellos, lo que apunta a variaciones en la motivación percibida según el contenido específico de cada afirmación.

El ítem con puntuación superior a la media es: “Las matemáticas son demasiado teóricas para que puedan servirme de algo” (3.58). Dado que se trata de un ítem invertido, esta puntuación refleja una mayor motivación hacia las matemáticas tras su corrección.

Por el contrario, el ítem con menor puntuación es: “Las matemáticas pueden ser útiles para quien decida realizar una carrera de ciencias” (2.12), lo que sugiere una menor valoración de su utilidad en contextos académicos específicos.

Ambos ítems nos muestran que las matemáticas despiertan poca motivación al ser consideradas teóricas y vinculadas a carreras de ciencias lo que se aleja de la realidad percibida en las aulas de Infantil.

Este valor se corresponde, según la escala aplicada, con un percentil de 7 respecto a otros grupos analizados lo que sitúa a las maestras en el primer cuartil del factor motivación y demuestra que el colectivo estudiado tiene una motivación muy baja respecto a las matemáticas.

En el *factor confianza* hacia las matemáticas, los ítems son directos, por lo que estar de acuerdo con ellos significa alta motivación. El factor de confianza se mide mediante los siguientes 3 ítems:

Tabla 50

Resultados del Factor confianza hacia las matemáticas

N.º	TD 1	D 2	N 3	A 4	TA 5	$\bar{x}$	s	s^2
11	2	1	12	3	6	3.41	1.17	1.38
20	3	0	7	8	6	3.58	1.24	1.55
23	1	5	4	12	2	3.38	1.03	1.11
Puntuación total global total						3.46	0.76	0.57

Como puede apreciarse en la Tabla 50, la puntuación media total es de 3.46, con una desviación típica de 0.76. Este valor indica una variabilidad moderada-baja en las respuestas, lo que sugiere una distribución relativamente homogénea entre las maestras participantes.

Los ítems de este factor se sitúan por encima del punto medio de la escala, lo que indica una tendencia general hacia el acuerdo y, por tanto, una percepción positiva de la confianza hacia las matemáticas.

El valor más alto se obtiene en el ítem: "Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas" (3.58), lo que sugiere que la resolución de problemas se asocia con experiencias positivas que pueden reforzar la confianza en esta área.

En conjunto, los resultados apuntan a un nivel moderado de confianza hacia las matemáticas, con una valoración especialmente positiva de las experiencias de éxito en la resolución de tareas.

Este valor se corresponde, según la escala aplicada, con un percentil de 12 respecto a otros grupos analizados lo que sitúa a las maestras en el primer cuartil del factor confianza y demuestra que el colectivo estudiado tiene una confianza muy baja respecto a las matemáticas.

5.2.2.1 Relaciones entre los factores actitudinales hacia las matemáticas

Analizando los resultados de los percentiles obtenidos tanto de forma global como de forma particular observamos lo siguiente:

Tabla 51
Percentiles obtenidos en la escala de Auzmendi

Dimensión	Puntuación	Percentil
Total	73.8	22
Ansiedad	25.125	22.5
Agrado	10.58	55
Utilidad	19.375	40
Motivación	8.375	7
Confianza	10.375	12

Como puede observarse en la Tabla 51, la actitud general hacia las matemáticas se sitúa en un percentil 22, lo que indica una valoración global baja en comparación con los baremos de referencia.

El análisis por dimensiones muestra diferencias relevantes entre los factores. En primer lugar, la motivación (percentil 7) y la confianza (percentil 12) presentan los valores más bajos, lo que sugiere una menor disposición e inseguridad hacia el aprendizaje y uso de las matemáticas.

Por su parte, la ansiedad se sitúa en un percentil 22, lo que indica niveles relativamente elevados de malestar en relación con esta área. En contraste, los factores de agrado (percentil 55) y utilidad (percentil 40) se encuentran en valores próximos o ligeramente por encima de la media, lo que refleja una percepción relativamente positiva en cuanto al gusto y la valoración funcional de las matemáticas.

En conjunto, estos resultados muestran un perfil actitudinal caracterizado por una valoración positiva de la utilidad y, en menor medida, del agrado hacia las matemáticas, pero acompañado de bajos niveles de motivación y confianza, junto con una presencia relevante de ansiedad.

Si analizamos estos cinco factores en conjunto vemos que el colectivo de maestras estudiado es consciente de la utilidad y del valor social de las matemáticas y presenta un nivel de agrado coherente con sus actividades diarias relacionadas con la docencia de esta materia. Sin embargo, los niveles de ansiedad y la falta de confianza y motivación muestran que no se sienten cómodas cuando trabajan conceptos matemáticos, especialmente los problemas y que consideran las matemáticas como un contenido desafiante y alejado de la docencia en Educación Infantil y que está fuera de su zona de confort lo que puede ser compatible con rasgos de ansiedad matemática.

Ante estos resultados, la investigadora obtiene una información muy valiosa sobre las maestras que forman parte de la investigación y antes de comenzar el programa "*Tocando la geometría*".

El análisis de los factores revela una disonancia significativa en la identidad matemática de las maestras. Existe un agrado y una utilidad relativamente sólida y homogénea, lo que indica que las maestras perciben la importancia de su papel en la formación matemática propia de su etapa. Sin embargo, esta conciencia no va acompañada de un disfrute por la materia; la motivación y la confianza son los factores peor valorados. Se concluye, por tanto, que la enseñanza de las matemáticas en estas aulas se realiza desde la "obligación curricular" y no desde el entusiasmo intelectual, lo cual es crítico dado que el docente actúa como el principal modelo de transmisión de actitudes en la infancia. Si bien las maestras reconocen la utilidad académica de las matemáticas y consideran muy necesario el estudio y el conocimiento matemático también manifiestan su deseo de no trabajar en ninguna profesión que requiera el uso de las matemáticas. Esto evidencia que una parte considerable del profesorado en activo visualiza las matemáticas como algo obligatorio para su labor docente diaria y muestra un conocimiento débil manifestado por su deseo de tener más conocimientos necesarios socialmente manifestado en la importancia que otorgan, pero al que no les gustaría dedicarse si pudieran elegir. Esta combinación de factores puede llevar a una enseñanza de rudimentos básicos que no incorpora o limita la integración de metodologías globalizadoras.

5.2.2.2 Conexión entre la Escala y el modelo Van Hiele

El modelo de Van Hiele plantea una progresión en el desarrollo del razonamiento geométrico a través de distintos niveles jerárquicos, cuya adquisición no depende únicamente de la edad, sino fundamentalmente de la experiencia de aprendizaje y de la mediación didáctica (Van Hiele, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1990). En este proceso, las variables de carácter cognitivo y afectivo desempeñan un papel relevante en la construcción del conocimiento matemático. En este sentido, diversos estudios han puesto de manifiesto que factores actitudinales como la *confianza*, la *ansiedad* o la *motivación* influyen significativamente en la disposición del profesorado hacia el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Auzmendi, 1992; Alsina, 2017). Desde esta perspectiva, la vinculación entre los resultados obtenidos en la escala de actitudes y el modelo de Van Hiele permite interpretar cómo dichas variables pueden estar relacionadas con el desarrollo del razonamiento geométrico.

Los resultados obtenidos muestran niveles bajos de *confianza* y *motivación*, junto con niveles moderados de *ansiedad*. Este perfil actitudinal podría estar asociado a una menor predisposición para implicarse en procesos de aprendizaje que requieran reflexión, análisis y argumentación, elementos clave para el avance en los niveles de razonamiento geométrico. En este sentido, la literatura señala que la falta de *confianza* en las propias capacidades matemáticas puede limitar la toma de decisiones didácticas y la profundización en los contenidos (Carrillo et al., 2018).

Asimismo, niveles elevados o moderados de *ansiedad* pueden interferir en los procesos cognitivos implicados en el razonamiento matemático, dificultando la comprensión y la resolución de tareas que requieren un pensamiento más abstracto (Fennema y Sherman, 1976). De igual modo, la baja *motivación* puede reducir la implicación activa en procesos formativos, lo que limita las oportunidades de progresar hacia niveles superiores de razonamiento.

Por tanto, más que establecer una relación causal directa, los resultados sugieren que el perfil actitudinal identificado podría actuar como un factor condicionante en el desarrollo del razonamiento geométrico, dificultando el tránsito hacia niveles más avanzados del modelo de Van Hiele.

En este sentido, los resultados obtenidos constituyen un diagnóstico inicial relevante que permite interpretar algunas de las dificultades que pueden experimentar las maestras en su progresión dentro del modelo. En particular, determinados perfiles actitudinales podrían estar asociados a una menor disposición para afrontar tareas que impliquen análisis, argumentación o justificación, lo que podría favorecer la permanencia en niveles iniciales de razonamiento si no se interviene de forma adecuada.

Asimismo, la presencia de niveles moderados de *ansiedad* y un menor *agrado* hacia las matemáticas podrían actuar como barreras que limiten el avance entre niveles, especialmente hacia aquellos que requieren un mayor grado de abstracción, como el nivel de análisis (N2) y la deducción informal (N3). Por el contrario, la *confianza* podría desempeñar un papel facilitador en la implicación inicial en las tareas, mientras que la motivación y la percepción de utilidad parecen estar relacionadas con la disposición a profundizar y avanzar en el aprendizaje.

En consecuencia, los resultados ponen de manifiesto la necesidad de diseñar propuestas formativas que integren no solo componentes cognitivos, sino también estrategias de carácter afectivo, orientadas a fomentar el disfrute, la percepción de relevancia y la reducción de la ansiedad en el aprendizaje de la geometría.

Para concluir y conectar este apartado con los resultados obtenidos, resulta relevante destacar el valor interpretativo de la escala aplicada, cuyo análisis se retomará en el apartado de conclusiones.

Los resultados sugieren que la *confianza* y la *motivación* podrían desempeñar un papel relevante en la progresión desde niveles iniciales de razonamiento, como la visualización, hacia niveles más avanzados, como el análisis (N2) y la deducción informal (N3).

Asimismo, la percepción de *utilidad* parece estar relacionada con la disposición a profundizar en el aprendizaje, lo que podría favorecer el avance hacia niveles superiores del modelo, especialmente cuando las maestras reconocen el sentido práctico de la geometría en su labor docente.

Por su parte, el *agrado* podría tener una mayor influencia en los niveles iniciales, al facilitar la implicación en las tareas y la disposición a participar en actividades geométricas.

En cuanto a la ansiedad, los resultados sugieren que podría interferir tanto en el inicio del proceso (nivel de visualización) como en niveles intermedios, dificultando la implicación en tareas que requieren mayor razonamiento y abstracción.

En conjunto, estos factores ponen de manifiesto la importancia de considerar la dimensión afectiva como un elemento complementario en el desarrollo del razonamiento geométrico.

5.3 Recursos didácticos y agrupamientos

En esta dimensión se analizan los resultados en relación con los recursos empleados durante la investigación. A continuación, se detallan tanto los agrupamientos como los recursos didácticos.

5.3.1 Agrupamientos

Esta categoría está referida a mostrar las diversas organizaciones de las maestras en el aula para realizar las actividades, es decir, la estructura y al tamaño del grupo.

Según se observa en la Tabla 52, en la *sesión 1* predomina el trabajo en pequeño grupo + gran grupo (2 actividades de 3), lo que indica un arranque de la formación en esa Fase inicial basado en la socialización inicial tanto entre las maestras dentro del contexto de investigación como por parte de la investigadora con ellas. Tal y como se indica en el Anexo II, la investigadora observó que esta dinámica no estaba obteniendo los resultados esperados, modificando los agrupamientos en el diseño de las siguientes sesiones, por lo que en la *sesión 2* aparece un fuerte peso del gran grupo (6 actividades de 8), favoreciendo la construcción de un lenguaje compartido.

En la *sesión 3* se diversifican los agrupamientos, con presencia de parejas, pequeño grupo y gran grupo, para utilizar distintas estrategias y mantener la motivación de las maestras, realizando distintas actividades en formato tallere. Esto refleja un avance hacia la cooperación y el contraste de ideas, favoreciendo el dialogo entre las maestras.

En la *sesión 4* hay un equilibrio entre el agrupamiento individual, pequeño grupo y gran grupo, lo que sugiere un cierre con espacio tanto para la reflexión personal como para la discusión colectiva, conectando así con la Fase de Aprendizaje 5 del modelo.

Tabla 52

Tipo de agrupamiento

Agrupamiento	**Sesión 1-2**	**Sesión 3-4**	**Sesión 5-6**	**Sesión 7-8**	**Total**
Individual	0	1	0	3	4
Parejas	0	1	3	1	5
Pequeño grupo	1	0	2	3	6
Pequeño grupo + gran grupo	2	0	0	0	2
Gran grupo	0	6	4	3	13
Total	3	8	9	10	30

Nota. Datos obtenidos a partir del diseño metodológico.

En esta categoría resulta pertinente subrayar que las dinámicas implementadas, en consonancia con el diseño metodológico y el modelo teórico de referencia, se orientan hacia el *debate* como estrategia central, favoreciendo así la interacción y el intercambio dialógico entre las maestras en formación. Por ello, el agrupamiento que prevaleció es el gran grupo, seguido del pequeño grupo. El predominio del gran grupo en las sesiones centrales garantiza la socialización del conocimiento y la construcción del lenguaje geométrico, favoreciendo las condiciones para alcanzar Niveles de Razonamiento superiores. Además, la mayor presencia de parejas y pequeños grupos en las sesiones finales favorece la negociación de significados y la argumentación compartida, característica de las Fases 4 y 5 de aprendizaje del modelo Van Hiele.

5.3.2 Recursos empleados

Esta categoría recoge los recursos empleados durante las sesiones y el diseño de las actividades, atendiendo a los recursos establecidos por Área-Moreira (2004).

Los medios y materiales didácticos empleados actuaron como herramientas para facilitar el aprendizaje y la enseñanza, pero también como puente entre el conocimiento y las maestras, por lo que permitieron enriquecer la experiencia educativa haciéndola más significativa y atractiva, propiciando la participación de las maestras y manteniendo su atención. A continuación, se detallan los recursos empleados y su análisis:

Tipos de Medios y Materiales Didácticos:

- Medios Impresos: se utilizaron fotocopias, carteles, imágenes y mapas conceptuales.
- Medios Audiovisuales: se utilizaron presentaciones multimedia en la PDI.
- Medios Digitales: se utilizaron aplicaciones interactivas.
- Materiales Manipulativos: se utilizaron Pattern Blocks, Geoplanos, origami, juegos de mesa y materiales reciclados.

En relación con los Medios y Materiales Didácticos, la Tabla 53 pone de manifiesto un predominio de los materiales impresos (51.6%) seguido de los manipulativos (38.7%), frente a una presencia mucho más reducida de los recursos audiovisuales (6.5%) y digitales (3.2%). Esta distribución evidencia una clara orientación hacia experiencias de carácter concreto y tangible, coherente con los niveles iniciales del modelo de Van Hiele (visualización y análisis), en los que la manipulación, la observación y la descripción resultan fundamentales para alcanzar un nivel superior. Tanto los materiales impresos como los materiales manipulativos proporcionaron un soporte estructurado que favoreció la explicitación y sistematización del conocimiento geométrico. Todos los materiales empleados en la formación se encuentran en el Anexo III.

Tabla 53

Medios y Materiales Didácticos por sesión

Medios y Materiales Didácticos	Total	% Total
Materiales Manipulativos	12	38.7%
Medios Digitales	1	3.2%
Medios Audiovisuales	2	6.5%
Medios Impresos	16	51.6%

Nota. Datos obtenidos a partir del diseño metodológico.

La Tabla 54 recoge *verbatins* (los diálogos de las maestras) extraídos de las propias transcripciones y las observaciones de la investigadora durante el desarrollo de las sesiones, atendiendo a los agrupamientos y material empleado. Se han escogido en base a la percepción de las participantes durante su utilización, y se han explicado dentro del enfoque metodológico fenomenológico hermeneútico.

Tabla 54

Análisis transversal de las percepciones de las maestras en relación con los materiales empleados y observaciones de la investigadora

Sesión	Actividad	Medios y Materiales Didácticos	Agrupamiento	***Verbatins* y observaciones de la investigadora**
1	1.Recordando los tipos de líneas	Medios Impresos	pequeño grupo + gran grupo	En esta primera actividad, y después del esfuerzo requerido por los cuestionarios, las maestras tardaron más tiempo del previsto en completarla, posiblemente por la realización de la actividad en pequeños grupos, que invita a hablar entre ellas, pero de cuestiones ajenas a la actividad. Se detectó que el formato planificado no se ajustaba al tiempo estimado real, lo que dificultó la ejecución de todas las dinámicas previstas.
1	2.Definiendo los tipos de líneas	Medios Impresos+ Medios Audiovisuales	pequeño grupo + gran grupo	Al identificar que las maestras estaban algo dispersas y que no se centraban en la tarea, se decidió modificar la dinámica siendo una actividad que hacía de puente entre la primera Fase y la segunda. En lugar de que cada maestra trabajara de manera individual, se optó por guiar la actividad de forma colectiva. A continuación, se presentó tres imágenes de contextos reales para favorecer el reconocimiento visual hacia el análisis estructural y la aplicación del vocabulario geométrico en situaciones auténticas. Se decidió llevar a cabo la siguiente actividad de manera colectiva proyectando las imágenes en la Pizarra Digital Interactiva (PDI) para que las maestras pudieran analizarlas juntas e identificar los tipos de líneas representados. Esto provocó que, al ser una actividad guiada, apenas se produjera diálogo entre las participantes.
2	3.Descubriendo los ángulos	Medios Impresos	gran grupo	La disposición de las maestras frente a la PDI favoreció que la maestra 11 se levantara de forma espontánea, (actuando como portavoz verbalizando las características mientras el resto del grupo participa activamente): - (señalando la imagen en la PDI):" *...Mira, aquí hay claramente dos líneas rectas que se cruzan formando un ángulo recto. Esta debe ser una perpendicular…"* (M11)

2	4.Ángulos y líneas en una misma imagen	Medios Impresos	gran grupo	Esta actividad también se mostró en la PDI, tras su realización generó en las maestras un debate sobre qué se enseña en Educación Infantil en relación a las líneas y la necesidad de clasificarlas para luego hacer diferenciaciones en las figuras de dos dimensiones… y qué se podría enseñar…incluso una de las maestras apenada señaló: *"…Por ejemplo, les podemos mostrar figuras de 4 lados cóncavas y convexas y quizá ellos con sus palabras digan que hay un pico metido para adentro…"* (M21) -" *…A ver en 2º de Primaria que es donde estoy yo este año aún no lo hemos visto…"* (M14)
5	5.Conociendo el Geoplano	Materiales Manipulativos	pequeño grupo	Primer recurso didáctico: el material manipulativo estructurado: el Geoplano. Este recurso fue seleccionado debido a que la mayoría de las maestras desconocía su uso en el aula en el primer cuestionario inicial que completaron (Anexo I), y sus posibles aplicaciones con el alumnado de Educación Infantil. Mostraron gran interés por el material, por cómo utilizarlo y dónde obtenerlo. -" *… Pasamos a otro recurso y otra actividad, vamos a utilizar un material que se llama Geoplano para practicar…"* (I) -" *… Ais que bien un cambio de aires…"* (M)3 -" *… ¿El qué? …" (refiriéndose al nombre del material)* (M22) *-" …, . La idea es que ahora probéis a trabajar todas las líneas trabajadas en el día de hoy con las diferentes tramas y así os familiaricéis con el material…"* (I) -" *… ¿La trama? …"* (M23 Investigadora:" *… Si, la trama es la disposición de los pivotes, de los pinchitos…"* (I) -" *… aaaaa ok…".* (M23) -" *… ¿Esto donde se compra?"* (M18) - *… Es muy fácil luego te digo dónde puede comprar…"* (I) -" *… A pues pasa el enlace a todas…"* (M2) -" *… Hombre esto el cole se podría estirar y comprar material…" (mirando a la directora que también se encontraba en el aula).* (M19) *-" … Es muy útil ver todo esto en el geoplano. ¡Antes solo me lo imaginaba! Ahora entiendo mejor qué es una semirrecta o una curva. Para clase seria guay tenerlo con los niños por lo menos para los de 5…". (refiriéndose a 3º Infantil)* (M7)

2	6.Bingo geométrico	Materiales Manipulativos	gran grupo	Este juego produjo mucha diversión entre las maestras, Aunque el agrupamiento era grupal, se facilitó las tarjetas entre parejas para facilitar el dinamismo. Participaron de forma alegre mientras la investigadora recitaba las definiciones. El momento álgido fue cuando de sorpresa para las primeras maestras que cantaron línea, recibieron premios de regalices con formas que simulaban las líneas curvas y rectas, y finalmente con el *Bingo*, un premio salado de triángulos de maíz. -" *…a la el Bingo, a laaaaaa, qué fuerteeeeee, qué rico yo quiero el Bingo…"*, mientras mira a la investigadora y el premio (regalices) (M11) -" *…han hecho trampa, seguro" (riéndose)* (M23). -" *…tooongo…"* (M19) El resto de las maestras gritaban en tono jocoso y burlesco diciendo que habían hecho trampas, etc… finalmente compartieron los premios. Esta actividad como cierre de la sesión 2, generó un clima de bienestar frente a la primera sesión, las maestras mostraron de forma verbal a la investigadora "*lo bien que se lo habían pasado"*. -" *...Es interesante esto sí, a mí por qué no me enseñaron así, yo no me acuerdo por lo menos…"* (risas) (M4)
2	7.Yo dibujo tu dibujo	Medios Impresos	pareja	Con esta actividad descubrieron la dificultad que suponía indicar de forma precisa lo que ellas previamente habían dibujado. -*" …Madre mía esto es difícil ehhh…"* (M19)
4	8.Kahoot	Medios Digitales	individual	Con esta actividad de cierre de toda la formación, las maestras volvieron a mostrar su buena predisposición con el recurso, indicando de nuevo su utilidad para Primaria. - *"...Bueno, ahora vamos a hacer algo diferente. Vamos a poner a prueba lo que habéis aprendido con un Kahoot…"* (I) - *"... ¿Un… qué?"* (M22) - *"…Un Kahoot. Es una aplicación para jugar con preguntas y respuestas. Tranquilas, no se necesita saber nada complicado de informática. Solo tenéis que entrar con el móvil y poner el código que aparece en la PDI…"* (I) - *"... ¡Pues vamos a probar! Yo quiero ver si es tan divertido como dicen mis hijos."*

				(M9) - *"… ¡Ah, ya estoy dentro! Me puse de nombre "La Reina del Triángulo…".* (M19) - *"…esto si que me gusta a mi…"* (M16) - *"…qué divertido…"* (M9) - *"…oye que chulo esto, ¿no? También nos vale para Primaria."* (M2)
2	9. ¿Qué era un polígono?	Materiales Manipulativos	gran grupo	Para esta actividad se dispuso una serie de figuras geométricas creadas con papel blanco y de un tamaño lo suficientemente grande para que todas pudieran observarlo bien, además cada figura estaba numerada para facilitar su identificación y el desarrollo de la actividad. Las figuras dispuestas por el suelo del aula presentaban distintas características con la finalidad de que las maestras mediante el diálogo pudieran recordar los elementos clave necesarios para determinar si una figura bidimensional se considera polígono o no polígono.
2	10.Clasificando Polígonos	Materiales Manipulativos	gran grupo	Las nuevas figuras dispuestas en el suelo al igual que en la actividad anterior, favoreció su uso para descubrir una nueva propiedad, la simetría. Para ello, utilizaron el doblado de papel para confirmar si una figura que estaba generando confusión, era simétrica o no. -*" … ¿Ves? no coincide …"* (M10) - *…Claro y el 2 y el 4 tampoco…"* (M2) - *…" Claro al doblar se ve si están igual o no…" (*M17) -" *…aaaaa ahora si lo veo, claro se le salen las esquinas (se ríe), no lo visualizaba en la imagen madre mía…"* (M7) En ese momento la investigadora fue consciente del valor y utilidad que tiene un "buen material en el momento correcto", para poder mostrar (y demostrar) las propiedades de las formas independientemente de la edad.
3	11.Descubriendo los Cuadriláteros con Geoplanos 3x3	Medios Impresos	gran grupo	Con esta actividad, la investigadora les mostró otra manera de trabajar con el Geoplano, la versión "papel" para analizar los tipos de cuadriláteros mediante el dibujo. Esta actividad generó entusiasmo y rápidamente con las indicaciones de la investigadora, tres maestras salieron al centro de la agrupación en círculo, y se pusieron de forma voluntaria a dibujar. En el momento que alguna se quedaba "bloqueada sin ideas", rápidamente se intentaban ayudar. Una de ellas bromeó la investigadora indicó que había más opciones que no habían dibujado:

				-" *… bueno yo estoy creando dejadme…:" … tía yo me llevo y lo saco veréis. A las 12 de la noche: chicas lo tengo…" (*risas*)"* (M4) Una vez analizaron los cuadriláteros cóncavos y convexos, indicaron una vez más el valor del material: -" *... podríamos pedirlo a ver si nos lo compran…"* (M11) -" *... a ver si es una madera y unos tacos! Los podríamos hacer. Eso me lo hago yo en un rato, os cambio patio por geoplanos…"* (M20)
4	12.Doblado de papel	Medios Impresos	individual	Esta actividad junto con la 28, sirvió para analizar dos figuras nuevas no poligonales: el círculo y el óvalo, como estrategia y recurso: el doblado de papel. -" *…Tiene ejes de simetría infinitos…"* (M5) -" *…Claro porque se dobla por todos los sitios, y además no tiene lados…".* (M3) -" *…Ni ángulos, claro ni diagonal…"* (M23) -" *… ¿Qué otra figura vimos que no tenía diagonales? …"* (I) -" *…El triángulo…"* (M9) Gracias a ello, descubrieron una particularidad común entre los triángulos el círculo como figura no poligonal: la ausencia de diagonales.
3	13.Adivina adivinanza, mi triángulo.	Medios Impresos	gran grupo	Esta actividad, en formato cuadro de doble entrada, supuso un avance en el conocimiento de los triángulos, ya que pudieron evidenciar la relación entre propiedades tanto de sus lados como de sus ángulos. No obstante, al indicar tanta información en una sola definición, algunas maestras mostraron el desconocimiento y la no integración de estas nociones antes de la formación. Esto hizo cuestión a la investigadora si los estudiantes de Infantil o Primaria, sienten lo mismo cuando aprenden geometría. Mostraron gran interés por la actividad y su utilidad. -" *…acutángulo, obtusángulo… Ese día yo me puse mala…" (*refiriéndose a cuando ella era alumna y que en ese momento no lo recuerda). (M19) -" *…yo no me quedo con los nombres…" (Cuando están viendo los tipos de triángulos según los ángulos)* (M18) -" *…Espera que mi cerebro necesita unos segundos para pensar lo que dices…" (risas).* (M1) -" *… vale ya lo veo…"* (M23)

				-" *…A las mentes privilegiadas ya nos cuadra…" (riendo)* (M3) -:" *… vale ya lo veo…"* (M23)
2	14.Analizando los cuadriláteros	Medios Impresos	gran grupo	Con la plantilla a completar facilitó qu las maestras mediante el dialogo, descubrieran características similares/diferentes de las figuras de 4 lados: los cuadriláteros y paralelogramos: -" *…sí, y luego con lo que dice M5 Eso mismo pasa con el rectángulo y el trapecio. Ambos tienen los de lados paralelos, pero el rectángulo tiene ángulos rectos y el trapecio no, sólo un par…"* (M21) -" *…Y también tienen líneas paralelas este y este…" (señala)* (M21) -" *…Todos menos el último tiene paralelas…"* (M9) "*… y si encontraran una figura con cuatro lados y ningún lado paralelo como la última, ¿qué es?"* (I) -" *… Eso sería un cuadrilátero que no va aquí, es irregular, no es paralelogramo, vas a pillar…"* (M9) Tras la actividad, adquirieron totalmente la agrupación de cuadriláteros, entre paralelogramos o no.
4	15.Yo tengo, quién tiene	Materiales Manipulativos	gran grupo	Esta actividad se realizó en gran grupo, pero fue necesario para su dinámica, que cada maestra tuviera una tarjeta. Todas participaron de forma alegre y activa. La dinámica de juego invitó a la concentración y atención por parte de las maestras, y la asimilación de las nociones que aparecían en cada tarjeta.
3	16.Teselamos con Pattern Blocks	Materiales Manipulativos	pequeño grupo	Este material si era conocido por algunas de las maestras, aunque no por el nombre Pattern blocks, algunas maestras indicaron disponer de él en su aula. -" *... ¡esto si tengo yo en mi clase! ..."* (M19) -" *... ¿es como el Tangram? ..."* (M23) Mostraron alegría cuando la investigadora indicó que iban a trabajar por talleres y mostraron desconocimiento por la palabra *TESELAR:* -" *… Trabajo por rincones qué bien!" (se ríen) (refiriéndose a la metodología en Infantil de trabajar por rincones y áreas de aprendizaje como el rincón de arte, simbólico, de naturaleza, de matemáticas…)* (M20)

				-" *... ¿perdona? ..." (Se ríen)* Investigadora:" *... a ver mosaicos, pero hay que cubrir todo el plano de la mesa sin huecos. En otra mesa tendremos el juego de Hundir la forma con los geoplanos..."* (M23) -" *... Que chulo que guay..."* (M1) Cuando empiezan a teselar, evidencian la relación con el entorno: -" *...esto ya no es una flor, esto parecen los azulejos de mi baño..."* (se da cuenta que las figuras son características del entorno que nos rodea) (M1) -Silvia:" *...mete ahí los rombos picudos (una de las figuras de los Pattern blocks). Nos podemos dedicar a esto. Hay vidrieras que son así. ..."* (M20) Y la simetría como composición: -" *...muchacha noo que nos rompes la simetría..."* (M20) Y las bondades de la geometría en el arte: -" *...esto me flipa..."* (M23) -" *...nos está quedando precioso..."* (M20) -" *...somos el equipo teselaciones* (les hace mucha gracia el nombre, no lo habían escuchado nunca) (M23) -" *... mira queda simétrico es como una flor ahora le ponemos pétalos. Empiezan a poner semicírculos a los bordes de los hexágonos..."* (M1)
3	17.Hundir la Forma	Materiales Manipulativos	pareja	Con esta actividad, las maestras observaron cómo se puede transformar un juego de mesa tradicional como es *Hundir la flota,* en un juego matemático con material manipulativo: *Hundir la forma*, con geoplanos. Esta actividad fue muy útil para que las maestras empezaran a visualizar las propiedades de las figuras en su mente. -" *...no. ¿Tienes un triángulo con todos los ángulos distintos? ..."* (M17) -" *...sí, y tú? ..."* (M7) -" *...yo no, pero el tuyo es un escaleno..."* (M17) -" *...noooo te has equivocado..."* (M7)

				-” *…aiiii que tiene que ser los lados distintos vale vale. …”* (M17)
4	18.Artistas matemáticos	Medios Impresos	pequeño grupo	Para esta actividad, se empleó la visualización e impresión de obras de arte. Las maestras lo convirtieron en un concurso para ver qué equipo presentaba la mejor definición de la obra artística. Cuando estaban describiéndolo, el equipo contrario intentaba encontrar fallos o añadir aspectos que no habían indicado, pero siempre en todo jocoso. Además, utilizaban técnicas para justificarlo, como por ejemplo el doblado de papel para verificar si había un triángulo escaleno o era recto.
3	19.Descubriendo los cuerpos geométricos	Materiales Manipulativos	gran grupo	El material para esta actividad junto con la agrupación en círculo, y el buen clima entre las maestras, favoreció tanto la interacción como el uso de bromas entre ellas, generando momentos de diversión. Este material manipulativo si lo conocían, aunque presentaron un desconocimiento en la primera actividad en cuanto al nombre matemático: -” *…Yo tengo una caja de mi madre (va a por ella y la muestra) con muchos cuerpos geométricos. Es que mi madre era maestra. …”* (M1) -” *…Yo tenía una y me la robaron, no sería tu madre …”* (risas) (M18) -” *…A ver, son fáciles si no me pides cómo se llaman. …”* (M19) -” *…Es muy fácil es el o-a-o--edro…” (hace broma pareciendo que dice los nombres)* (M13)
3	20.Clasificando cuerpos geométricos	Materiales Manipulativos	gran grupo	Este material propició la clasificación atendiendo a diferentes características, incluso las maestras decidieron agacharse e ir moviendo ellas mismas las figuras para agruparlas. También se desarrolló un gran dialogo entre ellas, en el que argumentaban los motivos de esa agrupación atendiendo al criterio seleccionad. El poder tocar el material favoreció su comprobación y justificación, sin tener que nombrar de forma técnica. -” *… Pero bueno es que aquí cada una tiene su criterio…”* (queriendo explicar que hay diversas opciones) (M20) -” *… ¿por qué ha puesto el cono en el grupo de los redondos con el cilindro y no de los pinchos? …”* (M18) -” …es *que la base es redonda…”* (M11) M16 se levanta y coge la figura para comprobarlo: -” *…Yo sigo preocupada como ahora nos pregunte los nombres…”* (M19)

				-" *…Que no pasa nada tú le dices, es como un gorro de gnomo, una pirámide, una rueda…. Y ya está…"* (M13)
3	21. ¿Qué tienes?	Materiales Manipulativos	pareja	Está actividad gustó mucho a las maestras y lo hicieron saber de forma pública. Además, todas iban aplaudiendo cuando acertaban, de forma impulsiva con la emoción. -" *… Ay, yo quiero jugar a esto…"* (M16) - *"…Muy divertido muy divertido esto si si si. Si tuviera el material lo haría…" (y mira a la directora de Infantil que también participa) (risas)* (M23)
4	22.El cuadro de doble entrada tridimensional	Medios Impresos	gran grupo	En esta actividad se incluyó un nuevo material, los cuerpos geométricos con cartulina. Esta versión estaba pensada para que las maestras recogieran una nueva manera de utilizar material a bajo coste, y cuyo doblado con cartulinas grandes, puede permitir al alumnado de Educación Infantil crear figuras con volumen fácilmente pudiendo comprobar cómo se construyen a través de figuras bidimensionales. Apareció además un término nuevo en la clasificación: los sólidos platónicos. -" *…Jamás lo había escuchado…"* (M13) -" *…Yo tampoco…"* (M18) -" *… ¿Pero no es de filosofía? …"* (M10) (risas)
4	23. ¿Quién es quién? Geométrico	Materiales Manipulativos	pareja	Con este juego, al igual que con la actividad *Hundir la forma,* tenía como fin que las maestras fueran conscientes de las posibilidades matemáticas que ofrecen los juegos de mesa modificando algunos aspectos, en este caso, las tarjetas serán cuerpos geométricos y no caras de personajes. Este juego permitió que las maestras asentarán los contenidos relacionados con la geométrica tridimensional, de forma lúdica. Una vez más, las maestras indicaron que era una actividad útil y divertida: - *"…oye me encanta te lo voy a copiar para mis alumnos"* (M14) - *"… y yo para mis hijas también, las voy a hacer listas." (risas)* (M22)
3	24.Formando Formas	Materiales Manipulativos	pequeño grupo	En este taller descubrieron la composición de figuras regulares con otras figuras. A pesar de que para algunas les resultaba difícil, otras mostraron su alegría por los retos, sin embargo, les animaba el hecho de conseguirlo en grupo: -" *…me encantan estos retos…".* (M9) - *"…madre esto que difícil verás…".* (M19) y(M21)

				-" *…Esto me está encantando, esto es facilísimo…"* (M9) -" *…Bueno, no te flipes que somos 5 para hacerlo…"* (M22) -" *…alaaaaaaa oleeee…"* (M3)
2	25.Simetría triángulos	Medios Impresos	individual	La utilización de triángulos de papel junto con el doblado de papel facilitó el poder descubrir las simetrías de los triángulos. Gracias a la disposición de las maestras en círculo, favoreció la ayuda y la interacción entre ellas para analizar la propiedad en los diferentes triángulos. En un principio algunas de ellas mostraron dificultades, pero sus compañeras las ayudaron. -*" … ¿pero lo doblo todo el rato? …"* (M16) -" *…No, no, lo tienes que volver a abrir que, si no, ¡no lo puedes ver! …"* (M19) -" *…Eso es…"* (I) -" *…: ¿pero ¿cómo se da la vuelta? …"* (M10) -:" *… ¡Qué no! mira, y le muestra cómo va haciendo los pliegues…".* (M23) M3 intercede y se lo va haciendo a M10. En este momento la investigadora decidió aportarles el valor de esta actividad tan simple pero tan visual para poder enseñar distintos triángulos al alumnado de EI. - *…Pues este juego tan simple, si se puede hacer con los niños en el aula. También sería interesante tener en el aula un corcho y que pudieran girar las formas para que observaran que, aunque esté en distinta posición, pero sigue siendo un triángulo. También en la construcción de un triángulo en el geoplano, van a poder contar los clavos que tiene cada lado del triángulo. Vamos entonces a ver los tres triángulos y su simetría…"* (MI) -*" …es verdad. …"* (M3)
3	26.Diagonal y simetría cuadriláteros	Medios Impresos	gran grupo	La utilización de cuadriláteros de papel empleando do el doblado de papel para descubrir las simetrías y diagonales, descubrieron que no todas las figuras tienen los mismos ejes de simetría de forma visual y el número de diagonales de forma manipulativa. Las maestras fueron conscientes de cómo, de forma secuencial, iban recuperando información de las figuras, incluso indicaron que se lo "iban a enseñar a sus hijos": -" *…Andaaaaaaaa mira que nos organiza los contenidos, muy bien, gracias…"* (risas) (M10)

				-" *… vale entonces estos son paralelogramos porque sus líneas son paralelas…"* (M18) -*" …A ver, ya tengo el rectángulo, las diagonales son iguales y se cruzan en el centro porque todas tiene 4 lados y 4 esquinas, o sea vértices…"* (M11) -" *…Espera vamos a probar. Aaaaaa pue si claro tía yo si no lo veo no puedo asegurar. Pero una cosa, son líneas distintas mira, la diagonal se cruza, pero no son líneas iguales, eso da igual…"* (M23) -" *… esto -su hijo- yo creo que no ha visto tía y está en Primaria, se lo voy a enseñar este finde…" (risas).* (M1) Una vez tuvieron la información de todas las figuras, la investigadora les hizo una pregunta *trampa* para conocer el grado de asimilación del concepto *diagonal*: " *… ¿Cuántas diagonales tienen los triángulos? …"* (I) -" *… No tienen…"* (M22) y (M19) -" *… Claro porque si tienen que ser no consecutivos no hay suficientes vértices…"* (M23) -" *…claro es que, si intentas hacerlo la final estas pintando el lado, la línea…"* (M3) -" *… Nada de eso, olvídate. No nos has pillado…"* (M13)
4	27.Sumando ángulos	Medios Impresos	pequeño grupo	En esta actividad, en primer lugar, se les permitió el uso de calculadora: -*" …a ver saca el móvil que lo sumamos que yo de cabeza ni de coña……" (Sale 180°).* (M19) -*" …dime que sumo…. Pues si 180º también, podríamos probar con diferentes tipos de triángulos: equiláteros, isósceles y escalenos, para ver si siempre se cumple…"* (M5) -*" …pues aea, que sale 180º siempre…"* (M19) A continuación, les añadió la dificultad: no indicarles los grados para averiguar una generalización. Finalmente, la investigadora tuvo que darles una pista principal para que pudieran avanzar en el reto propuesto. -*" …Vale, no hay grados esta vez... ¿cómo vamos a saber cuánto suman los ángulos? No podemos sumar si no hay números…"* (M10) - *"… ¡Ah, lo he hecho también! Cuando doblas los tres vértices hacia un punto, las puntas encajan perfectamente en línea recta. Como si formaran una línea horizontal.* (M4) -*"… Entonces, si las tres esquinas del triángulo juntas forman una línea recta… eso significa que suman 180 grados, porque una línea recta tiene ese valor.* (M11)

				En ese momento, fueron conscientes de lo que estaban avanzando y lo dijeron públicamente: -*" ...Me encanta esto. Estamos haciendo una demostración sin fórmulas, solo con papel. ¡Eso es geometría pura! ..."* (M4) Una vez descubrieron el mecanismo, la investigadora les indicó que lo hicieran con otra figura, los cuadriláteros: - *"... (Doblando los vértices) ahora sale otra cosa espera..."* (M5) - *"... madre mía, que desconocimiento tengo. ..."* (M16) - *"...ya tía como se enteren los padres (risas) Entonces, Espera. Si el triángulo suma 180°, y eso es una línea recta, entonces... ¿podríamos dividir un cuadrilátero en dos triángulos? ..."* (M4) - *"...Sí! Si uno une una diagonal, cualquier cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos. Y si cada triángulo suma 180°, entonces 180 + 180 = 360 grados. ..."* (M5) - *"... ¡Claro! No es que el cuadrado "tenga más" porque sea más grande.* (M11) Esto favoreció que las maestras se cuestionarán el cómo lo aprenderán los estudiantes en edades superiores a Infantil… - *"... ¡ostras! Jolín esto sí que es visual, ¿en Primaria lo ven así? ..."* (M)4 - "*…el próximo curso sí (risas) ..."* (M5) - *"... no si al final nos volvemos matemáticas..."* (M11) - *"... si de aquí al grado de matemáticas (risas) ..."* (M16) - *"... en serio, yo me siento ahora muy contenta, voy a ser una madre lista voy a poder ayudar a -- y -- (sus hijos) cuando vean esto en Primaria (se ríe) ..."* (M11)
4	28.Descubriendo propiedades redondas	Medios Impresos	individual	Esta actividad junto con la M12 sirvió para analizar dos figuras nuevas no poligonales: el círculo y el óvalo, como estrategia y recurso: el doblado de papel. -" *…Tiene ejes de simetría infinitos…"* (M5) -" *…Claro porque se dobla por todos los sitios, y además no tiene lados…".* (M3) -" *…Ni ángulos, claro ni diagonal…"* (M23) -" *… ¿Qué otra figura vimos que no tenía diagonales? ..."* (I) -" *…El triángulo…"* (M9)

				Gracias a ello descubrieron una particularidad común entre los triángulos el círculo como figura no poligonal: la ausencia de diagonales.
4	29.Completando bi-información	Medios Impresos	pequeño grupo	Para esta actividad la investigadora les indicó que podían utilizar las figuras que habían empleado para crear los ejes de simetría y diagonales si lo consideraban necesario. La tabla se fue completando por todos los equipos mientras iban pasando por ese taller. Mostraron su utilidad una vez más para poder trasladarlo a un aula de Primaria dentro de la metodología Aprendizaje Cooperativo que suelen emplear en el centro educativo. - *"…esta actividad, pero más fácil también la podemos hacer en Primaria y con cooperativo! A modo folio giratorio…"* (M5) - *"…es verdad que buena idea, Elena nos vienes muy bien…"* (M1)
4	30. Concurso final	Medios audiovisuales	Gran grupo	En esta actividad se mostró una presentación con preguntas en la PDI para que las maestras participaran justificando las respuestas. Volvieron a mostrar alegría: Una vez finalizan la investigadora aplaude: - *"…no me diréis que en la primera sesión a hoy no habéis avanzado…"* (I) - *Jolín la verdad que sí. Un aplauso para ti. (y empiezan a aplaudir)* (M18)

Nota. Datos obtenidos a partir del diseño metodológico.

Se evidencia por tanto que el desarrollo del conocimiento geométrico no requiere necesariamente de una elevada inversión económica, el uso de una gran variedad de recursos ni de un uso intensivo de materiales digitales. Lo que resulta imprescindible es una selección adecuada y un aprovechamiento pedagógico intencional de los materiales didácticos empleados, así como la variedad agrupamientos/dinámicas que permitan atender a la heterogeneidad de procesos de aprendizaje de las maestras participantes, considerando la prevalencia de sus canales preferentes de acceso a la información (visuales, verbales, kinestésicos, colaborativos, entre otros) y, por tanto, mantener su atención.

Entre los recursos utilizados, el uso de materiales manipulativos reveló como el impulsor principal del paso desde la visualización hacia el análisis y a la deducción informal. El primer día de formación, el Geoplano permitió a la M7 verbalizar: *"con este Geoplano cuadrado hice una línea recta… la goma va de un clavo al otro, se ve como una cuerda tensa"*, lo que marcó un primer desplazamiento desde una percepción visual a una explicitación de propiedades. De modo análogo, en la última sesión el doblado de triángulos generó una experiencia de descubrimiento compartido: M4 concluyó que *"cuando doblas los tres vértices hacia un punto, las puntas encajan perfectamente en línea recta"*, y M5 añadió que *"no estamos solo viendo que suman 180, ahora estamos justificando por qué es así"*. Esta última expresión constituye un ejemplo claro de cómo la Fase de orientación guiada, apoyada en la manipulación, facilitó el paso al Nivel 3 (deducción informal).

Las plantillas de clasificación también fueron decisivas. El segundo día, cuando la M20 afirmó: *"si tiene lados rectos y está cerrado, sí que es polígono"*, se observa cómo la consigna de discriminar entre polígonos y no polígonos obligó al grupo a abandonar criterios perceptuales para atender a condiciones geométricas necesarias. Aquí la Fase de orientación dirigida y la Fase de explicación se articularon dialógicamente, favoreciendo la negociación colectiva del significado.

Por su parte, las actividades de orientación libre del tercer día—como proponer clasificaciones propias de cuadriláteros— desencadenaron razonamientos inclusivos del tipo: *"todos los cuadrados son rectángulos, pero no todos los rectángulos son cuadrados"*. Este tipo de afirmaciones no solo evidencian la consolidación del Nivel 2 (análisis), sino la irrupción clara del Nivel 3 (deducción informal), posibilitada por la libertad de elaborar y defender criterios de clasificación.

Finalmente, la Fase de integración desempeñó un papel clave en la apropiación discursiva. En la última sesión, durante el Kahoot, M5 reafirmaba: *"todos los paralelogramos son cuadriláteros, pero no todos los cuadriláteros son paralelogramos".* La naturalidad con la que la expresión aparece en el discurso revela que lo que comenzó como conflicto conceptual se transformó en conocimiento seguro gracias a la repetida verbalización y validación grupal.

CAPÍTULO 6: DISCUSIÓN y CONCLUSIONES

Este capítulo presenta la síntesis interpretativa de los resultados obtenidos, organizando las conclusiones a la luz del marco teórico y metodológico, así como en relación con las expectativas, preguntas y objetivos planteados en la investigación (véase Tabla 55). Se ofrece además una discusión de los hallazgos en diálogo con estudios previos sobre formación docente y desarrollo del razonamiento geométrico, destacando las implicaciones del modelo Van Hiele en la Educación Infantil.

Asimismo, se exponen las aportaciones más relevantes del estudio en el ámbito de la didáctica de la geometría, junto con las limitaciones inherentes al diseño y contexto de la investigación. Finalmente, se formulan orientaciones y líneas futuras de investigación, con el propósito de contribuir a la mejora de la formación inicial y permanente del profesorado de Educación Infantil.

Tabla 55

Cuadro resumen de las preguntas de investigación, objetivos y expectativas

	EG 1		EG 2		EG 3
		EE 2.1	EE 2.2	EE 2.3	
P1	OG1				
P2		OG 2	OG 2	OG 2	
P3		OG 2	OG 2	OG 2	
P4		OG 2	OG 2	OG 2	
P5					OG 3

6.1 Conclusiones relacionadas con el marco metodológico

La presente investigación se ha sustentado en la fenomenología hermenéutica como enfoque metodológico, una perspectiva orientada a la comprensión profunda de la experiencia vivida y a la interpretación de su significado educativo. Este método ha permitido aproximarse de manera rigurosa y sensible a las dimensiones éticas, relacionales y prácticas del quehacer docente, aspectos que suelen quedar fuera del alcance de los enfoques empíricos tradicionales. En el contexto de esta tesis, la fenomenología hermenéutica ha resultado especialmente pertinente para analizar cómo las maestras de Educación Infantil construyen su sentido geométrico al interactuar con las actividades del programa formativo, posibilitando la interpretación del significado que atribuyen a su propia experiencia de aprendizaje y transformación profesional.

La elección de este enfoque responde a la necesidad de comprender el proceso de la experiencia educativa desde dentro, es decir, desde la vivencia subjetiva de las maestras en formación. El proceso interpretativo ha permitido desvelar el modo en que las participantes configuran su razonamiento geométrico y reformulan sus concepciones didácticas al enfrentarse a situaciones de exploración, análisis y reflexión fundamentadas en el modelo de Van Hiele. Así, el método ha favorecido una mirada comprensiva que trasciende la descripción de hechos observables, para adentrarse en la significación pedagógica y personal que las maestras otorgan a su aprendizaje. La fenomenología hermenéutica ha permitido acceder al sentido vivido de la formación y comprender las transformaciones subjetivas que no serían visibles mediante instrumentos cuantitativos. La interpretación hermenéutica ha servido para comprender de manera global el fenómeno, primero con la lectura orientada de las partes, y estas, a su vez, conformando y enriqueciendo la totalidad.

Tal y como sostienen Guevara et al. (2020), la investigación descriptiva constituye un medio eficaz para la recolección y análisis sistemático de datos, orientado no solo a registrar hechos, sino también a identificar relaciones, patrones y significados emergentes. En este estudio, la aproximación fenomenológico-hermenéutica se ha complementado con un componente descriptivo que ha permitido captar con precisión las acciones, discursos y reflexiones de las maestras durante el proceso formativo. De este modo, la investigación ha integrado la descripción detallada de las experiencias observadas con la interpretación hermenéutica a través del lenguaje y la experiencia, buscando entender lo dicho y lo no dicho, descubriendo significados en actitudes y acciones, y convirtiéndolo en una herramienta educativa, tal y como señala Fuster (2019), mejora la práctica pedagogía, ya que ayuda al docente a encontrar significados en su labor, la reflexión sobre la práctica educativa y su comprensión.

De acuerdo con los fundamentos teóricos y los datos empíricos analizados, puede concluirse que la fenomenología hermenéutica ha posibilitado una lectura integral del proceso formativo, al articular la dimensión cognitiva del razonamiento geométrico con la dimensión vivencial de la práctica pedagógica. Este enfoque ha permitido comprender que el conocimiento profesional no se limita a la adquisición de conceptos o destrezas, sino que se construye a través de la experiencia significativa y de la reflexión sobre la propia acción docente.

En consecuencia, se puede afirmar que la elección metodológica ha sido coherente con los objetivos del estudio y con la naturaleza del fenómeno investigado: acceder al sentido vivido. Este fin no se hubiera logrado mediante instrumentos cuantitativos, este hecho confirma la conclusión de Alhazmi y Kaufmann (2022) en el que señala que la complejidad de la experiencia humana exige métodos cualitativos profundos. La comprensión obtenida revela que los conocimientos y competencias geométricas de las maestras están estrechamente vinculados a los procesos formativos vividos, y que estos han generado cambios sustanciales en su manera de pensar, interpretar y enseñar la geometría. El método ha mostrado, así, su potencial para iluminar las conexiones entre la teoría, la práctica y la vivencia pedagógica, consolidándose como una vía válida para la investigación educativa en el ámbito de la formación del profesorado.

6.2 Conclusiones relacionadas con las preguntas de investigación, expectativas y objetivos de la tesis doctoral

El desarrollo del estudio ha permitido dar respuesta satisfactoria a las preguntas de investigación y contrastar las expectativas iniciales planteadas al inicio del trabajo con los objetivos. Dado el carácter cualitativo y fenomenológico-hermenéutico de la investigación, el propósito no fue comprobar hipótesis en sentido causal, sino comprender e interpretar el significado de las experiencias vividas por las maestras participantes, así como los procesos de transformación que tuvieron lugar durante la intervención formativa.

6.2.1 Conclusiones relacionadas con la Expectativa General 1, Pregunta 1 y Objetivo General 1

El primer *objetivo general de* esta tesis doctoral consistía en analizar el estado de la investigación y las aplicaciones del modelo Van Hiele en España, con el fin de establecer las bases teóricas para el diseño de un programa de formación permanente dirigido a maestras de Educación Infantil. Este objetivo se ha alcanzado satisfactoriamente a través de una revisión sistemática y rigurosa de la literatura académica, que ha permitido identificar las principales líneas de investigación desarrolladas en el contexto español, así como las lagunas existentes en la aplicación del modelo en la formación docente.

En relación con el *Objetivo Específico 1*, se logró identificar y recopilar las publicaciones académicas sobre el modelo Van Hiele en el ámbito de la educación matemática en España, abarcando distintas etapas educativas y enfoques metodológicos. Este proceso permitió constatar que, aunque el modelo ha sido objeto de estudio en la enseñanza de la geometría en niveles de Primaria y Secundaria, su presencia en la formación de maestras de Educación Infantil resulta todavía limitada.

Respecto al *Objetivo Específico 2,* el análisis sistemático del contenido y los enfoques metodológicos evidenció una tendencia predominante hacia estudios de corte descriptivo y de carácter experimental centrados en la aplicación de pruebas de diagnóstico, frente a un menor número de investigaciones de tipo formativo o de desarrollo profesional. Asimismo, se observó un interés creciente por la integración del modelo de Van Hiele en contextos de aprendizaje manipulativo y visual, lo que pone de manifiesto su vigencia como marco teórico para el desarrollo del razonamiento geométrico.

El cumplimiento del *Objetivo Específico 3* permitió detectar vacíos, tendencias y necesidades en la investigación nacional sobre el modelo. Entre los vacíos más relevantes destaca la escasa atención a la formación inicial y permanente del profesorado de Educación Infantil en relación con la enseñanza de la geometría, así como la limitada presencia de propuestas que articulen las Fases de Aprendizaje del modelo con situaciones didácticas concretas en el aula. Estos hallazgos justificaron la pertinencia y originalidad del diseño e implementación del programa formativo desarrollado en el segundo bloque de la tesis, orientado a dar respuesta a dichas carencias.

En relación con el bloque documental de la investigación, las preguntas centradas en la revisión del estado del conocimiento sobre el modelo de Van Hiele en España fueron respondidas mediante un análisis sistemático que permitió identificar las principales líneas de investigación, las tendencias metodológicas y los vacíos existentes, especialmente en lo referente a la formación docente en Educación Infantil. Los resultados obtenidos confirmaron la expectativa general de que la investigación sobre el modelo en el contexto español ha sido abundante en los niveles de Primaria y Secundaria, pero escasa en la formación del profesorado de etapas iniciales. Este hallazgo justificó la necesidad de diseñar un programa formativo orientado a dicho nivel educativo.

Además, la revisión de la literatura reciente y no solo es España, muestra una notable ausencia de investigaciones que articulen el modelo de Van Hiele con metodologías fenomenológico-hermenéuticas en el ámbito de la formación docente permanente en geometría. Los estudios existentes sobre el modelo se centran, en su mayoría, en enfoques cuantitativos o de diseño instruccional (Hartono, 2025; Kandaga, 2022; Naufal, 2021), mientras que la fenomenología hermenéutica ha sido aplicada, sobre todo, a la comprensión de experiencias educativas en otros campos de la enseñanza de las matemáticas (Fuster-Guillén, 2019; Lauterbach, 2017). En este contexto, el presente estudio constituye un avance metodológico significativo, al integrar por primera vez la estructura cognitiva propuesta por Van Hiele con una aproximación interpretativa orientada a comprender el sentido vivido de la formación.

6.2.2 Conclusiones relacionadas con: la Expectativa General 2; Pregunta 2,3 y 4; y Objetivo General 2

El segundo bloque empírico, correspondiente con el segundo objetivo general de la tesis consistía en *diseñar, implementar y analizar un programa de formación permanente basado en el modelo Van Hiele, y a las preguntas 2,3 y 4.* orientado a mejorar el razonamiento geométrico de maestras de Educación Infantil y a favorecer su progreso en los niveles de comprensión geométrica. Los resultados obtenidos confirman el cumplimiento de este objetivo, tanto en el plano cognitivo como en el didáctico y recordando una vez más, que el progreso del razonamiento geométrico no depende de la edad, sino de las experiencias estructuradas que permitan avanzar de un nivel al siguiente. (Van Hiele, 1986).

El desarrollo metodológico ha perseguido un propósito doble: por un lado, mejorar el razonamiento geométrico del profesorado en activo de Educación Infantil; y, por otro, comprender cómo se produce esa mejora desde la vivencia y la reflexión docente. La aplicación del modelo de Van Hiele como eje vertebrador del programa formativo ha permitido evidenciar que el razonamiento geométrico del profesorado puede evolucionar mediante experiencias formativas estructuradas, reflexivas y sostenidas en la práctica. Este hecho coincide con lo indicado por López de Silanes (2012), que señala la exigencia y necesidad de conocer tanto los niveles, los materiales y las personas con las que trabajamos, para poder operar plenamente con el modelo.

En relación con el *Objetivo Específico 2.1*, se logró diagnosticar el nivel inicial de razonamiento geométrico de las maestras participantes, estableciendo su punto de partida en las fases iniciales del modelo (fundamentalmente en la fase 1), lo que permitió diseñar una intervención ajustada a sus necesidades formativas. Tal como se esperaba, el diagnóstico inicial evidenció Niveles de Razonamiento geométrico bajos (niveles 1–2 del modelo de Van Hiele) en la mayoría de las maestras, confirmando la *Expectativa Específica 2.1* Estos resultados iniciales son coherentes con lo descrito en investigaciones españolas con profesorado en ejercicio, en las cuales el nivel 2 suele constituir el máximo predominante en la práctica profesional (Afonso, 2003; 2004). Sin embargo, a lo largo del proceso formativo, la progresión de actividades diseñadas según las fases del modelo favoreció un avance sostenido hacia niveles superiores, cumpliéndose así la *Expectativa Específica 2*.2

El *Objetivo Específico 2.2* se alcanzó mediante la elaboración de un programa formativo estructurado en ocho sesiones de una hora de duración horas, organizado según las fases del modelo de Van Hiele y articulado en torno a las dimensiones de la geometría unidimensional, bidimensional y tridimensional. El diseño mostró coherencia interna entre los objetivos, las actividades y la progresión de las Fases de Aprendizaje, permitiendo un avance gradual en la comprensión geométrica. Por tanto, se confirma el modelo como estrategia útil para la planificación de propuestas geométricas.

Asimismo, los resultados de esta investigación muestran que la combinación de actividades manipulativas, trabajo colaborativo y reflexión conjunta favoreció la construcción de un lenguaje geométrico compartido, contribuyendo a la reconstrucción colectiva del conocimiento entre las maestras participantes (*Expectativa Específica 2.3*). Esta interacción no solo permitió nombrar y describir elementos espaciales, sino también identificar y comunicar características geométricas relevantes, aspecto que constituye la base para transitar a niveles superiores del modelo de Van Hiele. Las maestras mostraron cambios significativos en sus concepciones y en su seguridad didáctica, manifestando una mayor capacidad para planificar y justificar actividades geométricas en el aula.

En el *Objetivo específico 2.4,* el análisis de sus conocimientos y percepciones previas reveló un conocimiento limitado y fragmentado de los contenidos geométricos, así como un uso mayoritariamente intuitivo del lenguaje geométrico, lo que dificultaba la verbalización precisa de conceptos y propiedades. Estos datos iniciales resultaron fundamentales para orientar el diseño del programa formativo, ajustándolo a las necesidades reales del grupo. Por otro lado, los cuestionarios aplicados reflejaron niveles bajos de agrado hacia la geometría, junto con sentimientos moderados de ansiedad y motivación, lo que señala una relación emocional ambivalente con la disciplina.

Estos resultados coinciden con lo hallado por Markovits y Patkin (2020) quienes destacan que el profesorado en formación y en ejercicio presentan inseguridad y escasa autoconfianza en el ámbito geométrico frente a aspectos numéricos, lo que repercute directamente en su desempeño como mediadores del aprendizaje. Además de indicar que han recibido poca formación específica.

Estos resultados corresponden con lo observado por Ortega-Rodríguez (2025) y Nortes Martínez-Atero et al. (2022), en la que señalan que las mujeres tienden a experimentar mayores niveles de ansiedad y menor autoeficacia en matemáticas que los hombres, y que tanto la ansiedad como la autoeficacia constituyen predictores significativos de la competencia matemática. Además, subrayan la necesidad de formar específicamente al profesorado para abordar los componentes socioafectivos vinculados al aprendizaje matemático.

Estos resultados conectan con los resultados de Roa González y Nuñez Fernández (2025), en donde señalan que los profesores de la etapa de Infantil se encuentran en un estado de ánimo muy deficiente, y que diferencia en el estado de ánimo existente entre la titularidad del tipo de centro también influye, siendo más deficientes en los centros públicos y concertados. Otro dato que llama la atención por su conexión con esta investigación es que la experiencia docente parece ser otro de los elementos que juega un papel decisivo en el estado de ánimo, siendo los grupos comprendidos entre los 6 y los 30 años de experiencia los que presentan un peor estado de ánimo

La implementación del programa (*objetivo específico 2.3*) se desarrolló con un alto nivel de implicación por parte de las 23 maestras participantes. Las actividades promovieron la exploración, la reflexión colectiva y la argumentación, favoreciendo el tránsito desde una comprensión visual hacia una comprensión analítica y formal de la geometría. Las maestras evidenciaron avances en la precisión terminológica, en la justificación de las propiedades y en la capacidad de establecer relaciones entre conceptos geométricos. Los resultados obtenidos en el análisis sobre cómo las maestras se sentían cada vez más integradas en las dinámicas propuestas coincide con el estudio de Zhang et al. (2025) en el que demuestra que un clima favorable influye directamente en la dimensión de la formación permanente, siendo un elemento clave para que la experiencia sea significativa y genere transformación profesional.

Este incremento contrasta con estudios previos que advierten que incluso en procesos de formación específica no es habitual que el profesorado alcancen niveles elevados de razonamiento geométrico (Afonso et al. 2009), lo cual refuerza la relevancia de los resultados obtenidos en sus Niveles de Razonamiento en el presente trabajo, al igual que los resultados en el estudio de Patkin y Barkai(2014), en el que el profesorado participantes alcanzó el nivel 3 del modelo en la geometría bidimensional, y se mantuvieron en la geometría tridimensional, por lo que se indica que esta dimensión requiere de más formación, como aspectos de líneas proyectivas.

Este análisis permitió acceder no sólo a los progresos conceptuales de las maestras en los Niveles de Razonamiento geométrico, sino también a las transformaciones subjetivas y profesionales que emergieron durante el proceso formativo. Por tanto, la investigación aporta una perspectiva cualitativa innovadora al estudio del sentido geométrico docente, abriendo una línea de exploración que reconoce el aprendizaje como experiencia vivida y no meramente como adquisición de conocimiento.

De manera global, las preguntas centrales del estudio de caso fueron respondidas mediante el análisis interpretativo de los discursos y producciones de las maestras participantes. Se identificaron transformaciones en el razonamiento geométrico, en la comprensión del modelo de Van Hiele y en las prácticas didácticas asociadas a la enseñanza de la geometría en Educación Infantil. Del mismo modo, las maestras expresaron valoraciones positivas sobre la pertinencia y aplicabilidad del programa, destacando la claridad de las fases, la adecuación de las actividades y la posibilidad de transferir los aprendizajes a su práctica profesional.

Por último, las preguntas del bloque 2 sobre el estudio de caso, permitieron proyectar los resultados hacia la formación inicial y permanente del profesorado, poniendo de relieve la necesidad de integrar la enseñanza de la geometría desde una perspectiva experiencial y reflexiva. En este sentido, los hallazgos confirman la Expectativa General, al demostrar que un programa formativo breve, estructurado y fundamentado en el modelo de Van Hiele favorece el desarrollo del razonamiento geométrico, la reflexión didáctica y la mejora profesional de las maestras de Educación Infantil.

Desde esta perspectiva, tanto la formación inicial impartida en las universidades como la formación permanente vinculada al marco competencial de la LOMLOE deberían asumir el desarrollo del sentido geométrico como eje estructural. La normativa vigente subraya la necesidad de que el profesorado desarrolle competencias didácticas vinculadas al razonamiento matemático y a la resolución de problemas espaciales en contextos significativos (LOE modificada por LOMLOE, art. 29 y Anexo I). De este modo, no basta con que las futuras maestras "conozcan formas y materiales", sino que deben ser capaces de diseñar, justificar y evaluar propuestas geométricas fundamentadas, alineadas con los procesos progresivos de aprendizaje que la educación contemporánea exige.

Para finalizar, el cumplimiento del segundo objetivo general confirma que la formación estructurada a partir del modelo de Van Hiele constituye una estrategia eficaz para el desarrollo profesional docente, favoreciendo tanto la mejora del razonamiento geométrico como la competencia didáctica necesaria para trasladar este conocimiento a la práctica educativa con el alumnado de Educación Infantil.

6.2.3 Conclusiones relacionadas con: la Expectativa General 3; Pregunta 5 y 4; y Objetivo General 3

Los datos corroboran los resultados extraídos de la investigación de López de Silanes (2012) evidenciando que los profesores de la etapa de Educación Infantil (y de Primaria) poseen un nivel 2 del modelo, (siendo este mismo nivel el que alcanzan los estudiantes de la etapa de Educación Primaria). Este hecho evidencia la necesidad de elevar ese nivel de razonamiento en las Facultades de Educación para que alcancen, al menos, un nivel superior a su alumnado y, por lo tanto, un profesor que se encuentra en el mismo nivel de razonamiento que sus estudiantes, aunque domine los contenidos a impartir no está cualificado para el desarrollo de esta competencia. El mismo autor extendió su análisis a profesorado de otros países utilizando el test de Usiskin (Usiskin, 1982), concluyendo que estos se sitúan mayoritariamente en los niveles 3 y 4 del modelo de Van Hiele, es decir, por encima del profesorado español. Esta diferencia no resulta trivial, ya que el nivel de razonamiento geométrico del profesorado se relaciona directamente con la calidad de la enseñanza recibida por el alumnado. En este sentido, podría considerarse que estos resultados tienen implicaciones en el rendimiento internacional de los estudiantes españoles. Prueba de ello es el informe TIMSS 2023 (Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias- *Third International Mathematics and Science Study),* en el que uno de los seis bloques analizados corresponde a la geometría e incluye 23 ítems sobre visualización, propiedades de figuras planas y espaciales, transformaciones geométricas y simetrías (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2023). En dicho informe, España obtuvo 498 puntos en matemáticas, situándose por debajo de la media OCDE- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (525 puntos), lo que abre la reflexión sobre cómo el nivel de razonamiento geométrico del profesorado podría estar influyendo en la formación matemática del alumnado.

Se destaca por tanto la necesidad de integrar la formación geométrica de las maestras en programas continuos de desarrollo profesional, la incorporación del modelo de Van Hiele en los planes de formación inicial docente, y la elaboración de recursos didácticos que conecten la experiencia manipulativa y sensorial con la formalización del conocimiento geométrico. Estos resultados corroboran la necesidad de dar difusión al modelo, ya que tal y como señala Fabres (2016) el profesorado declara no conocer el modelo de Van Hiele, por lo cual no es utilizado en sus prácticas, y los que señalan conocerlo, no lo usan en su totalidad.

En este sentido, hay que señalar que, tras finalizar la formación, la investigadora facilitó un manual a las maestras con todo lo realizado durante las sesiones, con teoría por medio de códigos QR que daban acceso a videos explicativos, con teoría y con ejemplos detallados de cómo abordar esos contenidos en un aula de Infantil/primer ciclo de Educación Primaria (véase Anexo V).

Por otro lado, los resultados obtenidos en relación con las actitudes y percepciones se complementan con la detección de la investigación por Catherine y Zanzini (2025), ya que en su estudio identifican que la inseguridad docente en geometría se traduce en prácticas limitadas al nivel de visualización. Al igual que Taşkin y Sezer (2022) que confirman como las creencias y actitudes condicionan lo que ocurre en el aula. Así, la baja competencia geométrica detectada en maestras de Infantil a nivel internacional no puede entenderse como un rasgo inherente a la etapa educativa, sino como el resultado de la ausencia de programas formativos que incorporen explícitamente la transición entre niveles de Van Hiele como objetivo profesional compartido.

El *Objetivo Específico 3.1,* centrado en la evaluación del progreso en el razonamiento geométrico, fue alcanzado mediante el análisis longitudinal de las producciones y discursos de las maestras. Se constató una progresión sostenida a lo largo de las fases del modelo de Van Hiele, especialmente hacia la fase 4 (orientación libre) y, en algunos casos, hacia la fase 5 (integración).

Este progreso confirma la efectividad del enfoque formativo adoptado y la validez del modelo como instrumento para promover el desarrollo del sentido geométrico.

Por tanto, las conclusiones permiten afirmar que el modelo de Van Hiele continúa siendo un referente teórico y didáctico fundamental, pero aun insuficientemente explotado en la formación docente en España. Su potencial para favorecer la comprensión progresiva de los conceptos geométricos y para guiar la secuenciación del aprendizaje justifica la necesidad de su incorporación explícita en programas de desarrollo profesional docente, especialmente en etapas iniciales como la Educación Infantil.

6.3 Conclusiones en relación con los objetivos del programa

El análisis de los resultados obtenidos a lo largo de la implementación del programa formación–intervención *"Tocando la geometría"* permite concluir que los objetivos propuestos para cada una de las sesiones fueron alcanzados en un grado notable, evidenciándose una progresión sostenida en el razonamiento geométrico de las maestras participantes. El diseño secuencial basado en las fases del modelo de Van Hiele posibilitó un tránsito gradual desde un conocimiento intuitivo y descriptivo de los elementos geométricos hacia una comprensión analítica y formal de las propiedades y relaciones espaciales.

En las dos *primeras sesiones*, centradas en la geometría unidimensional, se cumplió el objetivo de desarrollar las fases 1, 2 y 3 del modelo de Van Hiele. Las maestras avanzaron desde la simple identificación perceptiva de líneas y puntos hacia la descripción y clasificación fundamentada de los distintos tipos de líneas, atendiendo a su forma, posición y relación en el espacio. Las actividades iniciales, apoyadas en recursos manipulativos como el geoplano, favorecieron la verbalización de las propiedades y la incorporación progresiva de un vocabulario geométrico más preciso. Aunque la información derivada de los cuestionarios de Jaime y Usiskin (Usiskin, 1982; Jaime y Gutiérrez, 1990) se reserva para futuras publicaciones, las evidencias cualitativas confirman el cumplimiento de los objetivos formativos previstos para esta sesión.

Durante la *tercera y cuarta sesión*, dedicadas a la geometría unidimensional y bidimensional, se consolidaron las fases 3 y 4 del modelo de Van Hiele en la primera de ellas y se desarrollaron las fases 1, 2 y 3. Las maestras mostraron una mejora significativa en su capacidad para establecer relaciones entre elementos geométricos, reconocer propiedades internas de las figuras planas y justificar sus clasificaciones mediante un razonamiento cada vez más estructurado. La introducción de las transformaciones geométricas de la geometría bidimensional permitió el inicio de la fase 4, facilitando la aplicación autónoma de los conocimientos en contextos de resolución de problemas. Las actividades de orientación libre promovieron el uso funcional del lenguaje geométrico y la toma de decisiones basadas en criterios formales, confirmando el logro de los objetivos previstos para esta etapa.

El *tercer día de formación* evidenció una consolidación de las fases 2, 3 y 4 del modelo de Van Hiele en relación con la geometría bidimensional y el desarrollo de las fases 1, 2 y 3 en la geometría tridimensional. Las maestras alcanzaron una comprensión más profunda de las propiedades de las figuras, estableciendo conexiones entre características bidimensionales y tridimensionales, lo que demuestra una integración conceptual progresiva. Asimismo, se afianzó la fase 4 gracias a las transformaciones geométricas bidimensionales, al aplicar los conocimientos adquiridos de manera autónoma en contextos lúdicos y de resolución de tareas abiertas. En esta sesión se observó una transición clara hacia un razonamiento geométrico de mayor complejidad, caracterizado por la capacidad de justificar, argumentar y comunicar los propios procedimientos.

En las *dos últimas sesiones*, se consolidaron las fases 2 y 3 de la geometría bidimensional, la fase 4 de la geometría tridimensional y la fase 5 del modelo de Van Hiele. Este último nivel, correspondiente a la integración, evidenció la adquisición de una comprensión formal y reflexiva de los contenidos, manifestada en la capacidad de las maestras para sistematizar sus aprendizajes, formular definiciones precisas y aplicar sus conocimientos a situaciones nuevas. Las actividades finales, de carácter integrador, mostraron que las participantes habían alcanzado un razonamiento formal y deductivo, coherente con la fase más avanzada del modelo de Van Hiele.

En síntesis, el programa *"Tocando la geometría"* favoreció una evolución cognitiva y didáctica en las maestras, permitiéndoles pasar de un razonamiento geométrico de tipo visual e intuitivo hacia uno de carácter analítico y formal. Este progreso se reflejó no solo en la verbalización del lenguaje geométrico y en la identificación de propiedades, sino también en la capacidad para establecer relaciones, justificar decisiones y comunicar ideas geométricas con precisión y coherencia. La estructura secuencial y cíclica del diseño, basada en la articulación entre las fases del modelo de Van Hiele y las distintas dimensiones geométricas (unidimensional, bidimensional, tridimensional y transformaciones), se mostró efectiva para favorecer la comprensión progresiva y la transferencia de los aprendizajes a la práctica docente. Este resultado conecta con las ideas de los principales autores preferentes de este modelo en España, los cuales señalan como procedimientos relevantes del modelo: que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etcétera),para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos (Gutiérrez y Jaime, 2012), destacando la importancia de los procesos de describir, clasificar, definir y demostrar como componentes clave de la actividad matemática (Guillén-Soler, 2004).

La conexión de los dos objetivos generales evidencia la coherencia entre la fundamentación teórica y la aplicación práctica de la investigación. La revisión sistemática permitió identificar la necesidad de propuestas formativas basadas en el modelo de Van Hiele, y la intervención desarrollada respondió de forma efectiva a dicha necesidad, demostrando su potencial como herramienta de desarrollo profesional docente y la necesidad de una formación docente en geometría en Infantil, ya que esta es débil a nivel internacional, tal y como señalan los estudios como Clements y Sarama (2011) y Gambini y Lénart (2021).

El estudio aporta, por tanto, una doble contribución al campo de la didáctica de la geometría: por un lado, una visión actualizada del estado del conocimiento y de las líneas de investigación sobre el modelo en España; y por otro, una validación empírica de su aplicabilidad y eficacia en contextos de formación permanente de maestras de Educación Infantil.

En síntesis, los objetivos de la investigación se han cumplido en su totalidad. Los resultados obtenidos confirman la validez del modelo de Van Hiele como fundamento teórico y metodológico para la formación docente, y evidencian que la estructuración de la enseñanza de la geometría en torno a sus Fases de Aprendizaje constituye una vía eficaz para promover un razonamiento geométrico más profundo, reflexivo y aplicable a la práctica educativa en la etapa de Educación Infantil.

6.4 Limitaciones del estudio

Aunque los resultados obtenidos en la investigación permiten extraer conclusiones sólidas y relevantes, es necesario reconocer ciertas limitaciones que condicionan el alcance y la generalización de los hallazgos. La investigación se realiza a un único centro y a un número limitado de maestras, lo que limita la generalización de los resultados. Sin embargo, este punto conecta con las conclusiones aportadas por Manzanares Moya y Galván-Bovaira (2012) en el que señalan la necesidad de la formación permanente del profesorado y la necesidad de construir una cultura de centro, en ese sentido, se concluye el valor de esta formación en un centro con poca movilidad docente, pudiendo afianzar una línea metodológica vertical y horizontal en toda la etapa de Infantil y cómo la formación en el desarrollo profesional del profesorado mejora los centros educativos, además en esta investigación cumple con los requisitos obtenidos de la investigación de estos autores: la formación debe enfocarse en la práctica, que pueda aplicarse inmediatamente en el aula y que sean metodologías prácticas.

A pesar de los resultados positivos obtenidos, el desarrollo del programa presenta algunas limitaciones que deben ser consideradas. En primer lugar, la temporalización reducida de las sesiones dificultó una profundización mayor del modelo de Van Hiele, correspondiente al, y la ausencia de una fase de seguimiento posterior dificultan la valoración del impacto real en la práctica docente cotidiana.

Asimismo, la heterogeneidad en los niveles iniciales de razonamiento geométrico de las maestras generó ritmos de avance diferenciados que, aunque enriquecieron el proceso formativo, impidieron alcanzar una homogeneidad completa en los niveles finales. Por otra parte, la ausencia de los resultados cuantitativos derivados de los cuestionarios de Jaime y Usiskin en esta tesis (Usiskin, 1982; Jaime y Gutiérrez, 1990)—que serán presentados en futuras publicaciones— limita parcialmente la triangulación de evidencias.

Si bien una limitación señalada en esta investigación fue la escasa disponibilidad de recursos digitales durante la implementación del programa, esta circunstancia adquiere nuevos matices cuando se analiza desde la perspectiva formativa de las maestras participantes y las necesidades de la Educación Infantil. Estudios recientes, como el de Rodríguez Rincón et al. (2024), destacan que las TIC potencian el aprendizaje activo y la representación geométrica mediante entornos interactivos. Sin embargo, los resultados de la presente tesis sugieren que la centralidad del aprendizaje no radica únicamente en el medio tecnológico, sino en la construcción del sentido geométrico a partir de la acción y la experiencia.

Las sesiones se desarrollaron principalmente con materiales manipulativos y recursos físicos, lo que restringió la incorporación de herramientas digitales para la representación y exploración geométrica. No obstante, esta circunstancia se abordó desde una perspectiva pedagógica intencionada y no como una carencia, el diseño del programa priorizó el uso de materiales accesibles y fácilmente replicables en las aulas de Educación Infantil, alineada con el desarrollo cognitivo infantil, donde el razonamiento geométrico emerge de la exploración sensorial y la interacción con el entorno. La literatura coincide en que el aprendizaje geométrico es inicialmente intuitivo, concreto y vinculado a la experiencia espacial, garantizando la futura trasposición de saberes por parte de las maestras, a su alumnado sin depender de equipamientos tecnológicos específicos. Esta decisión metodológica, aunque limitante en términos de innovación digital, refuerza la aplicabilidad práctica del programa en contextos educativos diversos y con recursos limitados. Además, los hallazgos de esta tesis dialogan con el estudio de Barrantes y Blanco (2006), quienes indicaron que los maestros suelen reproducir modelos memorísticos y algorítmicos de enseñanza de la geometría, ya que no han vivido experiencias educativas basadas en la manipulación significativa. Esto permite interpretar que una formación como la desarrollada en este trabajo no solo compensa la carencia de TIC, sino que atiende una necesidad formativa más profunda, proporcionando a las maestras experiencias que no recibieron en su propio proceso educativo. De este modo, la manipulación no es únicamente un recurso didáctico, sino una estrategia de reestructuración de concepciones del profesorado proporcionando herramientas transferibles a contextos reales y con recursos limitados.

Desde esta perspectiva, la formación no solo proporcionó experiencias manipulativas, sino que generó condiciones pedagógicas para su continuidad, superando el riesgo de que las maestras continuaran reproduciendo metodologías tradicionales. De este modo, mientras estudios recientes destacan el potencial de las TIC para favorecer representaciones geométricas interactivas, el presente trabajo demuestra que la comprensión geométrica profunda puede construirse sin depender de recursos digitales, siempre que exista una propuesta formativa reflexiva, accesible y coherente con el desarrollo infantil.

Esta intención formativa se reforzó además mediante la reflexión didáctica posterior a cada sesión, en la que se dialogaba con las maestras sobre cómo adaptar las actividades al aula de Infantil, ajustándolas a las características cognitivas propias de esta etapa (resultados que se presentarán en futuras contribuciones). Dichos espacios permitieron vincular teoría y práctica, impulsando una comprensión situada del modelo de Van Hiele y evitando que la manipulación se redujera a una experiencia anecdótica. Asimismo, tras concluir la formación, la investigadora entregó a las participantes un manual con los contenidos teóricos trabajados, las actividades desarrolladas y ejemplos detallados de implementación para Infantil y primer ciclo de Primaria, favoreciendo la transferencia real de los aprendizajes al contexto escolar. Esta última aportación para las maestras supone el posible inicio de cultura de centro relacionado con la geometría y el trasvase de saberes, integrando el modelo en una etapa, y por tanto mejorando la cultura escolar (Manzanares Moya y Galván-Bovaira, 2012).

De cara a futuras investigaciones y acciones formativas, se considera pertinente ampliar la duración del programa, incorporando fases de seguimiento y transferencia al aula Infantil que permitan evaluar el impacto real en la práctica educativa. Asimismo, se propone explorar la aplicabilidad del modelo a otros niveles formativos y contextos docentes, así como diseñar instrumentos de evaluación más específicos que permitan valorar con mayor precisión los procesos de razonamiento geométrico, ya que tal y como señalan Senk et al. (2022), el test de Usikin puede no ser el cuestionario aplicable a todos los individuos ni para todos los niveles, siendo necesaria una actualización.

6.5 Proyecciones y líneas futuras

A partir de los resultados alcanzados y de las limitaciones identificadas, se abren diversas líneas de continuidad que pueden enriquecer la investigación y ampliar el impacto del modelo formativo propuesto.

En primer lugar, se considera necesario *ampliar la muestra y diversificar los contextos* en los que se implemente el programa *"Tocando la geometría"*, incluyendo maestras y maestros de distintas comunidades autónomas y centros con características heterogéneas. Esta ampliación permitiría contrastar los resultados y fortalecer la validez externa del modelo, permitiendo realizar estudios en diferentes contextos escolar con desigualdad de accesos a recursos.

Asimismo, se propone incorporar *una fase de seguimiento longitudinal* que analice la *transferencia real de los aprendizajes al aula de Educación Infantil*, observando cómo las maestras aplican los principios del modelo de Van Hiele en sus prácticas didácticas y cómo estos influyen en la comprensión geométrica del alumnado.

Otra línea de proyección consiste en *integrar recursos digitales y tecnológicos* en futuras versiones del programa, de modo que se combine el trabajo manipulativo con herramientas de visualización y simulación geométrica. Esta integración permitiría explorar nuevas formas de representación espacial y enriquecer las experiencias de aprendizaje tanto en la formación docente como en el aula Infantil.

Desde una perspectiva más amplia, se sugiere *adaptar el programa a la formación inicial del profesorado,* de manera que los futuros maestros adquieran desde etapas tempranas una comprensión estructurada de la geometría y de sus procesos de aprendizaje.

Además, la formación docente en geometría debería concebirse como un proceso continuo que combine el conocimiento disciplinar con la reflexión sobre la práctica, de modo que el profesorado sea capaz de reconstruir su propio pensamiento geométrico, tal y como señalan Jaime y Gutiérrez (2012).

Finalmente, se plantea la conveniencia de *profundizar en el desarrollo de instrumentos de evaluación específicos* que permitan medir con mayor precisión la progresión de los Niveles de Razonamiento geométrico en profesorado y alumnado, reforzando así la dimensión empírica del modelo.

Estas líneas de continuidad no solo amplían el alcance de la presente investigación, sino que consolidan su interés en la contribución a una formación docente reflexiva y, fundamentada, en la que la geometría se conciba como un ámbito esencial para el desarrollo cognitivo y la comprensión espacial en la primera infancia.

6.6 Conclusión final

El desarrollo de esta tesis doctoral permite afirmar que el modelo de Van Hiele constituye un marco teórico y metodológico de gran valor para la formación del profesorado de Educación Infantil al ofrecer una estructura clara y progresiva para comprender y enseñar la geometría. La investigación ha evidenciado que una formación fundamentada en dicho modelo no solo mejora el razonamiento geométrico de las maestras, sino que también fortalece su actitud y emociones.

Asimismo, la tesis contribuye a llenar un vacío en la literatura española al ofrecer una visión integradora del modelo de Van Hiele desde la perspectiva de la formación docente permanente, acompañada de una propuesta formativa concreta y evaluada empíricamente. El programa *"Tocando la geometría"* demuestra que es posible promover un desarrollo profesional significativo a partir de experiencias accesibles, reflexivas y contextualizadas, que fomenten la comprensión geométrica y la capacidad de trasladar ese conocimiento a la práctica educativa.

En definitiva, los resultados de este trabajo dadas las características particulares de la muestra de estudio no son generalizables, sin embargo, la investigación reafirma la pertinencia del modelo de Van Hiele como herramienta de mejora educativa y de desarrollo profesional, y ofrece una base sólida para continuar avanzando en la construcción de una didáctica de la geometría en Educación Infantil más profunda, fundamentada y transformadora, orientada tanto al crecimiento profesional de las maestras como al aprendizaje significativo de su alumnado.

Esta tesis doctoral ha puesto de manifiesto que el modelo Van Hiele no solo constituye un referente teórico para comprender el desarrollo del razonamiento geométrico, sino que también es un marco eficaz para diseñar y evaluar programas de formación permanente dirigidos al profesorado de Educación Infantil. Al combinar una revisión exhaustiva de las publicaciones españolas sobre el modelo con un estudio de caso real, se ofrece una doble aportación: por un lado, un mapa actualizado del conocimiento existente en nuestro país y, por otro, evidencias empíricas sobre el potencial transformador de intervenciones formativas breves y estructuradas. Con ello, se contribuye a mejorar la calidad de la enseñanza de la geometría en las primeras etapas educativas y se abren nuevas líneas para la investigación y la innovación en la formación docente.

Esta propuesta se alinea con la necesidad de construir una educación matemática más sólida y significativa desde las primeras etapas escolares, en la que el desarrollo del sentido espacial y geométrico se aborde de manera sistemática, fundamentada y coherente con los procesos cognitivos del alumnado y del profesorado. Este estudio no solo ha permitido describir el tipo de razonamiento presente en las maestras participantes en distintos momentos de la intervención, sino que también ofrece evidencias del potencial del modelo Van Hiele para el diseño de formaciones docentes orientadas a fortalecer la competencia geométrica desde una perspectiva progresiva y estructurada. Los resultados refuerzan la idea de que una enseñanza eficaz de la geometría requiere que el profesorado experimente y comprenda en primera persona los procesos de razonamiento que posteriormente deberá promover en el aula, particularmente aquellos vinculados a los niveles de pensamiento descritos por el modelo de Van Hiele. La formación docente basada en la vivencia y la reflexión sobre la propia experiencia de aprendizaje favorece un conocimiento más profundo y transferible, en línea con el concepto de conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008) y con la noción de conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986).

Por tanto, la enseñanza de la geometría en Educación Infantil no depende solo de qué se enseña, sino de cómo ha sido aprendido previamente por quien enseña: no se puede promover el razonamiento geométrico sin haberlo experimentado.

6.7 Recomendaciones finales

A partir de los hallazgos del estudio, se proponen las siguientes orientaciones didácticas y formativas para fortalecer el desarrollo del razonamiento geométrico en maestras de Educación Infantil y, por extensión, a su alumnado.

Para la formación docente

Integrar en los planes de formación permanente del profesorado de Educación Infantil programas específicos de geometría basados en modelos de desarrollo del razonamiento, como el de Van Hiele. La formación debe contemplar la progresión de los Niveles de Razonamiento geométrico, con actividades explícitamente orientadas a favorecer el tránsito entre niveles, desde la visualización hasta la deducción informal. Las actividades deben ir más allá del reconocimiento visual de formas y propiciar el análisis de propiedades, la clasificación, la comparación y la justificación de semejanzas y diferencias entre figuras. Actualmente se puede confirmar el escaso conocimiento del modelo dentro del profesorado, ya lo señalaba Fabres (2016), por tanto, esta investigación tiene como objetivo futuro, dar a conocer el modelo.

Las maestras que comprenden bien la geometría son más capaces de transmitir entusiasmo y confianza a sus estudiantes, lo que a su vez puede aumentar la motivación por aprender. Esto supone que un aprendizaje sólido de la geometría en la infancia sienta las bases para el éxito en matemáticas en etapas posteriores, fomentando habilidades que se extenderán a otras áreas del conocimiento.

Diseñar itinerarios formativos que combinen contenidos matemáticos y didácticos, con actividades prácticas y reflexión sobre la práctica docente.

Promover la evaluación diagnóstica del razonamiento geométrico del profesorado antes y después de las intervenciones, para orientar mejor las acciones formativas. Se podría ampliar la evaluación del profesorado incorporando una evaluación diagnóstica del razonamiento geométrico antes y después de las intervenciones, con el fin de orientar mejor las acciones formativas. Para ello, se podría emplear el cuestionario elaborado como prueba diagnóstica y su adaptación al contexto de la formación docente (Arteaga Martínez et al., 2018), cuya dimensión de contenido incluye los dominios de álgebra, números, datos y azar y geometría, en línea con propuestas internacionales como TIMSS (Mullis et al., 2009) Aunque fue diseñado para estudiantes de Magisterio de Educación Primaria, se consideraría igualmente útil para docentes de Educación Infantil.

Es fundamental que el profesorado domine y emplee terminología adecuada y estructurada (lados, vértices, ejes de simetría, ángulos, etc.) en sus propuestas didácticas, ya que el lenguaje constituye una herramienta clave para la conceptualización geométrica.

El uso de recursos concretos (bloques lógicos, Geoplano, Tangram, Regletas, etc.) y visuales (dibujos, esquemas, simulaciones) permite afianzar el aprendizaje geométrico y conectar las representaciones mentales con el lenguaje formal.

Para los centros y administraciones educativas

Fomentar espacios de trabajo colaborativo entre maestras y especialistas en didáctica de la matemática para diseñar, implementar y evaluar propuestas de geometría.

Dotar de tiempo y recursos a los centros para que las maestras puedan participar en programas de formación permanente estructurados y sostenidos.

Fomentar la participación en cursos y talleres sobre didáctica de la matemática, y en concreto, geometría, permitirá a las maestras actualizar sus conocimientos y por ende, mejorar sus prácticas educativas, reflexionando sobre su propio conocimiento geométrico y su impacto en la enseñanza.

Para futuras investigaciones

Replicar la intervención con muestras más amplias y en diferentes contextos para aumentar la validez externa de los resultados.

Realizar estudios longitudinales que analicen el impacto de estas formaciones en la práctica de aula y en el aprendizaje del alumnado.

Explorar la combinación de análisis cualitativos y cuantitativos para ofrecer una visión más completa de los procesos y resultados de la formación docente en geometría.

CAPÍTULO 7. CONTRIBUCIONES DERIVADAS DE LA TESIS

7.1 Artículos

Artículo publicado

Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A., y Roa González, J. (2024a). Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española. *European Public & Social Innovation Review*, 9, 1–16. https://doi.org/10.31637/epsir-2024-1365

Artículo enviado y en proceso de revisión

Sánchez González, E., Díaz Palencia, J.L., y Roa González, J. (202x). Actitudes hacia las matemáticas del profesorado en activo de Educación Infantil: un estudio de caso. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, xx*(x), x-xx. DOI: https://doi.org/xxxxxxxxxxxxxxx

European Public & Social Innovation Review

ISSN 2529-9824

Artículo de Investigación

Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española

Van Hiele model for the teaching of geometry: analysis of the Spanish scientific production

Elena Sánchez González[1]: Universidad a Distancia de Madrid-UDIMA, España.
elena.sanchez.go@udima.es
Almudena Sánchez Sánchez: Universidad a Distancia de Madrid-UDIMA, España.
almudena.sanchez.s@udima.es
Julián Roa González: Universidad a Distancia de Madrid-UDIMA, España.
julian.roa@udima.es

Fecha de Recepción: 13/06/2024

Fecha de Aceptación: 04/09/2024

Fecha de Publicación: 12/11/2024

Cómo citar el artículo:

Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A. y Roa González, J. (2024). Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española [Van Hiele model for the teaching of geometry: analysis of the Spanish scientific production]. *European Public & Social Innovation Review*, 9, 1-16. https://doi.org/10.31637/epsir-2024-1365

[1] **Autor Correspondiente:** Elena Sánchez González. Universidad a Distancia de Madrid (España).

Resumen:
Introducción: La geometría es uno de los campos menos analizados en la educación matemática, siendo causantes la falta de conocimiento de procesos y contenidos, y una enseñanza basada en la memorización de propiedades. El modelo Van Hiele se convierte en el más adecuado pues propone cómo analizar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes, y ofrece pautas secuenciadas al docente en la organización del currículo. **Metodología:** El objetivo fue analizar las publicaciones relacionadas con el modelo Van Hiele en España mediante un análisis bibliométrico. Se examinaron 22 documentos del motor de búsqueda *Web of Science*. **Resultados:** Los resultados evidencian que el modelo Van Hiele tiene una producción científica ascendente a lo largo de la última década, destacando la producción de literatura a través de artículos y tesis doctorales. **Discusión:** Estas investigaciones abarcan diversas etapas educativas, proporcionando una amplia perspectiva sobre la aplicación y eficacia de las intervenciones en distintos niveles del sistema educativo. Predominan las investigaciones de carácter cuasi-experimental, caracterizadas por la utilización de grupos experimentales no aleatorios en contextos escolares en etapas obligatorias. **Conclusiones:** Se puede señalar la necesidad de investigar el modelo Van Hiele en la formación continua del profesorado y en la etapa de educación infantil.

Palabras clave: modelo Van Hiele; geometría; análisis bibliométrico; investigación educativa; educación matemática; producción científica; España; investigación matemática infantil.

Abstract:
Introduction: Geometry is one of the least analyzed fields in mathematics education, being caused by the lack of knowledge of processes and contents, and a teaching based on the memorization of properties. The Van Hiele model becomes the most appropriate since it proposes how to analyze the level of geometric reasoning of students and offers sequenced guidelines to the teacher in the organization of the curriculum. **Methodology:** The purpose of this paper is to analyze the publications related to the Van Hiele model in Spain through a bibliometric analysis. Twenty-two documents were examined in the Web of Science search engine. **Results:** The results show that the Van Hiele model has an ascending scientific production over the last decade, highlighting the production of literature through articles and doctoral theses. **Discussions:** This research covers various educational stages, providing a broad perspective on the application and effectiveness of interventions at different levels of the educational system. The predominant research is of a quasi-experimental nature, characterized using non-randomized experimental groups in school contexts at compulsory stages. **Conclusions:** It is possible to point out the need to investigate the Van Hiele model in continuous teacher training and in the early childhood education stage.

Keywords: Van Hiele model; geometry; bibliometric analysis; educational research; mathematics education; scientific production; Spain; children's mathematics research.

1. Introducción

Los estudios bibliométricos son una herramienta fundamental para determinar qué líneas de investigación existen y permite determinar cuáles son las posibles líneas futuras de producción científica.

La investigación matemática se categoriza en cuatro ámbitos (Llinares, 2008):

1. Análisis didáctico y organización del contenido matemático.
2. Construcción del conocimiento y procesos matemáticos.
3. El estudiante para profesor, el profesor y el formador de profesores: aprendizaje y desarrollo profesional y enseñanza
4. Profesores, contexto e interacción.

Este mismo autor señala la necesidad de ir completando el mapa de esas investigaciones para determinar la "transferencia del conocimiento" al sistema educativo. En este sentido, Alsina (2019) indica que en la última década la didáctica de la educación matemática ha experimentado un notable avance en la producción científica.

En el ámbito de la educación matemática, la investigación sobre las problemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría es fundamental dado que, tal y como señala Puig *et al*. (2022), la geometría es una de las materias que registra los niveles más bajos de rendimiento académico en el plan de estudios de matemáticas. Además, el Informe PISA (Programme for International Student Assessment, Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes, 2023), muestra los resultados obtenidos de España en la competencia matemática:

> La competencia matemática es la capacidad de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una variedad de contextos de la vida real. Esto incluye conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta competencia ayuda a las personas a conocer el papel que cumplen las matemáticas en el mundo y a ejercer los juicios y tomar las decisiones bien fundamentadas que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos del siglo XXI (PISA, 2023, p. 16).

Este contenido se categoriza en subescalas, siendo la geometría una de las cuatro a evaluar, y que se trata en el área de *espacio y forma*. Los resultados señalan que España (463 puntos) queda significativamente por debajo del Total UE (471) y del Promedio OCDE (471).

Por tanto, la enseñanza de la geometría se presenta como un desafío significativo en el ámbito educativo debido a su inherente complejidad cognitiva, tal como destaca Duval (1998). Esta complejidad no solo reside en la naturaleza abstracta y espacial de los conceptos geométricos, sino también en la forma en que estos son transmitidos y comprendidos por los estudiantes.

Muchos de los problemas relacionados con la enseñanza de la geometría derivan directamente de las concepciones, creencias y la formación de los profesores (Alfonso, 2003). Estas variables juegan un papel crucial en la manera en que los docentes abordan la instrucción geométrica y, en consecuencia, en cómo los estudiantes perciben y aprenden esta disciplina.

Blanco y Barrantes (2003) señalan que los recuerdos y experiencias previas sobre la geometría y su proceso de enseñanza-aprendizaje constituyen el factor más influyente en las concepciones de los estudiantes que se están formando para ser maestros. Este hallazgo subraya la importancia de las experiencias educativas pasadas de los futuros docentes y cómo éstas moldean sus enfoques pedagógicos y su comprensión de la geometría.

Según las observaciones de Alsina y Delgado-Rebolledo (2022), para que una enseñanza sea eficaz es necesario que el profesorado disponga de una extensa gama de conocimientos que abarquen lo disciplinar y lo didáctico, además de experiencias prácticas. Esta diversidad de saberes permite al profesorado proporcionar una alfabetización matemática efectiva a sus alumnos. Por otro lado, hay que destacar la importancia de distribuir los niveles de conocimiento y su grado de adquisición para una correcta adquisición curricular (Sarausa, 2013; Sarausa *et al.*, 2013).

1.1. La Geometría en el Sistema Educativo Español: producción científica y modelo Van Hiele

La geometría en España fue ganando importancia dentro de la enseñanza de las matemáticas a partir de 1980, el estado del arte se presentó en la revisión realizada por Barrantes y Balletbo (2011) sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas.

Los conceptos de geometría han resultados desafiantes para los estudiantes jóvenes, pero sus dificultades pueden deberse, en parte, a una formación docente y un desarrollo profesional inadecuados, conduciendo a conceptos erróneos en su aprendizaje (Clements y Sarama, 2000; Chard *et al.*, 2008).

Numerosos autores, como Alsina (2022), han proporcionado directrices didácticas para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de estos conocimientos. Asimismo, según Fernández (2013), varios estudios identifican los niveles de razonamiento implicados en las habilidades de visualización geométrica.

1.1.1. El modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría

El modelo Van Hiele, no es un elemento moderno en la didáctica de la geometría, sin embargo, sí ha sido ampliamente investigado (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys *et al.*, 1988), por ser un marco valioso para comprender cómo los estudiantes desarrollan su capacidad para pensar geométricamente.

Se destaca el modelo de Van Hiele como referente didáctico (Roldán-Zafra, 2022), que categoriza en cinco niveles de razonamiento geométrico (Van Hiele y Van Hiele, 1958) y propone cinco fases de aprendizaje para alcanzar niveles superiores.

Investigaciones como la de Gutiérrez *et al.* (2021); Gutiérrez y Jaime (2012) indican que la interconexión de los niveles de Van Hiele y los niveles de demanda cognitiva son adecuados y útiles en el progreso de los estudiantes de educación primaria y secundaria, mejorando además la actitud hacia el estudio de la geometría (Sánchez-Ramos, 2021). Además, estudios como el de Ruiz y Arteaga (2022) señala que el modelo Van Hiele es una herramienta muy útil para la creación de propuestas integradoras y motivadoras para el desarrollo geométrico de los estudiantes.

1.2. Objetivos y enfoques del estudio.

Por tanto, los propósitos de esta investigación son, en primer lugar, poner de manifiesto la situación actual de la producción científica sobre el modelo Van Hiele en España a través de la utilización de esta herramienta. En segundo lugar, se busca proporcionar un análisis exhaustivo de dicha producción y detectar aquellos aspectos no analizados previamente, con el fin de enriquecer y ampliar el conocimiento existente sobre el modelo Van Hiele.

Para ello, se incluye una exploración histórica: analizando cómo se ha ido introduciendo el modelo Van Hiele en el sistema educativo español a lo largo del tiempo; exploración didáctica: evaluando cómo se incorpora el modelo en estudiantes españoles a través de su implementación en las diferentes etapas, y los resultados obtenidos expuestos en diversas publicaciones de investigación; y exploratorio: en relación a la formación docente de los profesores en España para enseñar geometría.

2. Método

Para esta investigación se ha consultado la base de datos Web of Science, debido a que es una plataforma de investigación y base de datos bibliográfica que proporciona acceso a una amplia gama de información científica, académica y técnica. Esta plataforma es ampliamente utilizada para buscar, analizar y evaluar la literatura científica indexada en ella. La metodología del presente estudio es empírica-analítica cuantitativa, y mantiene la forma de un diseño "Ex post facto retrospectivo" (Montero y León, 2005). Se ha utilizado la técnica del análisis de contenido, seleccionando la siguiente keyword-topic-parámetro: *Van Hiele*, siendo el único término, ya que este modelo se refiere a su propia naturaleza de desarrollar la geometría, enseñanza y didáctica como recurso educativo.

Los criterios de exclusión empleados en esta investigación fueron la eliminación de documentos duplicados. Los criterios de inclusión consistieron en seleccionar los documentos que aparecieron al utilizar el filtro de "Countries/Regions," eligiendo específicamente "España" y "Spain". Para la búsqueda se seleccionó el rango de fechas desde el primer documento en 1993 hasta la actualidad, siendo 2024 como el año de la última publicación. De un total de 380 documentos, se seleccionaron 23 para el análisis posterior, excluyendo uno por ser un duplicado. Los 22 documentos analizados abordan el modelo Van Hiele desde una perspectiva primaria. Las unidades de análisis seleccionadas recogen las siguientes variables: nivel de producción anual, autores, países, tipo de documento, rigurosidad científica en cuanto a metodología empleada en los artículos y factor de impacto. Para el análisis de los documentos se han empleado comparaciones porcentuales con el objetivo de determinar los porcentajes correspondientes a los aspectos analizados, este proceso se ha llevado a cabo utilizando una hoja de cálculo de Microsoft Excel, siendo este mismo instrumento el utilizado para la gestión de los datos.

3. Resultados

3.1. Nivel de producción anual

En cuanto a la temporalización, en el análisis se puede observar que, del total de los 22 documentos seleccionados, el año de mayor productividad es el 2022 con 6 (27,2%) producciones científicas, seguida del año 2013 con 3 (13,6%).

Tabla 1.

Evolución temporal de la producción documental relacionada con el modelo Van Hiele en España.

Año	Nº de producciones	%
2024	2	9,09%
2022	6	27,2%
2021	2	9,09%
2019	1	4,5%
2017	1	4,5%
2016	2	9,09%
2013	3	13,6%
2012	1	4,5%
2003	1	4,5%
1997	2	9,09%
1993	1	4,5%
Total	**22**	**100%**

Fuente: Elaboración propia (2024).

3.2. *Producción de autores*

En cuanto a la producción científica de los autores, y teniendo en cuenta la propuesta de clasificación por productividad de Crane (1969), se denominan grandes productores a aquellos autores con más de 10 publicaciones, productores moderados a los que presentan entre 5 y 9 trabajos, aspirantes entre 2 y 4 y transeúntes aquellos con un único documento citado.

Tabla 2.

Autoría de la producción científica relacionada con el modelo Van Hiele en España.

Nombre autor/a	Producciones como autor principal	Producciones: autor secundario	Producciones totales	%
Aravena Díaz, María	1		1	4,5%
González, Antonio	2	1	3	13,6%
Cabello Pardos, Ana Belén	1		1	4,5%
Arnal- Bailera, Alberto	1	1	2	9,09%
Alfonso Martín, Mª Candelaria	1		1	4,5%
Roldán-Zafra, Juan	2		2	9,09%
Gavilán-Izquierdo, J.M	1	1	2	9,09%
Berciano, Ainhoa	2	1	3	13,6%
Guillén Soler, Gregoria	1		1	4,5%
Sánchez-Ramos, Irene	1		1	4,5%
Jaime Pastor, Adela	1	3	4	18,2%

Huerta Palau, Manuel Pedro	1		1	4,5%
Sarasua, Joxemari	2		2	9,09%
Puig, Anna	1		1	4,5%
Ruiz Molto, María	1		1	4,5%
Gutiérrez, Ángel	2	1	3	13,6%
Gutiérrez Pablo		1		4,5%
Novo, María Luisa	1		1	4,5%
Total	**22**			100%

Fuente: Elaboración propia (2024).

De las cuatro categorías, tan solo uno de los autores identificados del presente estudio bibliométrico se puede identificar un único autor como "productor moderado" con un total de 5 (22,7%) publicaciones, siendo 6 autores los identificados en la categoría de "aspirantes", sin que exista ningún "gran productor", el resto se catalogan en la última categoría.

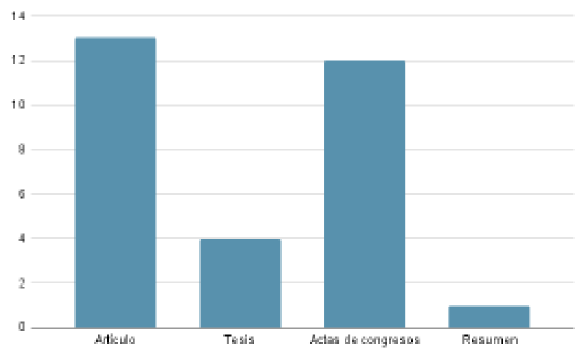
En la variable género de los autores se percibe una diferencia de 9,1 puntos porcentuales: las mujeres aparecen con menor frecuencia que los hombres en las revistas científicas de comunicación, sin embargo, destaca Adela Jaime Pastor como una de las autoras con más producciones. Resaltar que tanto mujeres como hombres prefieren escribir los artículos en conjunto, excluyendo las Tesis Doctorales, siendo tres el número más frecuente como autores firmantes.

3.3. *Tipo de documentos y factor de impacto*

Desde el ángulo del tipo de documento, se puede observar que destacan los Artículos, seguidos de las Tesis y Actas de congresos, dejando en último lugar los Resúmenes.

Figura 1.

Distribución por tipo de documento en relación con el modelo Van Hiele en España.



Fuente: Elaboración propia (2024).

Se han identificado un total de 12 producciones que contribuyen al avance del modelo Van Hiele. De éstas, 4 (33,3%) se ubican en el Q4, 3 (25%) en Q3 y Q1 respectivamente, mientras que el Q2 cuenta con solo 2 (16,6%) publicaciones, ocupando la posición menos destacada.

Tabla 3.

Distribución de las proveniencias de las producciones e impacto.

Cuartil	Journal	N	Total	%
Q4	Bolema-Mathematics Education	2	4	33,3%
	Contextos educativos-Revista de educación	1		
	International electronic Journal of Mathematics Education	1		
Q3	Enseñanza de las ciencias	2	3	25%
	International Journal of Mathematical Education in Science and Technology	1		
Q2	International Journal of Science and Mathematics Education	1	2	16,6%
	Computer Applications In Engineering Education	1		
Q1	Mathematics	2	3	25%
	Revista de Psicodidáctica	1		

Fuente: Elaboración propia (2024).

3.4. *Afiliación*

En cuanto a las universidades españolas que han enriquecido el avance del modelo Van Hiele a través de las producciones científicas, destaca la Universidad de Valencia, seguida de Zaragoza y Sevilla. Se han tenido en cuenta las afiliaciones de todos los autores, además del principal.

Tabla 4.

Afiliación científica relacionada con el modelo Van Hiele en España.

Afiliación	Total	%
Universidad de Valencia	6	23,0%
Universidad de Zaragoza	3	11,5%
Universidad Miguel Hernández-Alicante	2	7,6%
Universidad de Salamanca	1	3.8%
Universidad politécnica de Madrid	1	3.8%
Universidad del País Vasco	2	7,6%
Universidad de la Laguna	1	3.8%
Universidad Foral de Navarra	1	3.8%
Universidad Nacional de Educación a Distancia	1	3.8%
Universidad de Barcelona	1	
Universidad del País Vasco	2	7,6%
Universidad de Santiago de Compostela	1	3.8%
Universidad de la Rioja	1	3.8%

Universidad de Sevilla	3	11,5%
Total	**26**	**100%**

Fuente: Elaboración propia (2024).

3.5. *Metodología y muestra de estudio*

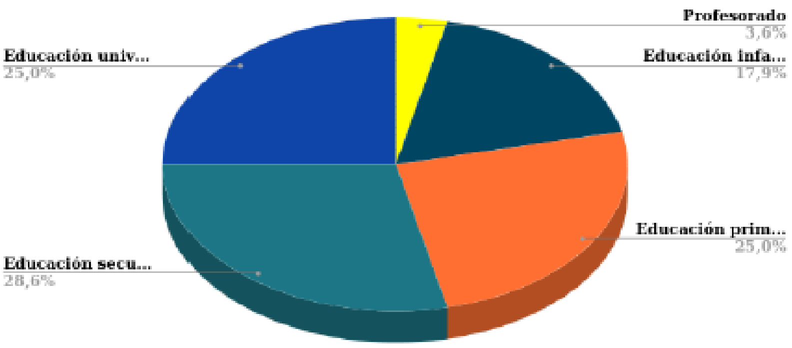
Con relación a la metodología utilizada en las 22 producciones seleccionadas, se encuentran dos categorías: artículos de protocolo - fundamentación (1) y de resultados (21), siendo éstos últimos los que prevalecen. En cuanto al tipo de investigación: 5 (23,8%) son producciones cualitativas, 2 (9,5%) cuantitativas y vuelven a prevalecer las mixtas con un 9 (42,8%).

Se puede afirmar que las producciones científicas que destacan en el modelo Van Hiele utilizan la investigación mixta por la propia naturaleza del modelo.

En cuanto a la muestra de estudio, aparece como predominante la etapa de educación secundaria (28,6%), seguida de la educación primaria y universitaria (25%). La etapa de educación infantil aparece como la siguiente población estudiada (17,9%). Tan solo hay una producción en la que la muestra objeto de estudio es el profesorado.

Figura 2.

Muestra de estudio relacionada con el modelo Van Hiele en España.



Fuente: Elaboración propia (2024).

4. Discusión

La literatura científica de primer orden del modelo Van Hiele se incorpora a la investigación desde 1993 hasta la actualidad, por lo tanto, podemos decir que las publicaciones son de interés continuado, habiendo un creciente número de publicaciones desde el año 2022, siendo 4 de las publicaciones tipo artículo, objeto de estudio la etapa de educación infantil. Estos datos corroboran a López de Silanes (2012), cuyo autor señala dicho interés sobre el modelo en profesores de todas las etapas educativas, salvo educación infantil. Si bien se puede corroborar que no se ha desarrollado una amplia documentación al respecto, sí se puede confirmar que la existente está bien estructurada y documentada con trabajos que se fundamentan en metodologías experimentales o cuasi-experimentales, poniendo de manifiesto los resultados obtenidos a partir de experiencias científicas.

En todas las producciones con resultados de investigación, ratifican en sus conclusiones la pertinencia didáctica del modelo por una evolución favorable de la muestra estudiada en el razonamiento geométrico, desde la tesis de Huerta (1997); Berciano *et al.* (2022) hasta González *et al.* (2024).

Hay que señalar que del total de las producciones científicas indexadas en WoS, el 5,8% corresponde a España, por lo que se podría decir que es un modelo que está presente en la producción relevante relacionada con Van Hiele. No obstante, los resultados de esta revisión bibliográfica evidencian la necesidad de ampliar la investigación en la formación de los docentes en el ámbito español, tal y como señala Alsina (2020).

La Universidad de Valencia, además de destacar entre las Universidades con más producciones científicas sobre el modelo Van Hiele, se encuentra entre las 10 mejores universidades de España según el Ranking CYD (Las Provincias, 2024), el cual permite analizar 30 ámbitos de conocimiento, entre ellos se encuentra educación y matemáticas.

En otro sentido, se puede ver que no hay un grupo de trabajo consolidado en el tiempo, en relación con el modelo Van Hiele, aunque sí hay autores que han aparecido en un mayor número de publicaciones como segundos firmantes.

5. Conclusiones

Numerosos trabajos de investigación han puesto de manifiesto la importancia de analizar las competencias de los profesores sobre las matemáticas y, en particular la geometría; siendo escasas las investigaciones sobre la educación matemática en infantil, y siendo la formación del profesorado de Matemáticas un área de interés en la investigación en Educación Matemática.

Con respecto a la geometría, estudios como el de Barrantes *et al.* (2013) confirman que ha habido un aumento en las investigaciones, por lo que esa contribución supone un cambio de percepción en el profesorado y en la formación de la geometría, en donde la metodología que se promueve es más activa y tiene como fin el alumno, y no los contenidos. Sin embargo, tal y como señalan en Barrantes y Balletbo (2011), el 70% de las producciones están centradas en la etapa de educación secundaria.

Las producciones analizadas en esta revisión, cuyos resultados se centran en una investigación con muestra analizada, denotan la relevancia de los resultados positivos hacia el modelo, este estudio constituye un avance con relación a la investigación en el ámbito de la geometría. Se ha detectado que tan solo una tesis doctoral (Alfonso, 2003) ha ahondado en la formación de profesorado, utilizando el modelo para detectar los niveles de geometría de sus alumnos, pero no para mejorar el nivel de conocimientos geométricos de los docentes de la muestra estudiada. Los resultados obtenidos sugieren la necesidad de brindar experiencias de formación a los docentes, que les permitan avanzar hacia el desarrollo y transformación de los conocimientos matemáticos y didácticos para profundizar en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, tal y como señalan estudios como los de Barrantes y Blanco (2006); y López de Silanes (2012).

Tanto en el estudio de Berciano *et al.* (2017) como en el artículo de Novo y Berciano (2019), se destaca que las intervenciones graduales y modelo Van Hiele implementados por los docentes, promueven una mejora notable en el razonamiento geométrico y lenguaje matemático de los alumnos de educación infantil de la muestra analizada. Sin embargo, las investigaciones sobre el conocimiento del profesorado de educación infantil en la enseñanza de matemáticas son limitadas, ya que, salvo una publicación, todos los estudios se han centrado en el alumnado. (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016). Esta idea corrobora la investigación de Lee (2010) en la que se subraya la necesidad de fortalecer tanto la formación inicial como continua del profesorado de educación infantil en la enseñanza de las matemáticas, destacando un área crítica que requiere mayor atención en la investigación educativa.

Además, estudios recientes como el de Ordóñez *et al.* (2021), arrojan pequeñas conclusiones, siendo una de las más claras el desajuste entre la formación del profesorado y la realidad en las aulas, respecto a la enseñanza de las matemáticas en las aulas de educación infantil. Esto se une a las investigaciones como la de Clemente y Llinares (2013), donde se identifican características específicas del conocimiento geométrico en estudiantes que se preparan para ser maestros, centrándose en analizar la comprensión del alumnado, lo cual pone en valor la necesidad de detectar la competencia geométrica de los docentes en activo.

Por tanto, se concluye que la aplicación de la Bibliometría como método para realizar análisis de producciones ha sido de gran utilidad para la toma de decisiones en cuanto a líneas futuras que la investigación sobre el modelo Van Hiele podría tomar.

6. Referencias

Alsina, A. (2019). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 100,* 85-108. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6939776

Alsina, A. (2020). La Matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 23*(2), 373-387. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1588

Alsina, A. y Delgado-Rebolledo, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas?. *Matemáticas, educación Y Sociedad, 5*(1), 18–37. https://journals.uco.es/mes/article/view/14153

Alsina, A. (2022). Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Epsilon-Revista de Educación Matemática, 11,* 67-89.

Alfonso, M. C. (2003). *Van Hiele's Levels of Geometric Thinking. A Study With Practicing Teachers.* (Tesis Doctoral). Universidad de La Laguna, Tenerife. España.

Barrantes, M. y Blanco, L.J. (2006). A study of prospective primary teachers'conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, (9),* 411-436. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9016-6

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2011). La enseñanza–aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década. Gobernación de Misiones–Universidad Nacional de Pilar. Asunciòn.Litocolor SRL.

Barrantes, M., Balletbo, I. y Fernández, M. A. (2013). La enseñanza-aprendizaje de la Matemática (Geometría) en Educación Secundaria en la última década. *Premisa. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática,15,* (56) 45-50. https://ice.uabjo.mx/media/15/2017/04/Art3__3.pdf

Berciano A., Jimenez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En Muñoz-Esolano, J.M.; Arnal-Bailera, A.; Beltrán-Pellicer, P.; Callejo, M.L.; Carrillo, J. (ed.). *Investigación en Educación Matemática XXI.* (pp. 147-156). SEIEM.

Berciano, A, Jimenez-Gestal, C. y Salgado, M. (2022). Reasoning and understanding in the resolution of a geometric task: analysis of the didactical pertinence of a learning trajectory in early childhood education. *Bolema,* 36(72)332-357. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a15

Blanco, L. J. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME,* 6(2), 107-132. https://www.redalyc.org/pdf/335/33560202.pdf

Burger, W. F. y Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 17(1), 31-48. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.17.1.0031

Chard, D. J., Baker, S. K. y Clarke, B. (2008). Preventing early mathematics difficulties: The feasibility of a rigorous kindergarten mathematics curriculum. *Learning Disabiityl Quarterly, 31,* 11-20. https://doi.org/10.2307/30035522

Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 19–59). Routledge.

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236). SEIEM

Clements, D. H. y Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics.* 6(8), 482–488. https://doi.org/10.5951/TCM.6.8.0482

Crane, D. (1969). Social structure in a group of scientists: a test of the "invisible college" hypothesis. *American Sociological Review.* 34(3) 335-352. https://doi.org/10.2307/2092499

González, A., Manero, V., Arnal-Bailera, A., & Puertas, M. (2024). Proof levels of graph theory students under the lens of the Van Hiele Model. *International Journal of Mathematical*

Education in Science and Technology, 55(8), 1938-1956. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2113467

Guillén, G. (1997). *A First Approximation to the Oxidative Stress Hypothesis of Aneuploidy. El modelo de van hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Observación de procesos de aprendizaje.* (Tesis Doctoral). Universitat de Valencia, Spain.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Kluwer Academic Publishers.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). SEIEM.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Journal for Research in Mathematics Education (monografía núm. 3), NCTM. https://doi.org/10.3707/749957

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis,* 32, 55–70. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1859

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Gutiérrez, P. (2021). Networked analysis of a teaching unit for primary schoolsymmetries in the form of an e-book. *Mathematics,* 9(8) 832. https://doi.org/10.3390/math9080832

Huerta, M.P. (1997). *Van Hiele's Levels in Relation to SOLO Taxonomy and Concept Maps.* (Tesis Doctoral). Universitat de Valencia, Spain.

Las Provincias. (18 de mayo de 2024). *La Universitat de València, entre las diez mejores universidades de España según el Ranking CYD 2024.* Las provincias. https://bit.ly/3X3KjdK

Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. *International Journal of Early Childhood,* 42, 27-41. https://doi.org/10.1007/s13158-010-0003-9

López de Silanes, F. J. I. (2012). *Didáctica de las matemáticas. Modelo de Van Hiele. Enseñanza de la geometría en España.* Davinci.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España: una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. *En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds), Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). SEIEM.

Montero, I. y León, O. G. (2005). Sistema de clasificación del método en los informes de investigación en Psicología. *International Journal of Clinical and Health Psychology,* 5(1) 115- 127. https://www.redalyc.org/pdf/337/33701007.pdf

Moltó,M. R., & Artega, B. (2022). Geometric-spatial and computational thinking in early childhood education: a case study with Kubo. *Contextos educativos: Revista de educación, 30*, 41-60. https://doi.org/10.3390/math9080832

Novo, M. L. y Berciano, A. (2019). Estudio longitudinal de la capacidad de representación simbólica de niños y niñas en el ciclo 3-6 de Educación Infantil al abordar tareas relativas a dictados matemáticos. *Bolema, 33,* (64,9) 513-541. https://doi.org/10.18172/con.5372

Ordóñez Martín-Caro, J., Fernández Cézar, R. y Gómez Cantarino, S. (2021). La enseñanza de las matemáticas en las aulas de educación infantil: percepciones de los futuros maestros a través del prácticum. *Investigación e innovación educativa frente a los retos para el desarrollo sostenible, 16*, 198-212. https://doi.org/10.2307/j.ctv2gz3w6t

PISA. (2023). Programa para la evaluación internacional de los estudiantes: Informe español. Librería del Ministerio de Educación y Formación Profesional. https://bit.ly/3MwOdqI

Puig, A., Rodríguez, I., Baldeón, J., & Múria, S. (2022). Children building and having fun while they learn geometry. *Computer Applications in Engineering Education, 30*(3), 741-758. https://doi.org/10.1002/cae.22484

Roldán-Zafra, J. (2022). Math Learning in a Science Museum-Proposal for a Workshop Design Based on STEAM Strategy to Learn Mathematics. The Case of the Cryptography Workshop. *Mathematics, 10*(22), 4335. https://doi.org/10.3390/math10224335

Ruiz, M. y Arteaga, B. P. (2022). El pensamiento geométrico-espacial y computacional en educación infantil: un estudio de caso con KUBO. *Contextos educativos: revista de educación, 30*, 41-60. https://doi.org/10.18172/con.5372

Sánchez-Ramos, I. (2021). Learning with catoptric anamorphosis. An educational experience. *Proceedings of the 3rd interdisciplinary and virtual conference on arts in education*, 327–332. http://civae.org/wp-content/uploads/2021/09/CIVAE2021.pdf

Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 43-65). SEIEM

Sarausa, J., De Gauna, J. G. R. y Arrieta, M. (2013). Prevalence of Geometric Thinking Levels over Different Stages of Education. *Revista de psicodidactica, (18)*2, 313-329. https://doi.org/10.1387/RevPsicodidact.6466

Van Hiele, P. M., & Van Hiele, D. (1958). *A method of initiation into geometry at secondary schools. En H. Freudenthal (Ed.), Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67-80). J. B. Wolters

7.2 Contribución en Congresos

Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A., y Roa González, J. (2024b). La formación de maestros en activo de educación infantil: análisis y propuesta de mejora basada en el modelo Van Hiele para el desarrollo del pensamiento geométrico [Ponencia]. *VI Jornadas de Innovación Universitaria InnovaUDIMA con Tecnología Educativa,* pp. 59–65. chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://landing.udima.es/wp-content/uploads/2024/11/jornadas-JIUTE-2024.pdf

Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A., y Roa González, J. (2025). La formación de maestros en activo de educación infantil: Análisis y percepción del desarrollo del pensamiento geométrico. En M. Torrado Fonseca (Coord.), *Investigación educativa e innovación ante los retos de la sostenibilidad: Libro de actas del XXI Congreso Internacional de Investigación Educativa y IV Encuentro de Doctorandos/as e Investigadores/as Noveles de AIDIPE* (pp. 457–461). Asociación Interuniversitaria de Investigación Pedagógica (AIDIPE). https://hdl.handle.net/2445/218438

Comunicación en proceso de aceptación:

Sánchez González, E., Díaz Palencia, JL., Roa González, J. y Val Fernández, P. (2026). Reconstrucción del razonamiento geométrico bidimensional en maestras de Educación Infantil tras una formación basada en el modelo Van Hiele. En Inicial del nombre Editor1. ApellidoEditor1, Inicial del nombre Editor2. ApellidoEditor2, Inicial del nombre Editor3. ApellidoEditor3, Inicial del nombre Editor4 y ApellidoEditor4 (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. inicial-final). SEIEM.

Jornadas JIUTE 2024

Jornada InnovaUDIMA con Tecnología Educativa

La formación de maestros en activo de educación infantil: análisis y propuesta de mejora basada en el modelo Van Hiele para el desarrollo del pensamiento geométrico[1]

Elena Sánchez González
UDIMA, España, elena.sanchez.go@udima.es

Almudena Sánchez Sánchez
UDIMA, España, almudena.sanchez.s@udima.es

Julián Roa González
UDIMA, España, julian.roa@udima.es

Resumen

Diversas investigaciones evidencian el desajuste entre la formación matemática (conocimiento didáctico y conocimiento matemático) del profesorado y la realidad en el aula de educación infantil, siendo la formación continua un aspecto clave para superar ese desajuste y cobrando especial atención la necesidad de profundizar en la construcción del conocimiento geométrico.

El modelo Van Hiele destaca por ser la herramienta idónea para diseñar propuestas metodológicas y mejorar el razonamiento geométrico en cualquier etapa educativa. Este trabajo tiene como objetivo analizar los conocimientos geométricos del profesorado de educación infantil de un centro educativo de la Comunidad de Madrid. Se recopilarán datos cuantitativos y cualitativos mediante cuestionarios para evaluar la competencia geométrica, actitudes hacia las matemáticas y experiencias en geometría antes y después de un programa de formación. Este estudio forma parte de una tesis doctoral, dentro del programa de Doctorado en Educación y Tecnología de la UDIMA.

Palabras clave: modelo Van Hiele, geometría, formación del profesorado, educación matemática, conocimiento del profesorado.

Abstract

Several investigations show the mismatch between the mathematical training (didactic knowledge and mathematical knowledge) of teachers and the reality in the early childhood education classroom, being continuous training a key aspect to overcome this mismatch, with special attention to the need to deepen the construction of geometric

[1] Doctorado en Educación y Tecnología UDIMA.

knowledge. The Van Hiele model stands out as the ideal tool to design methodological proposals and improve geometric reasoning at any educational stage. The aim of this work is to analyze the geometric knowledge of early childhood education teachers in an educational center in the Community of Madrid. Quantitative and qualitative data will be collected through questionnaires to assess geometric competence, attitudes towards mathematics and experiences in geometry before and after a training program. This study is part of a doctoral thesis, within the doctoral program in Education and Technology of the UDIMA.

Keywords: Van Hiele model, geometry, teacher education, teacher knowledge, mathematics education, in-service teacher training.

Contexto y motivación de la investigación

Estudios recientes como el de Ordóñez, Fernández y Gómez (2021) arrojan pequeñas conclusiones, siendo una de las más claras el desajuste entre la formación del profesorado y la realidad en las aulas, respecto a la enseñanza de las matemáticas en las aulas de educación infantil.

Con esta investigación se pretende contribuir, por un lado, a poner de manifiesto la situación actual del pensamiento geométrico del profesorado en activo de un centro educativo en la etapa de educación infantil, y por otro, proporcionar y contribuir en la mejora de formación de dichos docentes para que adquieran un mayor dominio de la materia, promoviendo e incentivando el trabajar la geometría con sus alumnos de una forma más competencial a través de diversos recursos didácticos: manipulativos y tecnológicos.

Estado de la cuestión

La formación del profesorado en matemáticas es un tema relevante en la investigación en educación matemática. En la última década, la didáctica, especialmente en educación infantil, ha experimentado un progreso positivo, evidenciado por avances en la producción científica, según lo señalado por Alsina (2019). Uno de los aspectos a destacar, según Ruiz y Bosch (2007), es el número de horas dedicadas a la formación de matemáticas en maestros. En particular, en el Grado de Magisterio de Educación Infantil del Sistema Universitario Español (SUE), regido en la Comunidad de Madrid, la oferta educativa revela que existe una única asignatura obligatoria de 6 créditos enfocada a la didáctica de las matemáticas, de entre los 240 ECTS. Cabe destacar la ausencia de una especialización en esta materia, a diferencia de otras disciplinas. Por ende, la mejora en la actividad docente dependerá exclusivamente de la profesionalidad de los maestros, quienes podrán perfeccionarse mediante cursos de formación externos. Alsina (2019) resalta la necesidad de investigar la delimitación del conocimiento y las destrezas necesarias para enseñar matemáticas en la etapa de educación infantil, considerando la naturaleza generalista de los profesores en este nivel.

Según las observaciones de Alsina y Rebolledo (2022a), para que una enseñanza sea eficaz es necesario que el profesorado disponga de una extensa gama de conocimientos que abarquen lo disciplinar y lo didáctico, además de experiencias prácticas. Esta diversidad de saberes capacita al profesorado para dotar a los alumnos de una alfabetización matemática efectiva.

Las investigaciones sobre la identificación del conocimiento del profesorado de educación infantil en la enseñanza de matemáticas son escasas, ya que la mayoría se ha centrado en las etapas de primaria y secundaria (Charalambous y Pitta Pantazi, 2016). Además, Lee (2010) destaca la necesidad de fortalecer la formación inicial y continua del profesorado de educación infantil en la enseñanza de las matemáticas.

En la actualidad, la investigación sobre las problemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría es fundamental en la educación matemática. Muchos de estos problemas derivan de las concepciones, creencias y formación de los profesores (Alfonso, 2004). Además, Duval (1998) destaca la dificultad en la enseñanza de la geometría debido a su complejidad cognitiva. La legislación educativa española sobre educación infantil, según el Decreto 95/2022, aborda exclusivamente aspectos relacionados con la geometría espacial, específicamente sobre la posición en el espacio. Sin embargo, no se incluyen pautas mínimas relacionadas con las figuras geométricas o las transformaciones, contradiciendo los hallazgos de la investigación sobre el desarrollo del pensamiento geométrico en este nivel educativo.

Numerosos autores, como Alsina (2022b), han proporcionado directrices didácticas para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de estos conocimientos. Asimismo, según Fernández (2013), varios estudios identifican los niveles de razonamiento implicados en las habilidades de visualización geométrica. Destacamos el modelo de Van Hiele, que categoriza en cinco niveles de razonamiento geométrico (Van Hiele y Van Hiele, 1958) y propone cinco fases de aprendizaje para alcanzar niveles superiores. En la etapa de educación infantil, según los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele (Gutiérrez, 2012), la mayoría de los niños alcanzan únicamente el nivel 1, aunque el nivel 2 es considerado alcanzable. En consecuencia, se espera que los docentes posean una competencia geométrica de, al menos, uno o dos niveles superiores respecto a sus alumnos.

Hipótesis o definición del problema de investigación

H1. El nivel del conocimiento geométrico del profesorado influye en la enseñanza de la geometría en educación infantil.

H2. La propuesta de intervención-formación creada a partir del modelo Van Hiele influirá en el pensamiento geométrico del profesorado.

H3. El programa de intervención-formación creado a partir del modelo Van Hiele influirá en un mayor uso de recursos por parte del docente para la enseñanza de la geometría.

Objetivos de la investigación

Esta investigación tiene como objetivo general el describir y analizar las competencias geométricas en el profesorado de infantil en activo en un centro de titularidad concertada de la Comunidad de Madrid, y valorar su evolución tras una propuesta de intervención a través del modelo Van Hiele, Por tanto, los objetivos que se pretenden alcanzar son:

- Describir el nivel de razonamiento geométrico del profesorado en activo de educación infantil en el contexto de un centro concertado de la Comunidad de Madrid.

- Analizar los factores sociodemográficos, educativos, creencias y actitudes que influyen en la enseñanza de la geometría de los profesores de educación infantil.
- Diseñar un programa de intervención-formación basado en el modelo Van Hiele para la mejora del nivel de razonamiento geométrico del profesorado de educación infantil.
- Evaluar la efectividad del programa intervención-formación basado en el modelo Van Hiele.
- Utilizar herramientas tecnológicas para la recogida de datos.
- Utilizar la tecnología educativa como recurso para la formación y evaluación de los contenidos desarrollados en el programa de formación-intervención.

Metodología

El presente estudio toma como eje central la evaluación de los profesores de la etapa de educación infantil de un centro de titularidad concertada de la Comunidad de Madrid con un programa de intervención y formación diseñado para tal fin. Se trata de una investigación cuasi experimental. A lo largo de esta investigación, se analizará la influencia de la intervención-formación a través de una evaluación previa a la intervención (PRE-TEST) y una evaluación posterior a la intervención (POST-TEST).

La muestra está compuesta por 24 profesoras que se presentan a la formación voluntariamente, habiendo explicado el proyecto previamente.

Antes de acceder a la muestra, se solicitaron las autorizaciones pertinentes al Comité de Ética del Departamento de Educación de la Universidad a Distancia de Madrid (UDIMA) y al equipo directivo del centro. El método de recogida de datos empleado garantiza el anonimato y la libre participación de los encuestados, así como la protección de los datos obtenidos, que son codificados para preservar su identidad. Los datos serán de carácter cualitativo y cuantitativo.

Para evaluar la competencia geométrica se seleccionaron los test de Usiskin (1990) y Jaime (1993), según el modelo Van Hiele. Además, se recurre a la «Escala Actitud ante las Matemáticas» de Auzmendi (1992) para analizar las percepciones sobre dicha materia a través de 25 preguntas a través de Google Forms. Se completa el estudio elaborando a través de Google Forms, un cuestionario basado en el modelo adaptado de Shavelson y Stern (1981/1985), utilizado por Hernández (1997) y Alfonso (2003), analizando las categorías: datos generales (edad, sexo, formación...), características del entorno de trabajo y formación recibida, conocimientos y recursos disponibles en el aula en el área de la geometría; y la percepción sobre sus propios conocimientos. Al finalizar cada sesión, cumplimentan un cuaderno de bitácora donde se analiza los contenidos que han visto en la sesión, cómo se han sentido, qué actividad les ha gustado más y la posibilidad de trasladarla a un aula con sus alumnos.

Tras el programa de formación, se realiza una entrevista semiestructurada de forma individual para recoger información relevante sobre las sesiones.

El análisis descriptivo con los datos recogidos se llevará a cabo utilizando Microsoft Office Excel y el programa estadístico SPSS.

En el programa de formación se realizan actividades de acuerdo a las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele, realizando una enseñanza cíclica de contenidos relacionados con la geometría unidimensional, bidimensional y tridimensional, utilizando recursos tecnológicos y manipulativos.

La intervención se lleva a cabo a través de 4 sesiones de 2 horas de duración, fuera del horario laboral y dentro del centro educativo.

Resultados obtenidos y resultados esperados

El análisis de los datos obtenidos proporcionará una visión integral y exploratoria del nivel de razonamiento geométrico adquirido por los profesores que se presentaron voluntarios al programa formativo, así mismo, se podrá analizar si el modelo matemático geométrico seleccionado mejora la competencia matemática. El análisis cualitativo proporcionará una comprensión más profunda de las percepciones y experiencias de los profesores en relación con la competencia geométrica. Estas perspectivas cualitativas enriquecerán la comprensión de los resultados cuantitativos y ofrecerán ideas para el diseño de intervenciones educativas futuras.

Discusión y conclusiones

En el ámbito de la educación matemática, hay creciente interés y necesidad en investigar las implicaciones de la formación continua del profesorado en activo, especialmente en cuanto a su conocimiento y las posibles repercusiones en la enseñanza.

En investigaciones como la de Clemente y Llinares (2013), se identifican características específicas del conocimiento geométrico en estudiantes que se preparan para ser maestros, centrándose en analizar la comprensión del alumnado, lo cual pone en valor la necesidad de detectar la competencia geométrica de los docentes en activo. Este estudio constituye un avance en relación con la investigación de formación docente continua en geometría. Los resultados obtenidos tras la puesta en marcha de un programa formativo basado en el modelo Van Hiele servirán como guía para la posible implementación del modelo en prácticas educativas, ya sea como formación continua del profesorado o como formación de futuros docentes.

Este panorama sugiere la necesidad de brindar experiencias de formación a los docentes que les permitan avanzar hacia el desarrollo y transformación de los conocimientos matemáticos y didácticos para profundizar en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Referencias bibliográficas

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática – estadística en las enseñanzas media y universitaria. Características y medición*. Mensajero.

Alfonso, M. C. (2003). Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio. [Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna].

Alfonso, M. C. (2004). Sobre los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele y la formación de profesores en activo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 58*, 3-35.

Alsina, Á. (2019). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 100*, 85-108.

Alsina, Á. y Delgado Rebolledo, R. (2022a). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad, 5*(1), 18-37. https://journals.uco.es/mes/article/view/14153

Alsina, Á. (2022b). Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Epsilon-Revista de Educación Matemática, 111*, 67-89.

Charalambous, C. y Pitta Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 19-59). Routledge.

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236). SEIEM.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century. *Kluwer Academic Publishers*.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). SEIEM.

Gutiérrez, A. (2012). Investigar es evolucionar. Un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. En Planas, N. (ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Graó.

Hernández, J. (1997). *Sobre habilidades en la resolución de problemas verbales aritméticos mediante el uso de sistemas de representación yuxtapuestos*. [Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna].

Hiele, P. M. van y Hiele, D. van (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. En H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67-80). J. B. Wolters.

Investigación sobre el pensamiento pedagógico del profesor, sus juicios, decisiones y conducta [traducción]. En Gimeno Sacristán y Pérez Gómez (1983). *La enseñanza. Su teoría y su práctica*. Akal (pp. 372-419).

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele. La enseñanza de las isometrías del plano. *La evaluación del nivel de razonamiento*. Universidad de Valencia.

Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. *International Journal of Early Childhood, 42*, 27-41. https://doi.org/10.1007/s13158-010-0003-9

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, n.º 340, de 30 de diciembre de 2020, 122868-122953. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2020-17264

Ordóñez Martín Caro, J., Fernández Cézar, R. y Gómez Cantarino, S. (2021). La enseñanza de las matemáticas en las aulas de educación infantil: percepciones de los futuros maestros a través del prácticum. *Investigación e innovación educativa frente a los retos para el desarrollo sostenible*. (16, pp. 198-212).

Ruiz López, N. y Bosch Betancor, J. (2007). La educación matemática en España. *Práxis Educativa, 2*(2), 151-160.

Shavelson, R. y Stern, P. (1981). Research on teachers pedagogical thoughts, judgements, decisions and behavior. *Review of Educational Research, 51*(4), 455-498.

Usiskin, Z. y Senk, S. (1990). Evaluating a test of Van Hiele. A response to Crowley and Wilson. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 242-45.

Aspectos clave

En este estudio que utiliza el modelo Van Hiele para a la enseñanza de geometría en profesores de educación infantil, se pueden identificar tres aspectos clave:

1. Evaluar en qué nivel del modelo Van Hiele se encuentran los profesores de educación infantil y cómo esto afecta su capacidad para enseñar geometría de manera efectiva es crucial, ya que los profesores que no han alcanzado niveles avanzados del modelo pueden tener dificultades para transmitir conceptos geométricos complejos a los estudiantes.
2. Dar visibilidad al modelo Van Hiele implica determinar cuáles son las estrategias pedagógicas y recursos didácticos más efectivos basados en este modelo para enseñar geometría en educación infantil, ya que la falta de recursos adaptados a los distintos niveles del modelo puede limitar la capacidad de los profesores para facilitar la progresión de sus estudiantes en la comprensión geométrica.
3. Medir el impacto del uso del modelo Van Hiele en el aprendizaje geométrico de los estudiantes en educación infantil es crucial, ya que sin un seguimiento adecuado y herramientas de evaluación alineadas con el modelo, puede ser difícil cuantificar y comprender plenamente los beneficios de este enfoque en el desarrollo geométrico de los niños.

La formación de maestros en activo de educación infantil: análisis y percepción del desarrollo del pensamiento geométrico

Elena Sánchez González [1]
Almudena Sánchez Sánchez [1]
Julián Roa González [1]
[1] Universidad a Distancia de Madrid- UDIMA
elena.sanchez.go@udima.es

Resumen

Numerosos trabajos de investigación han puesto de manifiesto la importancia de analizar las competencias de los profesores sobre las matemáticas y, en particular la geometría; siendo escasas las investigaciones sobre la educación matemática en infantil, y siendo la formación del profesorado de Matemáticas un área de interés en la investigación en Educación Matemática. Como consecuencia, esta investigación plantea la recogida de información de la percepción de los conocimientos y creencias de los maestros en activo en un centro educativo de titularidad concertada de la Comunidad de Madrid en el área de la geometría. Para ello, se utiliza una adaptación del cuestionario del modelo de Shavelson y Stern (1981) incluyendo diversas variables acerca de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Se realiza una análisis descriptivo de los datos recogidos, cuyos resultados evidencian la necesidad de ampliar la formación de los docentes de educación infantil en activo en el área de la geometría para mejorar su dominio en la materia, pudiendo abordarla de manera más competencial con sus alumnos.

Palabras clave: geometría, formación del profesorado, educación matemática infantil, análisis descriptivo.

Abstract

Numerous research works have shown the importance of analyzing teachers' competences in mathematics and, in particular, geometry; being scarce the research on mathematics education in early childhood, and being the training of Mathematics teachers an area of interest in Mathematics Education research. As a consequence, this research proposes the collection of information on the perception of the knowledge and beliefs of active teachers in an educational center in the Community of Madrid in the area of geometry. For this purpose, an adaptation of the questionnaire of Shavelson and Stern's (1981) model is used, including several variables about the teaching-learning of geometry. A descriptive analysis of the data collected is carried out, whose results show the need to expand the training of pre-school teachers in the area of geometry in order to improve their mastery of the subject, being able to approach it in a more proficient way with their students.

Key words: geometry, teacher training, early childhood mathematics education, descriptive analysis.

Introducción

La formación del profesorado en Matemáticas es un tema relevante en la investigación en Educación Matemática. En la última década, la didáctica, especialmente en educación infantil, ha experimentado un progreso positivo, evidenciado por avances en la producción científica, según lo señalado por Alsina (2019). Uno de los aspectos a destacar, según Ruiz y Bosch (2007), es el número de horas dedicadas a la formación de matemáticas en maestros. En particular, en el Grado de Magisterio de Educación Infantil del Sistema Universitario Español (SUE), regido en la Comunidad de Madrid, la oferta educativa revela que existe una única asignatura obligatoria de 6 créditos enfocada a la didáctica de las matemáticas, de entre los 240 ECTS. Cabe destacar la ausencia de una especialización en esta materia, a diferencia de otras disciplinas. Por ende, la mejora en la actividad docente dependerá exclusivamente de la profesionalidad de los maestros, quienes podrán perfeccionarse mediante cursos de formación externos. Alsina (2019a) resalta la necesidad de investigar la delimitación del conocimiento y las destrezas necesarias para enseñar matemáticas en la etapa de educación infantil, considerando la naturaleza generalista de los profesores en este nivel.

Según las observaciones de Alsina et al. (2022a), para que una enseñanza sea eficaz es necesario que el profesorado disponga de una extensa gama de conocimientos que abarquen lo disciplinar y lo didáctico, además

7.3 Formaciones

7.3.1 Curso de Verano 2024” Enseñar Geometría con materiales manipulativos bajo el modelo Van Hiele”-*Universidad UDIMA*

Figura 49

Imágenes del Curso de Verano 2024:” Enseñar Geometría con materiales manipulativos bajo el modelo Van Hiele”

Nota.https://www.udima.es/curso-verano-ensenar-geometria-materiales-manipulativos-bajo-modelo-van-hiele.

7.3.2 Taller al alumnado del Grado de Magisterio de Educación Infantil- *Universidad Villanueva*

Puesta en marcha del programa *"Tocando la geometría"* con el alumnado del Grado de Magisterio de Educación Infantil en la universidad Villanueva

Figura 50

Grupo participante en el Taller "Enseñar geometría en Educación Infantil con materiales bajo el modelo Van Hiele con materiales manipulativos"

Universidad Villanueva

D. JAVIER SOTA RAMOS, Secretario General de la Universidad Internacional Villanueva y del Centro Universitario Villanueva, cuya Entidad titular es Grados y Posgrados Villanueva S.A., con CIF: A86787850 y domicilio social en la Calle Costa Brava, 2 de Madrid,

CERTIFICA

Que **Dña. Elena Sánchez González**, con DNI nº: **51991603 B** ha intervenido como **ponente** invitado/a en la Universidad Villanueva, impartiendo la sesión que se indica a continuación,

Titulo de la sesión	Tipo de sesión (*)	Fecha	Alumnos a los que iba dirigida	Duración (en horas)
"Enseñar Geometría en educación infantil bajo el Modelo Van Hiele con materiales Manipulativos"	TALLER	15/11/24	Grado Magisterio Educación Infantil	2

(*) Masterclass, seminario, conferencia, coloquio, etc.

Y para que conste y a los efectos oportunos, expido y firmo el presente certificado en Madrid, a 22 de noviembre de 2024

Universidad Internacional Villanueva

Javier Sota Ramos
Secretario General

C/ Costa Brava, 2-6 | 28034 | Madrid | 917340413 | villanueva.edu

7.4. Implementación del modelo en asignaturas de Grado

7.4.1 Asignatura *Desarrollo del Pensamiento lógico matemático y su didáctica* en el Grado de Magisterio de Educación Infantil

Enmarcando una actividad de evaluación continua dentro *del Proyecto de Investigación del FECYT: Universid-ApS . Simbiosis universidad-centros educativos mediante Aprendizaje-Servicio.* Proyectos I+D+I y Ayudas > Proyecto Competitivo ID: FCT-22-17979.

Figura 51

Imagen reseña UDIMA

udima
UNIVERSIDAD A DISTANCIA DE MADRID

La universidad online más cercana

La UDIMA | Grados | Másteres | Doctorados | Títulos Propios | Instituto de Idiomas | Solicita Información

Alumnas de Magisterio de Educación Infantil de la UDIMA participan en el Proyecto del FECYT 'Universid-ApS'

Mar, 18/06/2024

Alba Rodríguez y **Emma Puig**, estudiantes del **Grado de Magisterio de Educación Infantil de la Universidad a Distancia de Madrid, UDIMA**, acompañadas por la profesora **Elena Sánchez**, participaron en el '**Encuentro de Estudiantes del Proyecto Universidad-Aprendizaje Servicio**' (Universid-ApS), el pasado 6 de junio, presentando las propuestas tituladas '**Museo matemático a través del Arte**' y '**Arte y Geometría bidimensional en educación infantil a través del modelo Van Hiele**'.

Redacción UDIMA Media

El proyecto está subvencionado por la **Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT)** y la **UDIMA** ha sido una de las universidades que colaboran junto con la Universidad de Salamanca, de Córdoba, la Autónoma de Madrid, de Valencia y de Castilla-La Mancha, respectivamente.

Universidad-ApS persigue fomentar las disciplinas STEAM generando lazos entre distintas universidades y centros educativos a través de la metodología Aprendizaje-Servicio. Esta metodología se basa en poner en práctica los conocimientos adquiridos en un entorno educativo a la vez que se presta un servicio a la sociedad. En este caso, las alumnas han prestado servicio a una microsociedad educativa: los centros escolares de la etapa de educación infantil.

El encuentro tuvo lugar en la Facultad de Formación del Profesorado y Educación de la Universidad Autónoma de Madrid y se realizó de manera híbrida.

Alba Rodríguez presentó la sesión desarrollada dentro de actividad de la asignatura de Desarrollo del pensamiento lógico matemático 'Museo matemático a través del arte' y llevada a cabo en el **CEIP Ramón Linacero**. Los niños abordaron la geometría de dos y tres dimensiones a través de disciplinas artísticas como la escultura y la pintura.

Por su parte, **Emma Puig** dio a conocer una parte de su **Trabajo de Fin de Grado** titulado 'Arte y Geometría bidimensional en

Nota. reseña Udima https://www.udima.es/innovacion-educativa-alumnas-grado-magisterio-infantil.

7.4.2 Asignatura *Trabajo Fin de Grado (TFG)* en Magisterio de Educación Infantil y Primaria

Dirigiendo diversos Trabajos de Fin de Grado empleando el modelo para el desarrollo de propuestas de innovación de mejora (Tabla 56)

Tabla 56

Dirección de TFG por parte de la investigadora

Curso académico	Nombre estudiante	Título del trabajo	Modalidad de trabajo	Calificación defensa
2024-25 Segundo Semestre	Martha Milena Fernández Pérez	Más allá del libro de texto: propuesta para enseñar geometría en 2º de Primaria a través del modelo Van Hiele	Proyecto de innovación	10
2024-25 Primer Semestre	Alba Ramos Díaz	Enseñando geometría en un aula de 4 años a través del modelo Van Hiele	Propuesta de mejora	8.75
2023-24 Segundo Semestre	Emma Puig Ventura	Arte y Geometría bidimensional en Educación Infantil a través del modelo Van Hiele.	Proyecto de innovación	8.20
	Ana Cristina González Estévez	Museo ArteMático: El modelo Van Hiele como marco para la enseñanza de la geometría bidimensional y tridimensional a través del arte en Educación Infantil	Proyecto de innovación	9.85
	Rebeca Torres Beltrán	Enseñanza de la geometría bidimensional en 5º de Educación Primaria a través del modelo Van Hiele	Proyecto de innovación	10
	Alicia Moreno Miralles	La enseñanza de geometría bidimensional en 4º de Educación Primaria con el modelo Van Hiele.	Proyecto de Innovación	9.52
2023-24 Primer Semestre	Carme Cotaina Montero	Acercamiento del pensamiento geométrico en el primer ciclo de Educación Infantil a través del modelo Van Hiele	Propuesta de mejora	6.10

Nota. Difusión del modelo por medio de la dirección de los TFG en los Grados de Magisterio de Infantil y Primaria.

7.5 Difusión del modelo y de la investigación a través de la Redacción UDIMA Media

Figura 52

Reseña Redacción UDIMA Media

Nota.https://www.udima.es/congreso-educacion-matematicas-%20tic *Un estudio sugiere ampliar la formación de los docentes de educación infantil en activo en el área de la geometría | UDIMA. 28 de jun. de 2024.*

REFERENCIAS

Adelson, J. L., y McCoach, D. B. (2011). *Development and psychometric properties of the Math and Me survey: Measuring third through sixth graders' attitudes toward mathematics*. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development, 44*(4), 225–247.

Alhazmi, A. A., y Kaufmann, A. (2022). *Phenomenological qualitative methods applied to the analysis of cross-cultural experience in novel educational social contexts*. *Frontiers in Psychology, 13*, 785134. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.785134

Aguilar, M. (2004). La hermenéutica y Gadamer. En M. P. Irigoyen (Ed.), *Hermenéutica, analogía y discurso* (pp. 13–24). UNAM.

Afonso Martín, M. C. (2003*). Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele: Un estudio con profesores en ejercicio* [Tesis doctoral, Universidad de La Laguna]. https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/12143

Afonso Martín, M. C. (2004). Sobre los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele y la formación de profesores en activo. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *58*, 3–24. https://mdc.ulpgc.es/files/original/f948dd608159d782831664e597141024c8e48a03.pdf

Afonso Martín, M. C., Camacho, M., y Socas, M. M. (2009). In-service mathematics teacher training from the van Hiele theory perspective. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 13(4), 349-377.

Alsina, Á. (2006a). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Octaedro.

Alsina, Á. (2006b). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos*. Narcea.

Alsina, Á. (2013). Early childhood mathematics education: Research, curriculum, and educational practice. REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education, 2(1), 100–153. https://doi.org/10.17583/redimat.2013.494

Alsina, Á. (2017). *Matemáticas en educación infantil: Propuestas para la formación de maestros*. Graó.

Alsina, Á. (2019). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 100*, 85-108.

Alsina, Á. (2020a). La matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: Crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 23*(2), 373-387.

Alsina, Á. (2020b). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 9*(2), 1-20.

Alsina, Á. (2022a). Los contenidos matemáticos en el currículo de educación infantil: contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Epsilon: Revista de Educación Matemática*, *111*, 67–89.

Alsina, Á. (2022b). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años*). Graó.

Alsina, Á. (2022c). Transformando el currículo español de educación infantil: la presencia de la competencia matemática y los procesos matemáticos. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *111*, 33–48. http://www.sinewton.org/numeros

Alsina, Á. (2025). Panorámica de la investigación en educación matemática infantil en España (2000-2024). *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 14*(1), 1-43. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2025.1-43

Alsina, Á., y Berciano, A. (2018). Developing informal mathematics in early childhood education. *Early Child Development and Care, 190*(13). https://doi.org/10.1080/03004430.2018.1555823

Alsina, Á., Berciano, A., De Castro, C., Edo, M., Giménez, J., Jiménez-Gestal, C., Prat, M., Salgado, M., y Vanegas, Y. (2022). Matemáticas en la educación infantil. En L. J. Blanco Nieto, N. Climent Rodríguez, M. T. González Astudillo, A. Moreno Verdejo, G. Sánchez-Matamoros García, C. de Castro Hernández y C. Jiménez Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática* (pp. 107-147). SEIEM. https://editorial.ugr.es/libro/aportaciones-al-desarrollo-del-curriculo-desde-lainvestigacion-en-educacion-matematica_139289/

Alsina, Á., y Delgado-Rebolledo, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, educación y sociedad*, *5*(1), 18–37. https://journals.uco.es/mes/article/view/14153

Alsina, Á., y León, N. (2016). Acciones matemáticas de 0 a 3 años a partir de instalaciones artísticas. *Educatio Siglo XXI, 34*, 33-62. https://doi.org/10.6018/j/263801

Alsina, Á., y Martínez, M. (2016). La adquisición de conocimientos matemáticos intuitivos e informales en la Escuela Infantil: el papel de los materiales manipulativos. *RELAdEI, Revista Latinoamericana de Educación Infantil, 5*(2), 127-136.

Aiken, L. R., y Dreger, R. M. (1961). *The effect of attitude on performance in mathematics*. *Journal of Educational Psychology, 52*, 19–24.

Aravena Díaz, M., y Caamaño Espinoza, C. (2013). *Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule, Talca, Chile* [Levels of geometric reasoning in students of statal schools of Maule Region, Talca, Chile]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(2), 139–178. https://doi.org/10.12802/relime.13.1621

Área Moreira, M. (2004). *Los medios y las tecnologías en la educación*. Pirámide.

Arteaga Martínez, B., y Arnal-Palacián, M. (2022). Análisis del conocimiento especializado en matemáticas con maestros en formación: una experiencia con la representación de fracciones. *Educatio Siglo XXI, 40* (1), 107-130. https://doi.org/10.6018/educatio.436461

Arteaga Martínez, B., y Macías Sánchez, J. (2016). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil*. Editorial UNIR

Arteaga Martínez, B., Navarro Asencio, E., Fraile Rey, A., y Ramos Alonso, P. (2018). Adaptación de la prueba TIMSS para la evaluación de la competencia matemática en alumnos de magisterio. *Bordón. Revista de Pedagogía, 70* (3), 95-113. https://doi.org/10.13042/Bordon.2018.63042

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas media y universitaria. Características y medición.* Mensajero.

Ayala, R. (2008). La metodología fenomenológica-hermenéutica de M. Van Manen en el campo de la investigación educativa: Posibilidades y primeras experiencias. *Revista de Investigación, 26*(2), 409–430. https://revistas.um.es/rie/article/view/94001

Ball, D. L., y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Ablex.

Ball, D. L., Hill, H. C., y Bass, H. (2005). *Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?* American Educator, 29(1), 14-46.

Ball, D. L., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardera, G. (2000). *La Ciencia Didáctica.* Edelvives.

Baroody, A. J., Clements, D. H., y Sarama, J. (2019). Teaching and learning mathematics in early childhood programs. En C. Brown, M. B. McMullen y N. File (Eds.), *Handbook of early childhood care and education* (pp. 329-353). Wiley-Blackwell.

Barrantes, M., y Blanco, L. (2004). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar*. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 241–250.

Barrantes, M., y Blanco, L. J. (2006). *A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry*. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 411–436. https://doi.org/10.1007/PL00021938

Barrera Mora, F., y Reyes Rodríguez, A. (2015). La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento geométrico. *Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI, 3(5).* https://doi.org/10.29057/icbi.v3i5.554

Berciano, A. (2023). *Formación inicial y permanente del profesorado* [Comunicación]. En *Declaración de posición del grupo IEMI (SEIEM) sobre la educación matemática infantil*. *V Seminario de Investigación en Educación Matemática Infantil*, Madrid, España.

Booth, W., Colomb, G., y Williams, J. M. (2001). *Cómo convertirse en un hábil investigador*. Gedisa.

Bosch, M., y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77–124.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa: Guía práctica*. CEAC.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa (2º ed.).* La Muralla.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa (2.ª ed.).* La Muralla.

Björklund, C., y Barendregt, W. (2016). Teachers' pedagogical mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(3), 359-377. https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1066426

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry (Trad. M. L. Luna; rev. Á. Gutiérrez). En M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and teaching geometry, K–12* (pp. 1–16). National Council of Teachers of Mathematics. https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/BurgerShaughessy86.pdf

Braga, G. (1991). Apuntes para la enseñanza de la geometría. *Signos: Teoría y Práctica de la Educación*, *4*, 52–57. https://portalacademico.cch.unam.mx/revista-signos/docs/numero-4/52-GLORIA-MARIA-BRAGA-Apuntes.pdf

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Catherine, C., y Zanzini, N. B. (2025). *Exploring the teaching of geometric and spatial reasoning in Early Childhood Education in selected primary schools of Shibuyunji District of Zambia*. *Advances in Social Sciences and Management*, 3(3), 8–16.

Canals, M. (1997). Geometría en las primeras edades escolares. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, *25*, 31-44.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Vila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo Yáñez, J., y Muñoz Catalán, M. C. (2018). *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Infantil.* Paraninfo.

Castro, E., y Castro, E. (Eds.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil.* Pirámide.

CEMat. (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria* [Informe]. Comité Español de Matemáticas. https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Comunidad de Madrid. (2022). Decreto 36/2022, de 8 de junio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Infantil. Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 142, 39295-39306.

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Margarit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1989). *Didáctica de la geometría: Modelo Van Hiele.* Servei de Publicacions de la Universitat de València.

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Coffey, A., y Atkinson, P. (2003). *Encontrar sentido a los datos cualitativos.* Universidad de Antioquia.

Chamorro, M. C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación.

Chamorro, M. C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil*. Pearson Educación.

Chavarria-Pallarco, N. A. (2020). Modelo Van Hiele y niveles de razonamiento geométrico de triángulos en estudiantes de Huancavelica. *Investigación Valdizana*, *14*(2), 85–95. https://doi.org/10.33554/riv.14.2.587

Charalambous, C., y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 19–59). Routledge.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.

Clemente, F., y Llinares, S. (2013). *Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en educación primaria*. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 229–236). SEIEM.

Clements, D. H. (2004a). Geometric and spatial thinking in early childhood education. En D. H. Clements, J. Sarama y A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 267-297). Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H. (2004b). Part 1: Major themes and recommendations. En D. H. Clements, J. Sarama y A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7–76). Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H., y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 133-148.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.

Creswell, J. W., y Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (4th ed.). Sage.

Comunidad de Madrid. (2019). La participación en los centros educativos de la Comunidad de Madrid. Consejo Escolar de la Comunidad de Madrid. https://www.madrid.org/bvirtual/BVCM016449.pdf

Cuadros, D. (2009). *Investigación cualitativa en el contexto natural: la observación participante*. UIC.

Crompton, H., y Ferguson, S. (2024). An analysis of the essential understandings in elementary geometry and a comparison to the common core standards with teaching implications. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(2), 258–275. https://doi.org/10.30935/scimath/14361

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. En M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 1-16). National Council of Teachers of Mathematics.

De Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción infantil. *Escuela Abierta, 14*, 47-65.

De Castro, C., Flecha, G., y Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas, 26, 89*-108.

De la Torre, A. (2003). *El método socrático y el modelo Van Hiele*. *Lecturas Matemáticas, 24*, 99–121.

Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S. (Eds.). (2018). *The SAGE handbook of qualitative research* (5th ed.). Sage.

Díaz Salgado, F. D., y Mosquera Albornoz, D. R. (2025). Theoretical trends on Van Hiele theory and the development of geometric thinking: systematic review 2015-2024. *Scientific Journal T&E*, *2*(1), 54–79. https://doi.org/10.48204/3072-9653.7472

Dios Montes, F., y de Villar Álvarez, F. (2004). *Los centros de profesores y recursos: Un estudio etnográfico.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point of view*. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37–52). Kluwer Academic Publishers.

Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 71–84.

Edo, M. (2016). Emergencia de la investigación en educación matemática infantil. Juego y matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P.

Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds*.), Investigación en educación matemática XX* (pp. 53–66). SEIEM.

Escudero, A. M., Muñoz-Catalán, M. C., y Carrillo, J. (2021). Conocimiento especializado de un profesor de educación infantil al enseñar cuerpos geométricos. *Zetetiké, 29*, 1–17. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661819

Escudero Domínguez, A. M. (2024). *Conocimiento especializado de un profesor de educación infantil para la enseñanza de cuerpos geométricos* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. https://ariasmontano.uhu.es/entities/publication/08fd479f-d054-48ce-ae55-7c230358a0ab

Fabres Fernández, R. (2016). *Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos*. *Estudios Pedagógicos, 42*(1), 87–105. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000100006

Fennema, E., y Sherman, J. (1976). *Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales*. *Catalogue of Selected Documents in Psychology, 6*(1), 31.

Fernández Bravo, J. A. (2021). *Enseñar desde el cerebro del que aprende: aprender a escuchar para saber enseñar*. Grupo Mayeutica Conpa SL.

Fernández, T. (2013). *La investigación en visualización y razonamiento espacial: pasado, presente y futuro*. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 19–42). SEIEM.

Flick, U. (2015). *El diseño de la investigación cualitativa*. Morata.

Flores, O. W., y Auzmendi, E. (2015). *Análisis de la estructura factorial de una escala de actitud hacia las matemáticas*. *Aula de Encuentro, 17*(1), 45–77.

Fouz, F. (2006). *Test geométrico aplicando el modelo Van Hiele*. *Sigma: Revista de Matemáticas, 28*(5), 33–58.

Fouz, F., y De Donosti, B. (2005). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría: un paseo por la geometría* [Documento en línea]. http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-0405-fouz.pdf

Fuertes Camacho, M. T. (2011). La observación de las prácticas educativas como elemento de evaluación y de mejora de la calidad en la formación inicial y continua del profesorado. *Revista de Docencia Universitaria, 9*(3), 237-258. http://redaberta.usc.es/redu

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Fuster, D. (2019). Qualitative Research: Hermeneutical Phenomenological Method. *Propósitos y Representaciones, 7*(1), 201-229. https://doi.org/10.20511/pyr2019.v7n1.267

Fuys, D., Geddes, D., y Tischler, R. (1988). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series, 3.* National Council of Teachers of Mathematics. https://doi.org/10.3707/749957

Gálvez Pérez, G., y Block Sevilla, D. (2024). La teoría de las situaciones didácticas: legado fundamental de Guy Brousseau. *Educación Matemática, 36*(1), 258–263.

Gambini, A., y Lénárt, I. (2021). *Basic geometric concepts in the thinking of in-service and pre-service mathematics teachers*. *Education Sciences, 11*(7), Article 350. https://doi.org/10.3390/educsci11070350

García, S., y López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la Práctica Educativa.* INEE.

Gascón, J. (2024). *Contributions of the anthropological theory of the didactic to the epistemological programme of research in mathematics education. ZDM – Mathematics Education*, 56, 1319–1330. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01563-1

Geist, E. (2009). *Children are born mathematicians.* Pearson.

Godino, J. D. (1991). *Concepciones, problemas y paradigmas de investigación en didáctica de las matemáticas*. En *Actas del I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Sociedad Thales.

González, A., y Vilchez, N. (2003). *Enseñanza de la geometría con utilización de recursos multimedia: aplicación a la primera etapa de educación básica* [Trabajo especial de grado]. Universidad Valle del Momboy.

Guba, E. G., y Lincoln, Y. S. (1989). *Fourth generation evaluation*. Sage.

Guerrero, F. J. (2010). *La importancia de la geometría en primaria. Revista Digital Innovaciones y Experiencias Educativas, 36*, 500-510.

Guevara, G., Verdesoto, A., y Castro, N. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas, y de investigación-acción). *Revista científica mundo de la investigación y el conocimiento*, *4*(3), 163-173. https://doi.org/10.26820/recimundo/4.(3).julio.2020.163-173

Guibert, A., Lebeaume, J., y Mousset, R. (1993). *Actividades geométricas para Educación Infantil y Primaria.* Narcea.

Guillén-Soler, G. (2004). El modelo de van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16*(3), 103-125.

Gutiérrez, A. (2012). Investigar es evolucionar: un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 43–59). Graó.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis, 32*, 55–70. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1859

Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237–251. https://doi.org/10.2307/749076

Halat, E. (2008). *In-service middle and high school mathematics teachers: Geometric reasoning stages and gender.* The Mathematics Educator, 18(1), 8–14. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ841566.pdf

Halat, E., y Şahin, O. (2008). Van Hiele levels of pre- and in-service Turkish elementary school teachers and gender-related differences in geometry. *The Mathematics Educator, 11*(1–2), 143–158. http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tmeV11/13%20Article%20by%20Halat%20et%20al.%20doc.pdf

Hernández, J. (1997). *Sobre habilidades en la resolución de problemas verbales aritméticos mediante el uso de sistemas de representación yuxtapuestos* [Tesis doctoral, Universidad de La Laguna].

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372–400.

Imbernón, F. (1998). Calidad de la formación permanente del profesorado en Catalunya. En *La formación del profesorado: evaluación y calidad* (pp. 113-118). Octaedro.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele. La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Universidad de Valencia.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y* *práctica en educación matemática* (pp. 295–384). Alfar. http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1995). Assessment of the van Hiele levels of reasoning in secondary school students. En *Proceedings of the 19th PME Conference* (Vol. 3, pp. 41–48). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (2012). *El modelo de Van Hiele revisado: enseñanza y aprendizaje de la geometría desde la educación infantil hasta la universidad.* En A. Gutiérrez y T. Jaime (Eds.), *Investigaciones en Didáctica de la Matemática: Geometría y Visualización* (pp. 25–46). Universidad de Valencia.

Lauterbach, A. A. (2017). *Hermeneutic phenomenological interviewing: Going beyond semi-structured formats to help participants revisit experience*. The Qualitative Report, 22(11), 2832–2848. https://nsuworks.nova.edu/tqr/vol22/iss11/16/

Lee, J. (2010). *Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics*. *International Journal of Early Childhood, 42*(1), 27–41. https://doi.org/10.1007/s13158-010-0003-9

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, 340, 122868–122953. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2020-17264

López de Silanes, F. J. I. (2012). *Didáctica de las matemáticas: modelo de Van Hiele. Enseñanza de la geometría en España*. Davinci.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Maguiña Rojas, A. T. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele*. Comunicación presentada en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), Montevideo, Uruguay.

Mallart, J. (2001). Didáctica: concepto, objetos y finalidades. En F. Sepúlveda y N. Rajadell (Coords.), *Didáctica general para psicopedagogos* (pp. 23-57). UNED.

Manzanares Moya, A., y Galván-Bovaira, M. J. (2012). La formación permanente del profesorado de educación infantil y primaria a través de los centros de profesores: un modelo de evaluación. *Revista de Educación*, (359), 431–455.

Martínez, M. (2008). *Epistemología y metodología cualitativa en las ciencias sociales.* Trillas.

Martínez, M. (2014). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa* (2.ª ed.). Trillas.

Maturana, H. (1995). *La realidad: ¿objetiva o construida? I. Fundamentos biológicos de la realidad*. Anthropos.

Mwadzaangati, L., y Kazima, M. (2019). An exploration of teaching for understanding the problem for geometric proof development: the case of two secondary school mathematics teachers. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *23*(3), 298–308. https://doi.org/10.1080/18117295.2019.1685221

Méndez, M., Belmonte, J. M., Pizarro, N., y Ramírez, M. (2021). Formación matemática en el grado de maestro de educación infantil: análisis de las guías docentes de las universidades públicas españolas. En A. Vico, L. Vega y O. Buzón (Eds.), *Entornos virtuales para la educación en tiempos de pandemia: perspectivas metodológicas* (pp. 756–780). Dykinson.

Merriam, S. B., y Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4th ed.). Jossey-Bass.

Miles, M. B., Huberman, A. M., y Saldaña, J. (2020). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (4.ª ed.). Sage.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Orden ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil*. *Boletín Oficial del Estado*, 312, 53735–53738. https://www.boe.es/eli/es/o/2007/12/27/eci3854

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2020). *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE)*. *Boletín Oficial del Estado*, 340. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). *Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. Boletín Oficial del Estado, 28*. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2023). *TIMSS 2023: resultados de España en el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias* [Informe]. Instituto Nacional de Evaluación Educativa. https://www.educacionfpydeportes.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss.html

Mondragon Unibertsitatea. (s. f.). *Grado en Educación Infantil: Plan de estudios*. https://www.mondragon.edu/es/grado-educacion-infantil/plan-de-estudios

Montero, I., y León, O. G. (2005). Sistema de clasificación del método en los informes de investigación en Psicología. *International Journal of Clinical and Health Psychology, 5*(1), 115-127.

Moss, J., Bruce, C., Caswell, B., Flynn, T., y Hawes, Z. (2016). *Taking Shape*. Pearson.

Mukuka, A., y Alex, J. K. (2024). Student teachers' knowledge of school-level geometry: Implications for teaching and learning. *European Journal of Educational Research, 13*(3), 1375–1389. https://doi.org/10.12973/eu-jer.13.3.1375

Mullis, I. V., Martín, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y. y Preuschoff, C. (2009). TIMSS 2011 Assessment Frameworks. Boston, M. A.: TIMMS & PIRLS International Study Center.

Muñiz, M. (2010). *Estudios de caso en la investigación cualitativa*. Universidad Autónoma de Nuevo León.

Muñoz-Catalán, M. C., Ramírez García, M., Joglar Prieto, N., y Carrillo Yáez, J. (2022). Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task of additive decomposition. *Journal for the Study of Education and Development, 45*(1), 37–80

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics* [Informe]. National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* [Informe] (Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, Trad.). National Council of Teachers of Mathematics.

National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for mathematics*. http://www.corestandards.org/Math/

Naufal, A. M. (2021). *Reviewing the Van Hiele model and the application of metacognition on geometric thinking: A systematic review*. European Journal of Educational Research, 10(2), 597–609. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1299270.pdf

Ndungo, I., Mutambara, L. H. N., y Chigonga, B. (2025). Towards improved geometry instruction: Learners' experiences with technology-enhanced and conventional Van Hiele phased instruction. *Electronic Journal for Research in Science & Mathematics Education, 29*(2), 33–56.

Nolla, A., Cerisola, A., Fernández, B., y Muñoz, R. (2021). La formación inicial de los maestros en matemáticas y su didáctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *35*(1), 185–207.

Nortes Martínez-Atero, R., López Pina, J. A., Núñez Núñez, R. M., y Nortes Checa, A. (2022). *¿Tienen ansiedad hacia las matemáticas los futuros maestros? PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 16*(3), 191–213. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.20948

OECD. (2018). *PISA 2018 assessment and analytical framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2025). *Panorama de la educación 2025: indicadores de la OCDE*. Publicaciones de la OCDE. https://doi.org/10.1787/1c0d9c79-en

Olmos Martínez, G., y Alsina, Á. (2021). Conocimientos matemáticos del profesorado de la Escuela Infantil (0-3 años): efecto en el diseño de espacios para desarrollar las matemáticas informales. *Magister*, *33*(1), 59–73. https://doi.org/10.17811/msg.33.1.2021.59-73

Ordóñez Martín-Caro, J., Fernández Cézar, R., y Gómez Cantarino, S. (2022). La enseñanza de las matemáticas en las aulas de educación infantil: percepciones de los futuros maestros a través del prácticum. En A. Pérez-Ferra y M. Quijano-López (Eds.), *Investigación e innovación educativa frente a los retos para el desarrollo sostenible* (Vol. 16, pp. 198–212). Dykinson.

Ortega-Rodríguez, P. J. (2025). *PISA 2022: Predictores de la competencia matemática de los estudiantes españoles de educación secundaria*. *Revista de Psicodidáctica, 30*(1), Article 500152. https://doi.org/10.1016/j.psicod.2024.500152

Ozkan, M., y Bal, A. P. (2017). Analysis of the misconceptions of 7th grade students on polygons and specific quadrilaterals. *Eurasian Journal of Educational Research, 67*, 161–182.

Patkin, D., y Barkai, R. (2014). *Geometric thinking levels of pre- and in-service mathematics teachers at various stages of their education*. *Educational Research Journal, 29*(1 & 2), 1–26. https://doi.org/10.3316/informit.901342534813113

Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M., y Montes, M. Á. (2025). Una mirada al conocimiento del educador de docentes de matemáticas: un estudio de caso. *Enseñanza de las Ciencias, 43*(1),23-40. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6065

Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación Cualitativa. Retos e Interrogantes.I. Técnicas y Análisis de Datos.* La Muralla.

Piaget, J., y Inhelder, B. (1948). *La représentation de l' espace chez l'enfant.* Presses Universitaires de France PUF.

Piaget, J., y Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. Routledge.

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero. Boletín Oficial del Estado, 28, 14561–14595. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2022-1654

Roa González, J. (2019). *Respuesta a las restricciones transpositivas de la sociedad de la información en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria* [Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid].

Roa-González, J., y Hidalgo-Herrero, M. (2020). *Alternativa a la enseñanza monumentalista: los REI cooperativos*. *Educación Matemática en Pesquisa*, *22*(4), 531–545. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p531-545

Roa González, J., y Núñez Fernández, V. (2025). Evaluación del estado de ánimo de los equipos docentes: un estudio de la situación del sistema educativo español. *Tecnología, Ciencia y Educación*, *30*, 7–36. https://doi.org/10.51302/tce.2025.22235

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Aljibe.

Rodríguez Rincón, Y., Magreñán Ruiz, Á. A., y Orcos Palma, L. (2024). *Diagnosticando mediante la teoría de Van Hiele para garantizar educación de calidad* [Diagnostic assessments using Van Hiele's theory to ensure quality education]. *Cuestiones Pedagógicas: Revista de Ciencias de la Educación, 33*(2), 93–114. https://doi.org/10.12795/CP.2024.i33.v2.05

Rojas Álvarez, C. (2005). Mentefactos y niveles de razonamiento geométrico, según Van Hiele, en alumnas de licenciatura de Pedagogía Infantil. *Zona Próxima: Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación*, 6, 82-93.

Rojas, F., y Deulofeu, J. (2015). *El formador de professors de matemàtica: una anàlisi de les percepcions de les seves pràctiques instruccionals des de la "tensió" estudiant-formador*. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 33*(1), 47–61. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/288571

Ruedas, M. M. J., Ríos Cabrera, M. M., y Nieves Sequera, F. E. (2009). Epistemología de la investigación cualitativa. *Educere, 13*(46), 627-635.

Rubio Valenzuela, J. E. (2020). *Enseñanza a partir de la teoría de Van Hiele y el modelo VAK como base de la geometría.* Editorial Académica Española.

Ruiz, M., y Arteaga, B. P. (2022). El pensamiento geométrico-espacial y computacional en educación infantil: un estudio de caso con KUBO. *Contextos educativos: revista de educación, 30,* 41-60. https://doi.org/10.18172/con.5372

Ruiz-López, N., y Bosch-Betancor, J. (2007). *La educación matemática en España*. *Praxis Educativa*, 2(2), 151–160.

Saldaña, J. (2016). *The coding manual for qualitative researchers* (3rd ed.). Sage.

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones*. McGraw-Hill.

Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A., y Roa González, J. (2024a). Modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría: análisis de la producción científica española. *European Public & Social Innovation Review*, 9, 1–16. https://doi.org/10.31637/epsir-2024-1365

Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A., y Roa González, J. (2024b). *La formación de maestros en activo de educación infantil: análisis y propuesta de mejora basada en el modelo Van Hiele para el desarrollo del pensamiento geométrico* [Ponencia]. *VI Jornadas de Innovación Universitaria InnovaUDIMA con Tecnología Educativa*, (pp. 59–65). https://landing.udima.es/wp-content/uploads/2024/11/jornadas-JIUTE-2024.pdf

Sánchez González, E., Sánchez Sánchez, A., y Roa González, J. (2025). La formación de maestros en activo de educación infantil: análisis y percepción del desarrollo del pensamiento geométrico. En M. Torrado Fonseca (Coord.), *Investigación educativa e innovación ante los retos de la sostenibilidad: libro de actas del XXI Congreso Internacional de Investigación Educativa y IV Encuentro de Doctorandos/as e Investigadores/as Noveles de AIDIPE* (pp. 457–461). Asociación Interuniversitaria de Investigación Pedagógica (AIDIPE). https://hdl.handle.net/2445/218438

Senk, S. L., Thompson, D. R., Chen, Y.-H., Voogt, K., y Usiskin, Z. (2022). *The Van Hiele geometry test: History, use, and suggestions for revisions*. University of Chicago School Mathematics Project. https://ucsmp.uchicago.edu/resources/van-hiele/

Segarra-Escandón, J., y Julià, C. (2020). *Comparación sobre la actitud hacia las matemáticas en estudiantes de 5.º de educación primaria, 2.º de ESO y 3.º del grado de maestro*. *Edetania: Estudios y Propuestas Socioeducativas, 58*, 79–104. https://doi.org/10.46583/edetania_2020.58.688

Sert Çelik, H., y Kaleli Yılmaz, G. (2025). Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri üzerine farklı ülkelerde yayınlanmış çalışmaların incelenmesi. *Kocaeli Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *8*(1), 1–26. https://doi.org/10.33400/kuje.1507429

Shavelson, R., y Stern, P. (1981). *Research on teachers' pedagogical thoughts, judgments, decisions, and behavior. Review of Educational Research, 51*(4), 455-498.

Shavelson, R., y Stern, P. (1983). *Investigación sobre el pensamiento pedagógico del profesor, sus juicios, decisiones y conducta*. En J. Gimeno Sacristán y A. Pérez Gómez (Comps.), *La enseñanza: su teoría y su práctica* (pp. 372-419). Akal.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Simasiku, F. S., y Rabaza, M. (2026). Enhancing teachers' geometric thinking through Van Hiele theory-based workshops: A reflective study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. https://doi.org/10.29333/ejmste/17796

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudios de casos*. Morata.

Strauss, A., y Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2.ª ed.). Sage.

Sulistiowati, D. L., Herman, T., y Jupri, A. (2019). Student difficulties in solving geometry problem based on Van Hiele thinking level. *Journal of Physics: Conference Series*, *1157*, 042118.

Süzen, C., y Kula Ünver, S. (2025). The relationship between geometry achievement and Van Hiele levels of geometric thinking. *Journal of Pedagogical Sociology and Psychology, 7*(4), 174–187. https://doi.org/10.33902/jpsp.202537039

Tapia, M., y Marsh, G. E. (2004). *An instrument to measure mathematics attitudes. Academic Exchange Quarterly, 8*(2), 16–21. http://www.rapidintellect.com/AEQweb/cho25344l.htm

Taşkın, R. B., y Sezer, T. (2022). *Pre-school teachers' attitudes towards mathematical pedagogical content knowledge, mathematics, and mathematics teaching*. *International Journal of Psychology and Educational Studies, 9*(4), 1286–1306. https://doi.org/10.52380/ijpes.2022.9.4.906

Trimurtini, Waluya, S. B., Sukestiyarno, Y. L., y Kharisudin, I. (2022). A systematic review on geometric thinking: A review research between 2017–2021. *European Journal of Educational Research*, 11(3), 1535–1552. https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.3.1535

Ugas, F. (2006). *La complejidad: un modo de pensar*. Taller permanente de estudio epistemológicos en Ciencias Sociales.

Ursini, S., y Sánchez Ruiz, J. G. (2019). *Actitudes hacia las matemáticas: qué son, cómo se miden, cómo se evalúan, cómo se modifican*. UNAM.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project).* University of Chicago, Department of Education.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* [Tesis doctoral, Universidad de Utrecht]. (Trabajo original publicado en neerlandés; traducción al español, 1990).

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of secondary school* [Tesis doctoral]. J. B. Wolters.

Van Hiele, P. M., y Van Hiele, D. (1958). *A method of initiation into geometry at secondary schools. En H. Freudenthal (Ed.), Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67-80). J. B. Wolters

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.

Van Hiele, P. M. (1999). *Developing geometric thinking through activities that begin with play*. Teaching Children Mathematics, 5(6), 310–316.

Van Manen, M. (1998). *El tacto en la enseñanza: El significado de la sensibilidad pedagógica*. Paidós.

Van Manen, M. (2003). *Investigación educativa y experiencia vivida: Ciencia humana para una pedagogía de la acción y de la sensibilidad*. Idea Books.

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). *El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría*. *Uniciencia, 27*(1), 74–94.

Varol, F., Farran, D. C., Bilbrey, C., Vorhaus, E. A., y Hofer, K. G. (2012). Improving mathematics instruction for early childhood teachers: Professional development components that work. *NHSA Dialog, 15*(1), 24–40. https://doi.org/10.1080/15240754.2011.636488

Vélez, O., y Galeano, E. (2002). *Investigación cualitativa: Estado del arte*. Universidad de Antioquia.

Vilchez González, N. M. (2004). *Enseñanza de la geometría con utilización de recursos multimedia: aplicación a la primera etapa de educación básica* [Tesis doctoral, Universitat Rovira i Virgili]. http://www.tdx.cat/TDX-0619107-141631

Villani, V. (2001). Perspectivas para la Enseñanza de la Geometría para el siglo XXI. *Commission on Mathematics Instruction.*

Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., y Sarama, J. (2018). What is the long-run impact of learning mathematics during preschool? *Child Development, 89*(2), 539-555. https://doi.org/10.1111/cdev.12713

Zambrano, M. A. (2006). El razonamiento geométrico y la teoría de van Hiele. *Kaleidoscopio, 3*(5), 28-33.

Zhang, J., Ye, Z., Chen, S., y Sun, Q. (2025). *Association between school climate, teachers' self-efficacy, instructional practice, and perceived needs in professional development: A structural equation analysis using Shanghai TALIS 2018 data.* Large-scale Assessments in Education, 13, Article 33. https://doi.org/10.1186/s40536-025-00268-5Miles

ANEXOS

Anexo I: Instrumentos de recogida de información.

Formulario inicial

https://docs.google.com/forms/d/1_cvuvP9r2OXOWPydbrFV2sQtkVsvNXWh4tFFfp11XMM/edit?usp=drive_web

Figura 53

Imagen del Cuestionario inicial

Escala de Actitudes hacia las Matemáticas- EAM

https://docs.google.com/forms/d/1ojAasG69RUCnWKIIUN0tHZz593SXGaf990S4cmQw4ns/edit

Figura 54

Imagen de la Escala de Actitudes hacia las Matemáticas- EAM

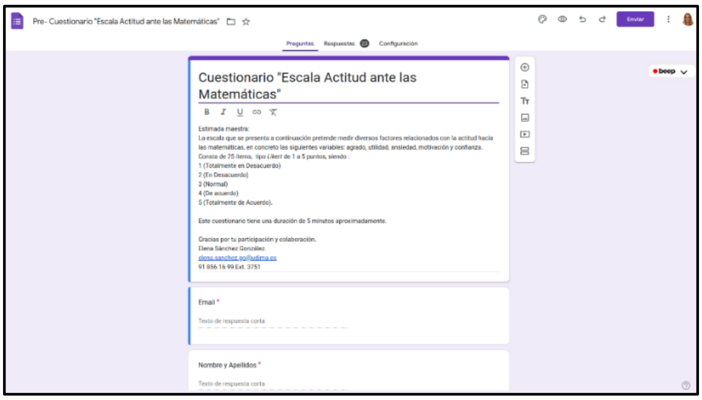


Tabla 57

Factores e ítems escala "Actitud hacia las matemáticas-EAM"

Factor	Ítems cuestionario Auzmendi (1992)
Utilidad	1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.
Ansiedad	2. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.
Ansiedad	3. Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto.
Agrado	4. Utilizar las matemáticas es una diversión.
Motivación	5. Las matemáticas son demasiado teóricas para que puedan servirme de algo.
Utilidad	6. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas.
Ansiedad	7. Las matemáticas es una de las asignaturas que más temo.
Ansiedad	8. Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.
Agrado	9. Me divierte el hablar con otros de matemáticas.
Motivación	10. Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de "ciencias", pero no para el resto de estudiantes.
Confianza	11. Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo.
Ansiedad	12. Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siento incapaz de pensar con claridad.
Ansiedad	13. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.
Agrado	14. Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí.
Utilidad	15. Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional.
Utilidad:	16. Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión.
Ansiedad	17. Trabajar con las matemáticas hace que me sienta nervioso/a.
Ansiedad	18. No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas.
Utilidad	19. Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas.
Confianza	20. Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas.

Utilidad	21. Para mi futuro profesional las matemáticas son una de las asignaturas-materias más importante que tengo que estudiar.
Ansiedad	22. Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a.
Confianza	23. Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.
Agrado	24. Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.
Motivación	25. La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante.

Cuaderno de Bitácora

1. ¿Para qué te han servido los talleres de hoy?

2. ¿Ves factible estas actividades para Infantil / Primaria? ¿Sabrías cómo ajustarlo a distintos niveles?

3. ¿Cómo te has sentido?

5. ¿Qué actividad te ha gustado más? ¿Y menos?

Tabla 58

Descriptores del modelo Van Hiele

Nivel Van Hiele	Visual	Verbal	Dibujar	Lógica	Modelar
N1: Reconocimiento	Reconocer diferentes figuras por el dibujo. Reconocer información contenida en una figura.	Asociar el nombre correcto con una figura dada. Interpretar frases que describen las figuras.	Hacer dibujos de figuras, nombrando adecuadamente las partes.	Darse cuenta de que hay diferencias y similitudes entre figuras. Comprender la invarianza de las figuras en distintas posiciones.	Identificar formas geométricas en objetos físicos.
N2: Análisis	Enumerar las propiedades de una figura. Identificar una figura como parte de otra mayor.	Describir adecuadamente varias propiedades de una figura.	Traducir información verbal dada en un dibujo. Utilizar propiedades dadas para construirla.	Comprender que las figuras pueden clasificarse en distintos tipos. Entender que las propiedades sirven para distinguir figuras.	Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos. Representar fenómenos en un modelo.
N3: Deducción informal	Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras. Reconocer propiedades comunes.	Definir con palabras adecuadas y correctas. Formular frases que muestren relaciones entre figuras.	Dar cierta figura construyendo otras relaciones con la misma.	Comprender las cualidades de una deducción matemática. Usar las propiedades para determinar si una figura está contenida en otra.	Comprender el concepto de un modelo matemático representado en objetos.
N4: Deducción formal	Utilizar información de otra figura para deducir más información.	Comprender distinciones entre definiciones, postulados y teoremas. Identificar información que se debe hallar en un problema.	Reconocer cómo y cuándo usar elementos en una figura. Deducir qué información dada permite dibujar una figura específica.	Utilizar reglas de la lógica para desarrollar demostraciones. Deducir consecuencias de información dada.	Poder deducir propiedades de objetos a partir de información dada. Resolver problemas relacionados con objetos.
N5: Rigor	Reconocer supuestos injustificados al usar figuras. Concebir figuras relacionadas en varios sistemas deductivos.	Formular extensiones de resultados conocidos. Describir sistemas deductivos.	Comprender limitaciones y capacidades en representaciones gráficas. Representar conceptos no estandarizados.	Comprender limitaciones de supuestos y postulados. Saber cuándo un modelo depende de axiomas distintos.	Usar modelos matemáticos para representar sistemas abstractos y fenómenos físicos, sociales o naturales.

Nota. Extraído de López de Silanes, 2012.

Anexo II. Transcripción de las sesiones.

A continuación, en la Tabla 59 se presenta el cronograma general de la formación, proporcionando una visión global de la secuencia de actividades y sesiones programadas. Posteriormente se detallará cada sesión de manera exhaustiva, incluyendo las transcripciones y el desarrollo completo de las interacciones, reflexiones y actividades llevadas a cabo con las maestras participantes.

Tabla 59

Cronograma de las actividades llevadas a cabo en cada una de las sesiones correspondientes a las Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele

Dimensión geométrica	Fase de Aprendizaje	Sesiones 1 y 2 31/01/24	Sesiones 3 y 4 28/02/24	Sesiones 5 y 6 06/03/2024	Sesiones 7 y 8 24/04/2024
		Test razonamiento geométrico Pretest			
	1. Información	1			
	2. Orientación dirigida	2			
Geometría unidimensional	3.Explicitación	5	3, 4		
	4.Orientación libre		6,7		
	5.Integración				8,18
	1. Información		9		
	2. Orientación dirigida		10,14		12
Geometría bidimensional	3.Explicitación		25	11,13	15
	4.Orientación libre			16,17,24,26	27,28,29
	5.Integración				8, 18, 30
	1. Información			19	
	2. Orientación dirigida			20	
Geometría tridimensional	3.Explicitación			21	22, 23
	4.Orientación libre				8, 18, 30
	5.Integración				8,18

Sesión 1 y sesión 2

Antes de dar comienzo las sesiones, la investigadora creó un grupo de WhatsApp con todas las maestras participantes con el propósito de establecer un canal de comunicación ágil y cercano para facilitar el contacto en caso de ser necesario. Esta iniciativa fue informada previamente en la reunión introductoria, en la que se explicó el tipo de investigación que se desarrollaría en el centro. Una semana antes del inicio de los talleres, la investigadora compartió un video a través de un enlace privado de su canal de YouTube. Este material, previamente grabado con el apoyo del servicio de audiovisuales de la universidad, tenía como objetivo ofrecer una introducción sobre la naturaleza de la geometría y los fundamentos de la teoría del modelo Van Hiele, proporcionando así un primer acercamiento teórico a las maestras antes del trabajo práctico en las sesiones.

Figura 55

Imagen del grupo creado en la aplicación WhatsApp.

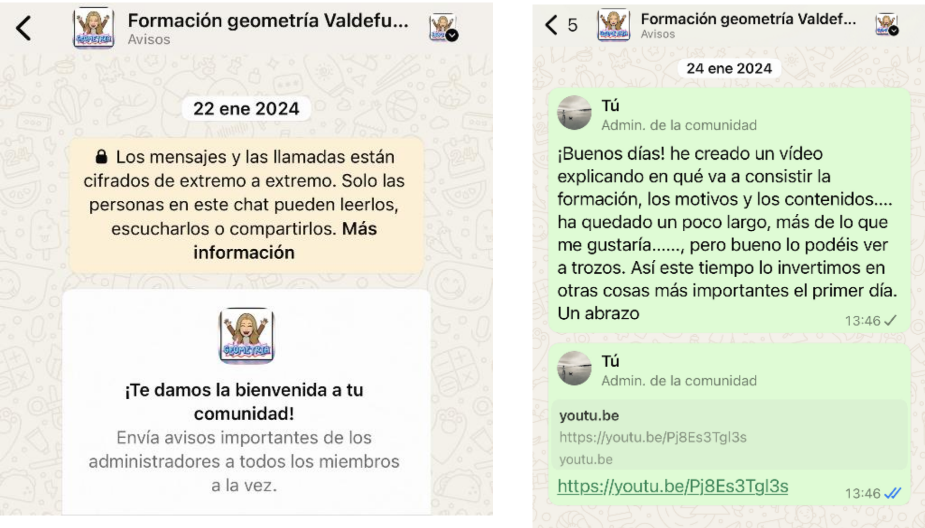


Figura 56

Captura de imagen del video utilizado

A continuación, se presenta cada sesión de manera exhaustiva incluyendo las transcripciones y el desarrollo completo de las interacciones, reflexiones y actividades llevadas a cabo con las maestras participantes

Sesiones 1 y 2: 31/01/24

Para alcanzar estos objetivos, la sesión se estructuró en 4 partes:

1. Presentación y bienvenida.
2. Realización de los cuestionarios geométricos correspondientes al *Pretest de la investigación*: Test de Usiskin y Test de Jaime.
3. Puesta en marcha de las actividades planificadas relacionadas con la geometría unidimensional.
4. Cierre de la sesión.

1.Presentación y bienvenida

Al inicio de la sesión, una vez reunidas todas las maestras en el aula, la investigadora en primer lugar les agradece su participación voluntaria en la formación. A continuación, hace un breve recordatorio sobre los objetivos de la investigación y les recuerda que todas las sesiones quedarán grabadas para su posterior análisis. En relación a los cuestionarios, se enfatiza que estos instrumentos están diseñados para evaluar conocimientos desde niveles básicos hasta un alto rigor científico, por lo que no deben preocuparse por su desempeño ni tratar de responder más allá de lo que realmente conocen. Procede a repartir los cuestionarios, primero el de Usiskin y una vez van terminando, el de Jaime (Usiskin, 1982; Jaime y Gutiérrez, 1990).

Figura 57

Investigadora dando la bienvenida a las maestras participantes

2.Realización de los cuestionarios geométricos correspondientes *al Pretest de la investigación*: Test de Usiskin y Test de Jaime (Usiskin, 1982; Jaime y Gutiérrez, 1990).

Como las maestras se encuentran sentadas en las propias mesas del aulario, la investigadora comienza a repartir en primer lugar el *Test de Usiskin.*

Cuando empiezan a leer las preguntas y mientras las maestras realizaban el primer cuestionario de evaluación diagnóstica, comenzaron a manifestar su sorpresa ante la dificultad de los ítems, mostrando gestos de sorpresa, gesticulando caras de desconcierto. Se producen risas ante las preguntas, mientras entre ellas comentan que no saben cómo responder a algunas preguntas. La investigadora les recuerda que no deben preocuparse por la calidad de sus respuestas. Esta fase reveló un sentimiento generalizado de desorientación y frustración, manifestado tanto verbal como gestualmente por las participantes.

-M18:" *…Pero si yo voy por la 3 aún, esto es muy complicado…"*

-M3:" *…Ostras menudo examen" a pillar" …"*

-M10:" *… ¡Totalmente tía, son super difíciles! …"*

Se mostraban desconcertadas y expresaban dudas sobre su desempeño, lo que generó un ambiente de incertidumbre y cierta inquietud en el grupo. Conforme van finalizando, se les entrega el Test de Jaime para completar la evaluación diagnóstica. Pusieron de relieve no solo la percepción de dificultad, sino también el uso de un lenguaje coloquial, reflejo del nivel de razonamiento geométrico inicial (nivel 1 de Van Hiele), centrado en la forma visual sin análisis de propiedades.

-M23:" *…Menudo chute cerebral si…"*

-M19:" *…Yo tengo ya el cerebro para irme a mi casa…"*

-M18:" *…Madre mía nos has matado después de todo el día estos exámenes…"*

-M20:*" … ¿te imaginas que alguien lo aprueba? Flipas…"*

La investigadora le responde que sobre todo el test da valor al lenguaje que se emplea para responder mientras las maestras hacían uso de expresiones informales como:

-M22:" *…Pues mi lenguaje es como el de mis niños…"*

-M15*:" …Esto lo estamos viendo en Primaria y yo dudo…madre mía…" (risas)*

-M2:" *…Calla, Calla…"*

-M22 refiriéndose a la investigadora*:" …Esto e imposible tía peor si no entiendo ni el enunciado…"*

Varias maestras a la vez:" *…M22 no ere la única tranquila. No estás sola (risas)*

-M22:" *…Elena esto se hace a las 9 de la mañana cuando mi cerebro está fresco…y ni, aun así, esto es a traición…"*

-M19*:" … A ver, dónde no hay, no hay…"*

-I:*" …A ver no os preocupéis que vamos a recordar todos los aspectos más básicos desde el inicio con las actividades que tengo planificadas, de verdad, tranquilas.*

-M16:" *…Claro si yo sé que todo esto lo he dado, pero no lo recuerdo, pero me suena…"*

-M18:" *…Mi cabeza es incompatible con esto, de verdad…"*

-M20:" *… ¿pero y esto lo tenemos que hacer otra vez luego cuando acabemos la formación?*

-M21:*" …Yo ese día no vengo…" (Risas)*

La investigadora les da el aviso de acabar

- M18:" … *¡Pero si a mí me queda un montón, pero es que no sé! …"*

-Carolina:" … *¡Una retirada a tiempo… es mejor! …"*

-I:*" …no te preocupes que ya verás que vamos a ir recordando un montón de contenido en las sesiones…"*

Este clima de desasosiego afectó la disposición para llevar a cabo las actividades previstas posteriormente, ya que la percepción de dificultad y el tiempo prolongado (más de la mitad de la sesión) dedicado a la resolución de ambos cuestionarios redujeron la motivación y la concentración necesarias para abordar el taller de geometría bidimensional. Ante la inquietud y el desconcierto manifestado por las maestras durante la realización de los cuestionarios, la distancia entre el conocimiento geométrico esperado y el dominio real del contenido, (resalta una de las barreras principales para la enseñanza efectiva de la geometría: la inseguridad conceptual del profesorado), la investigadora decidió otorgarles un descanso de 10 minutos para que pudieran desconectar brevemente.

Tras la pausa, y con el objetivo de restablecer un ambiente propicio para el aprendizaje, retomó la sesión anunciando que, a partir de ese momento, todas las actividades serían de carácter práctico y progresivo. De este modo, buscó reducir la ansiedad generada por la evaluación inicial y fomentar un ambiente más distendido y motivador para el aprendizaje. Esta aclaración ayudó a restablecer la confianza del grupo y a predisponerlas de manera más positiva hacia el desarrollo de los talleres previstos. *(aplauden)*

En ese momento se enmarca en la fase de información del modelo Van Hiele, en la que se pretende familiarizar a las maestras con los objetos geométricos mediante situaciones próximas a su experiencia. La conversación permitió comenzar a desmontar ideas erróneas de forma natural, propiciando un aprendizaje situado. Les explica que empezarán desde lo más básico de la geometría unidimensional partiendo de una pregunta:

-I:" … *¿sabéis lo qué es? …"*

-M23:" … *a claro si, los cuadrados, círculos en un plano…"*

-M16:*" …Pero son las figuras planas…"*

-M23:" *…Uy, pues empezamos bien…" (risas)*

-I:" *…No, esa es la geometría con dos planos…"*

-M20:" … *Son las rectas…"*

-I:" … *Eso es, la unidimensional son las líneas que lo veremos hoy...y el elemento más sencillo que es el punto…"*

-M2*:" … ¿Tenemos que coger apuntes o nos lo pasas? …"*

La investigadora confirma que les enviará la información.

3. Puesta en marcha de las actividades planificadas.

con la geometría unidimensional y les explica que la cuya última actividad es un Bingo con premio: chuches, *(las maestras aplauden)* generando así buenas expectativas de participación.

La primera actividad corresponde a la primera Fase de Aprendizaje del modelo Van Hiele cuyo propósito es explorar y diagnosticar el nivel de conocimiento geométrico de las maestras participantes. La investigadora muestra en la Pizarra Digital Interactiva (PDI), les proporcionó una hoja de trabajo que debían completar de forma individual, aunque les permitió hablar entre ellas con el objetivo de fomentar el diálogo y el intercambio de ideas, y favorecer, por tanto, una reflexión conjunta sobre los primeros conceptos a abordar.

> -I:" *... Las de Primaria, como lo tendréis algo más fresco, dejad al resto que hablen…"*
>
> -M19:" *…No no, que hablen que así no quedaos mal…"*
>
> -M11:" *…Bueno, A ver las listas si realmente saben responder …"* (risas).
>
> -M22:" *...Ahora e cuando nos hace preguntas tipo dime el resultado de 449 x 567…"* (risas).
>
> -I:" *... No, porque solo vamos a ver geometría…"*

Actividad 1: Recordando los tipos de líneas

La investigadora sitúa a todas las maestras en pequeños grupos, y facilita a cada una, una plantilla y les explica las instrucciones de la actividad. Las maestras observan imágenes de distintos tipos de líneas (recta, semirrecta, curva, poligonal abierta, poligonal cerrada). Debajo, una tabla vacía con esos nombres. Deben definirlas con sus palabras.

El recurso se encuentra en el Anexo III.

> -I: *"En la primera parte hay diversos tipos de líneas con una letra asignada y en la segunda parte aparecen los nombres de las líneas. Debéis completar la tabla señalando dónde iría cada línea de acuerdo con el nombre y escribir una definición que la defina, con vuestras palabras".*

Para completarlo, las maestras van dialogando entre esos grupos formados y van detectando y completando esas propiedades en su plantilla.

Hay que señalar que, al grabar todo el aulario, la recogida de información se vuelve algo complicada y no se perciben los diálogos al estar todas las maestras comentando entre los grupos de las mesas a la vez, por lo que la investigadora decide ir grabando con su móvil los diálogos de las distintas mesas. A continuación, se muestran algunas frases detectadas en esa grabación:

> -M11:" … *El segmento es un trozo de línea…"* (por tanto, detecta que es una línea con un principio y un fin).
>
> -M23:" … *la línea cortada es una semirrecta…"*
>
> -M20:" … *Número infinito de puntos…de la línea recta…"*

M5 y su equipo pregunta si varias imágenes pueden estar en la misma casilla, la investigadora confirma.

M3 pregunta si todas tiene casilla o hay alguna con trampa. La investigadora confirma que todas tienen casilla.

Otro grupo va dialogando lo siguiente:

> -M6:" … *Esta es una línea recta porque no tiene curvas, va derechita de un lado a otro. Como una regla…".*
>
> -M17:" … *Sí, y esta otra —la curva— se parece a un camino que serpentea. No tiene esquinas así que es la poligonal…"*

-M10:" … *Yo creo que la línea recta se puede extender en ambas direcciones sin fin, por eso no tiene principio ni final visibles…".*

-M21:" … *Ah, yo había pensado que la recta es solo lo que se ve en el dibujo, como un segmento…".*

-M14:" … *La diferencia entre una línea y una semirrecta está en los extremos: la semirrecta tiene un punto de inicio, pero sigue infinitamente en una dirección.*

-M5:" … *La línea poligonal cerrada parece una figura, como una casa o una estrella. Porque se cierra…".*

-M8:" … *Es que justo por eso se llama "cerrada", porque los segmentos que la forman se conectan y no hay inicio ni final visibles. Mientras que en la poligonal abierta, los segmentos no se conectan al final…".*

-M2:" … *sí una línea tiene piquitos, es una línea poligonal, ¿no? No es lisa como la curva…".*

- M18:" … *Esta línea me parece curva porque no tiene ángulos…".*

- M3:" … *línea poligonal abierta es como un zigzag que no se cierra, como los rayos de una tormenta…".*

-M4:" … *A mí me parece que lo que diferencia una línea curva de una poligonal es que la curva no tiene vértices ni segmentos rectos. En cambio, la poligonal está formada por segmentos rectos unidos…".*

-M22:" … *Exacto. Y si esos segmentos forman un camino continuo sin volver al punto inicial, es poligonal abierta. Si se cierra sobre sí misma, es una poligonal cerrada…".*

-M13:" … *Entonces, ¿una semirrecta se reconoce porque tiene un puntito al inicio y sigue? Yo siempre decía que era "media línea", pero ahora entiendo que no se corta al final……"*

-M18:" … ¡Ah! Entonces no es que tenga "media línea", sino que tiene un punto de origen y sigue para siempre*…"*

-M3:" … *Yo antes pensaba que la línea recta y la semirrecta eran lo mismo, pero ahora veo que no es solo cómo se ven, sino cómo están definidas…".*

Mientras van finalizando, la investigadora les indica que en la siguiente actividad tendrán la solución que les ayudará a recordar definiciones y características de las líneas.

-M19:" ... *¿nos lo puedes ir dando? …"*

-I:" ... *Negativo, esta actividad sirve para saber desde qué recordáis o el lenguaje que usáis…"*

-M16:" ... *Pues menuda vergüenza, menos mal que solo lo corriges tu…".*

-M11:" ... *Si, pero para su tesis…"*

-I:" ... *Tranquilas, no aparecen vuestros nombres…"*

-M23:" ... *Menos mal…"*

En esta primera actividad, y después del esfuerzo requerido por los cuestionarios, las maestras tardaron más tiempo del previsto en completarla, posiblemente por la realización de la actividad en pequeños grupos, que invita a hablar entre ellas, pero de aspectos ajenos a la actividad. La investigadora, al notar esta demora, les indicó que tenían cinco minutos adicionales para finalizar. Mientras observaba el desarrollo de la actividad, la investigadora comenzó a reflexionar sobre la estructura y el ritmo de la sesión. Detectó que el formato planificado no se ajustaba al tiempo estimado real, lo que dificultó la ejecución de todas las dinámicas previstas. Ante esta situación, empezó a replantear la organización de las próximas sesiones, buscando estrategias más eficientes para equilibrar el tiempo de trabajo sin comprometer la calidad del aprendizaje.

Además, en la visualización de la grabación, se detecta la problemática de la falta de sonido para el análisis tal y como pensaba en la sesión por la disposición de la cámara y las maestras, confirmando la modificación tanto de la disposición de la cámara de grabación cómo el formato de las actividades. El aspecto positivo de esta dificultad, que se demoró en todo lo planteado, es que apenas realizaron actividades, las cuales se harán en la siguiente sesión, modificando la dinámica.

Actividad 2: Definiendo los tipos de líneas

Para la siguiente actividad, la investigadora recogió los materiales anteriores y repartió una nueva plantilla con varías actividades a cada maestra, en la primera aparece una tabla compuesta por varias columnas. El objetivo es identificar y relacionar la definición, el símbolo y el nombre de distintos elementos geométricos.

Sin embargo, al notar que las maestras estaban algo dispersas y que comentaban entre ellas sin centrarse en la tarea, la investigadora decidió modificar la dinámica. En lugar de que cada una trabajara de manera individual, optó por guiar la actividad de forma colectiva. Fue ella quien leyó en voz alta cada definición, mientras las maestras iban identificando y uniendo los elementos correspondientes en su hoja de trabajo. Esta estrategia permitió focalizar la atención del grupo y agilizar la actividad. Una vez completada la tarea, todas aplaudieron, mostrando satisfacción por haberla finalizado con éxito.

En esta actividad dado el carácter guiado, apenas se produje diálogo entre las participantes por lo que no se produjo ningún tipo de dudas. Aprovechando este momento, la investigadora realizó una breve reflexión introductoria sobre la importancia de dar significado a estos conceptos básicos. Explicó que las líneas y sus clasificaciones están presentes en el entorno cotidiano y constituyen un pilar fundamental para la construcción y comprensión de las figuras geométricas. A continuación, presentó tres imágenes de contextos reales para favorecer el reconocimiento visual hacia el análisis estructural y la aplicación del vocabulario geométrico en situaciones auténticas. Y decidió llevar a cabo la siguiente actividad de manera colectiva. Proyectó las imágenes en la Pizarra Digital Interactiva (PDI) para que las maestras pudieran analizarlas juntas e identificar los tipos de líneas representados. Esta estrategia buscaba favorecer la participación y consolidar los conceptos trabajados de manera visual y contextualizada.

-I:" … *En estas imágenes de entornos reales ¿qué líneas de las que se han recordado encontráis? …"*

-M8:" … *En la cancha de baloncesto veo muchas líneas rectas. Como las que marcan los lados y el centro. Todas van derechas…"*

-M7:" … *Sí, pero mira las líneas que marcan la zona de tiro libre, son como curvas. Aunque están bien hechas, no tienen esquinas…"*

-M17:" … *Y las líneas de los dos laterales son paralelas, porque siempre están a la misma distancia una de otra, no se cruzan…"*

-M6:" … ¿Eso es lo que hace que sean paralelas? Yo pensaba que eran porque iban como "juntas" *…"*.

-M14:" … *Claro, M6. Las paralelas son dos líneas que nunca se cruzan y mantienen siempre la misma distancia…"*

-M22:" … *En la foto de las carreteras veo curvas por todas partes, no hay muchas líneas rectas…"*

-M16:" … *Pero también hay líneas secantes. Mira, por ejemplo, donde dos carreteras se cruzan en un puente o cruce: eso es una intersección, son secantes…"*

-M10:" … *En los edificios hay muchas líneas rectas y paralelas: los bordes de las ventanas o los lados de los muros…"*

-M6:" … *Entonces, si una línea corta a otra, son secantes. ¡Como las calles que se cruzan en una intersección! …"*

-M10:" … *Yo veo una línea que empieza en una esquina y sigue recta hacia un lado del edificio… ¿eso sería una semirrecta? …"*

-M17:" … *Exacto, M10. Si tiene un punto de inicio, pero no se detiene, es una semirrecta…"*

Detectan todas las líneas trabajadas previamente *(aplauden)*

-I*:" … ¿Veis? ya estáis refrescando conceptos…"*

-M19*:" … También te digo que en cuanto salga da aquí, la cabeza se me autodestruye…"*

En ese momento, les muestra la siguiente imagen para hacer un recordatorio final de las líneas:

Actividad 5: Conociendo el Geoplano

Tras ese primer recordatorio sobre la clasificación de líneas la investigadora introdujo el primer recurso didáctico: el material manipulativo estructurado: el geoplano. Este recurso fue seleccionado debido a que la mayoría de las maestras desconocía su uso en el aula en el primer cuestionario inicial que completaron (Anexo I), y sus posibles aplicaciones con alumnado de Educación Infantil.

Para comenzar, la investigadora realizó una breve explicación sobre las características y los distintos 3 tipos de geoplanos.

-I:" … *Pasamos a otro recurso y otra actividad, vamos a utilizar un material que se llama Geoplano para practicar…"*

-M3:" … *Ais que bien un cambio de aires…"*

-M22:" … *¿El qué? …" (refiriéndose al nombre del material)*

La investigadora muestra el material*:" ... El Geoplano, es un recurso manipulativo que sirve para trabajar a la geometría, geometría por medio de la utilización de gomas elásticas con los pivotes. Hay Geoplano en el mercado están hechos distinto material que luego os enseño. La idea es que ahora probéis a trabajar todas las líneas trabajadas en el día de hoy con las diferentes tramas y así os familiaricéis con el material..."*

- M23:" … *¿La trama? ..."*

-I" … *Si, la trama es la disposición de los pivotes, de los pinchitos…"*

-M23:" … *aaaaa ok…".*

A continuación, distribuyó entre las mesas una variedad de Geoplanos, tanto de madera como de plástico, con diferentes tipos de tramas. Incorporar geoplanos permite pasar del reconocimiento visual al análisis activo, manipulativo y constructivo de los conceptos Junto con el material, proporcionó unas instrucciones detalladas sobre la actividad a realizar, con el objetivo de que las maestras pudieran explorar y familiarizarse con el recurso de manera autónoma y explorasen los tipos de líneas de forma manipulativa y no solo visual como en las anteriores actividades.

-M18:" … *¿Esto donde se compra?"*

-I:" … *Es muy fácil luego te digo dónde puede comprar…"*

-M2:" … *A pues pasa el enlace a todas…"*

-M19:" … *Hombre esto el cole se podría estirar y comprar material…" (mirando a la directora que también se encontraba en el aula).*

Las maestras comenzaron a manipular los Geoplanos, colocando las gomas elásticas para formar distintas figuras y líneas. Les facilita además una plantilla para que vayan realizando todas las líneas vistas hasta el momento.

Durante la exploración con los Geoplanos, las maestras de uno de los tres equipos descubrieron que no era posible representar las líneas poligonales curvas ni abiertas.

-M13:" … *Claro pero aquí no podemos hacer la línea curva ni recta abierta claro…"*

-M21:" … *claro por las gomas, a lo mejor con una cuerda…"*

Por otro lado, la investigadora pudo grabar la conversación de otro equipo con su teléfono móvil:

-M7:" ... *Con este geoplano cuadrado hice una línea recta... la goma va de un clavo al otro, Se ve como una cuerda tensa. ..."*

-M8:" ... *Yo también, pero no sabía si eso era una semirrecta. Le puse solo un extremo visible así rodeando la goma en el clavo… pero no sabía si seguir…"*

-M4*:" ... En realidad, si marcas un punto inicial y dejas el otro "abierto" visualmente, ya estás representando una semirrecta. Lo importante es el origen…"*

-M17:" ... *Miren (es argentina), yo intenté hacer una curva en el geoplano circular… ¡y no es tan fácil! Tuve que ir cambiando poco a poco los puntos para que se viera redonda y que no se estirase la goma…"*

-M4:" ... *Es que las curvas no se forman con segmentos rectos como las poligonales. Pero en este geoplano se puede "simular" una curva si vas variando con pequeños tramos. ¿no Elena? (refiriéndose a la investigadora) ...".*

-I*:" ... luego lo vemos entre todas…"*

-M17*:" ... Yo hice dos líneas paralelas en el geoplano este, el isométrico. Al principio no sabía si eran realmente paralelas, pero medí la distancia entre los puntos y si. No se cruzaban ni se inclinaban…".*

-M4*:" ... ¿y secantes? ¿no creo que se puedan en todos, ¿no…?"*

M7 y M4 se ponen a hacerlas en los distintos geoplanos.

> -M8*:" ... Hice una línea poligonal cerrada. ¡Me salió un pentágono! Supongo que eso cuenta, ¿no? ..."*
>
> -M17*:" ... Sí, claro. Al fina las formas son eso, línea poligonal cerrada porque todos los segmentos están conectados y no hay extremos sueltos…"*
>
> -M7*:" ... Es muy útil ver todo esto en el geoplano. ¡Antes solo me lo imaginaba! Ahora entiendo mejor qué es una semirrecta o una curva. Para clase seria guay tenerlo con los niños por lo menos para los de 5…". (refiriéndose a 3º Infantil)*

Tras unos minutos de exploración, la investigadora lanzó una pregunta clave para fomentar el dialogo*:" ...* ***¿Pueden representar todas las líneas en todos los tipos de geoplanos?"***. Esta interrogante buscaba promover la reflexión sobre las limitaciones y posibilidades del material, así como estimular el análisis sobre su aplicación en el aula y su adaptación a diferentes niveles de aprendizaje.

> -Todas las maestras al unísono:" … Noooo*…"*
>
> - I:" … *¿por qué…"?*
>
> -M23:" … *pero aquí no podemos hacer ni líneas poligonales abiertas, ni líneas curvas ni abiertas ni cerradas…"*
>
> -M9:" … *y, por ejemplo, aquí los clavos representan los puntos, ¿no? ..."*

La investigadora corrobora lo que dice la maestra.

Además, en otro de los equipos y durante la exploración con los Geoplanos, las maestras descubrieron que no era posible representar un círculo en estos materiales de la misma manera que otras figuras geométricas.

> -M16:" … *El círculo no podemos hacerlo porque se crea segmentos de un pivote a otro, aún con el geoplano este…" (*señalando el geoplano circular).
>
> -I:" … *¿Por qué? ..."*
>
> -M2:" … *Porque es una goma y se queda tensa y es que claro está cerrada…"*
>
> -M4:" … *¡eso me pasaba a mí! ..."*

La investigadora les indica que el Geoplano se puede trabajar con cuerdas también precisamente para poder trabajar esas opciones. A partir de esta observación, la investigadora les guio hacia la comprensión de que el círculo es una figura con una propiedad particular: su continuidad de puntos que cambian de dirección constantemente, lo que lo define como una línea curva cerrada. Las maestras manipularon el material para construir líneas y figuras, lo que fortaleció su comprensión conceptual y favoreció la expresión verbal precisa.

Este diálogo espontáneo evidencia un progreso significativo en la interiorización de conceptos geométricos y el uso del lenguaje disciplinar. Además, surgieron reflexiones sobre las limitaciones del material, especialmente en relación con las líneas curvas y las figuras continuas como el círculo, lo que propició una discusión sobre la naturaleza de las representaciones geométricas

Además, de manera espontánea, en el diálogo entre las maestras surgió el término segmento (maestra Zori en dialogo con maestra Bianca), al referirse a las líneas rectas que formaban entre un pivote y otro en el geoplano.

> - M23*:" ... ¿Mira, M3, a ver, puse la gomita entre estos dos clavos… quedó como una línea recta, pero es un segmento? ..."*
>
> - M3:" … *es como una línea, pero tiene un principio y un final… empieza en un punto y termina en el otro. No sigue más. ¿no? ..."*
>
> - M23:" … *¡Esta es más corta, como… ¿una porción de línea? ..."*

- M3:" … *Sí… creo que esto se llama segmento. Me suena de la primera actividad…"*

-M23:" … *entonces es como una línea con límites. Tiene dos puntitos que la encierran, ¿no? …"*

-M3:" … *Yo creo que si…"*

Este hallazgo permitió que comenzaran a utilizar un lenguaje geométrico más preciso, reforzando así la importancia de la terminología adecuada en la enseñanza de la geometría en Educación Infantil.

Vuelve a generarse mucho murmullo entre los tres equipos lo que dificulta la transcripción posterior en la visualización.

Quedando 10 minutos para finalizar la sesión la investigadora decide terminar la actividad, para poder hacer una recapitulación final de la sesión.

4.Cierre de la sesión

La sesión concluyó con una breve recapitulación colectiva que reforzó los aprendizajes alcanzados y permitió establecer un punto de partida más sólido para las siguientes sesiones. A pesar de los ajustes necesarios en cuanto a tiempo y dinámica, el trabajo realizado durante la primera jornada favoreció una transición efectiva del reconocimiento visual al análisis inicial, tal como plantea el modelo Van Hiele.

Sesión 3 y sesión 4

Sesiones 3 y 4: 28/02/2024

Tabla 60

Orden de implementación de las actividades en las sesiones 3 y 4

Orden	N.º Actividad	Título de la actividad
1º	9	¿Qué era un polígono?
2º	10	Clasificando Polígonos
3º	3	Descubriendo los ángulos
4º	4	Ángulos y líneas en una misma imagen
5º	14	Analizando los cuadriláteros
6º	25	Simetría triángulos
7º	7	Yo dibujo tu dibujo
8º	6	Bingo geométrico

Para alcanzar estos objetivos, la sesión se estructuró en 3 partes:

1.Bienvenida y breve recordatorio de la sesión anterior.

2.Puesta en marcha de las actividades planificadas relacionadas con la geometría unidimensional y bidimensional.

3.Cierre de la sesión.

1. **Bienvenida y breve recordatorio de la sesión anterior.**

En esta segunda sesión, la investigadora decidió preparar previamente el mobiliario para que, al llegar las maestras, pudieran sentarse directamente y no perder tiempo en la reorganización del espacio. El aula fue dispuesta de manera que las maestras pudieran sentarse en forma de círculo, favoreciendo un ambiente más colaborativo y de interacción.

Cabe destacar que, en sesión, faltaron cuatro maestras debido a sus horarios y situaciones personales. Para garantizar su participación en la formación, se acordó que realizarían la sesión en distintos días en esa misma semana y su desarrollo se explica a continuación, aprovechando su hora de comida. Esta adaptación permitió que todas las participantes pudieran seguir el proceso sin quedar rezagadas respecto al grupo.

Una vez que todas las maestras estuvieron acomodadas, la investigadora comenzó la sesión con una breve explicación recordatorio de lo visto en la sesión anterior, centrada en las líneas y su clasificación. Este repaso permitió refrescar los conceptos previamente abordados, asegurando que las maestras pudieran establecer una conexión con los nuevos contenidos que se iban a tratar durante esa sesión.

Una vez se encontraban todas las maestras sentadas, la investigadora comenzó la sesión haciendo un recordatorio de los contenidos abordados en la anterior sesión y explicó que en esta sesión se abordaría una nueva dimensión: la geometría bidimensional, introduciendo nuevas actividades. Para ello, partió de la primera Fase de Aprendizaje del modelo Van Hiele, con el objetivo de conocer el nivel de conocimiento de las maestras sobre esta dimensión.

En esta ocasión además de forma general el aulario en el que se desarrollaba la formación, la sesión quedó grabada con un soporte para el teléfono móvil de la investigadora lo que permitía moverlo y acercarlo a la zona en la que se estaba desarrollando la actividad, pudiendo grabar tanto el audio como el sonido de una mejor forma que en la anterior sesión.

2.Puesta en marcha de las actividades planificadas.

Actividad 9: ¿Qué era un polígono?

La investigadora situó a todas las maestras en círculo para favorecer la interacción y colaboración durante la actividad. A continuación, dispuso una serie de figuras geométricas sobre el suelo creadas con papel blanco y de un tamaño lo suficientemente grande para que todas pudieran observar lo bien, además cada figura estaba numerada para facilitar su identificación y el desarrollo de la actividad. Las figuras utilizadas, que se encuentran detalladas en el Anexo III para su posterior consulta, presentaban distintas características con la finalidad de que las maestras, mediante el diálogo, pudieran recordar los elementos clave necesarios para determinar si una figura bidimensional se considera polígono o no polígono.

La investigadora aprovechó este momento para recordarles una premisa fundamental:

> -I: **"…** *para que una forma geométrica sea considerada bidimensional, debe cumplir con un requisito básico: estar formada por al menos tres líneas…".*

Esta indicación ayudó a enfocar la discusión y a guiar el análisis de las figuras presentadas, facilitando la identificación de los elementos esenciales en el proceso de clasificación.

A partir de la pregunta -I:*"... ¿Qué figuras de las que hay en el suelo son polígonos? ...",* la investigadora les solicitó que compartieran de forma verbal las variables que utilizarían para clasificar las figuras y dar una respuesta a "… *¿Qué característica debe tener la figura para que se considere un polígono? ..."* Esta pregunta generó un breve momento de reflexión en el grupo y las maestras se empezaron a mirar entre ellas hasta que rápidamente una de ellas decide hablar:

> -M15:*" …Los polígonos son figuras que tienen lados. Si no tienen lados, no son polígonos. Por ejemplo, el 7 no es un polígono…"*
>
> -María F:" *…Y tienen que ser líneas rectas…"*
>
> -M15:*" …Correcto, entonces el 7 no es, el 3 tampoco…"*

Empiezan a animarse las demás y a participar

> -M13:" *...Y no pueden tener lados curvos…"*
>
> -M23*:" ...Mmm… Yo diría que esta no es un polígono porque no tiene lados rectos, sino que es una curva, (12 que es un círculo) ..."*
>
> -M18*:" ...Entonces, ¿los círculos nunca son polígonos? ..."*
>
> -M19*:" ...Sí, y tiene que tener al menos tres lados, porque con dos no se cierra. ..."*
>
> -M15:" *...Y formado por líneas rectas eso es, el 3 no es, el 7 tampoco…"*
>
> -M16:" *...Así que el 1 si es…"*
>
> -M3: (Viendo las figuras)" *...Creo que este es un polígono porque tiene varios lados rectos y se ve como un triángulo* (señalando la figura 1) …"
>
> -M18:" … *¡Clarooooo! ¿Si tiene curvas, ya no es un polígono no? o me estoy liando…".*
>
> -M3:" … *Parece que no… porque todos los polígonos que hemos separado tienen lados que son líneas rectas…"*
>
> -M14:" *…El círculo tampoco claro…"*

La investigadora explica que las estrellas sí son polígonos si están formadas por líneas rectas y están cerradas, es decir, unidas.

> -M20:" *...y esta entonces la descartamos porque no está cerrada…"* (figura 7)
>
> -M4 y M10:" *... ¡Y la 11 también fuera! ..."*

Este análisis permitió aclarar que, para que una figura sea considerada un polígono, debe estar formada por líneas rectas que se conecten de forma cerrada. El círculo, al ser una figura curva y no estar formado por líneas rectas, no cumple con esta condición, y por tanto no se clasifica como un polígono. Esta reflexión contribuyó a profundizar el entendimiento de las maestras sobre la clasificación de las figuras geométricas y su relación con las características fundamentales que definen a los polígonos.

> -M3*:" ...pero entonces, ¿qué pasa con esta? (señala la que es como una estrella, figura 6) Tiene lados rectos, pero no sé si cuenta como un polígono porque está como para dentro…"*
>
> -M9:" *...A ver, a lo mejor como es así no cuenta como que es un polígono…"*

En este momento surge una nueva apreciación, que da lugar a ese análisis detectando que descubriendo las figuras cóncavas y convexas.

> -M13:" *...El 11 nada…"*

Empiezan a decir cuales si y cuales no, la investigadora les pregunta que digan cuales no son polígonos. María F tiene dudas con el 13 porque se corta, al final determinan que sí. La investigadora una vez acaban de decir la agrupación, les dice que hay una que no debería estar.

> -M15: *La 13 porque es triplana*
>
> -M10:*" …Espera, espera…, es tridimensional es una pirámide…"*

En este punto, las maestras comenzaron un debate en el que surgió una duda importante: no sabían si una pirámide debería considerarse un polígono, ya que, aunque tiene líneas cerradas y rectas, estas están representadas en un dibujo, y no quedaba claro si eso la calificaba como una figura bidimensional. Algunas maestras argumentaban que, debido a la estructura cerrada y recta de la pirámide, debía ser considerada un polígono.

La investigadora intervino en el debate para aclarar el concepto, señalando que, para que una figura sea considerada bidimensional, debe carecer de profundidad. Es decir, las figuras bidimensionales solo tienen altura y anchura, pero no profundidad. En este sentido, la pirámide, aunque tiene líneas cerradas y rectas, es una figura tridimensional porque posee volumen y profundidad, lo que la distingue de las figuras bidimensionales….y aprovecha para argumentar y justificar la necesidad en la escuela de enseñar a los estudiantes objetos tridimensionales y no en papel para evitarles estas dudas al aprender objetos tridimensionales frente a las bidimensionales y poder comprender la diferencia entre triángulo y pirámide, o entre el círculo y balón. Las maestras asienten.

> -M5:*" …Entonces no es polígono, confirmamos…"*

Con esta aclaración, las maestras pudieron entender que, a pesar de que la pirámide pueda estar representada en un dibujo plano, no debe considerarse un polígono, ya que su naturaleza tridimensional no cumple con las condiciones de las figuras bidimensionales.

Tras el debate y la aclaración, las maestras, junto con la investigadora, hicieron un recopilatorio de las ideas para aclarar las propiedades que debe tener una figura geométrica para ser considerada un polígono y las características que deben excluirse de esta clasificación.

La investigadora guio la conversación, resaltando los puntos clave que se habían discutido mientras las maestras participaron en ese resumen, a continuación, se aborda ese resumen y posteriormente el diálogo de las maestras:

1. Líneas rectas: Para que una figura sea un polígono, debe estar formada por líneas rectas. No se consideran polígonos las figuras con líneas curvas.
2. Figura cerrada: La figura debe estar cerrada, es decir, los segmentos de línea deben encontrarse y formar un contorno cerrado, sin interrupciones.
3. Bidimensionalidad: El polígono debe ser bidimensional, es decir, debe tener solo altura y anchura, pero no debe tener profundidad. Esto excluye a las figuras tridimensionales como las pirámides.
4. Mínimo de tres lados: Para ser considerado un polígono, la figura debe estar formada por al menos tres líneas rectas que se conectan entre sí. Es decir, la figura debe tener al menos tres lados.

> - M15:" *…Los polígonos son figuras geométricas de dos planos compuesto por un conjunto de líneas poligonales cerradas, sin curvas ….es la definición que tenemos de Edelvives) …" (imparte matemáticas en Primaria).*

Una vez que estas ideas quedaron claras, la investigadora indicó que, con este conocimiento básico sobre los polígonos, pasarían a realizar una nueva actividad para profundizar en lo aprendido. Les explicó que la actividad que realizan a continuación sería la Actividad 10, relacionada con la clasificación y análisis de figuras geométricas.

Transcripción día siguiente con dos maestras que no pudieron asistir con sus compañeras a la primera sesión y realizaron la sesión al día siguiente:

Las maestras se sientan juntas en una de las mesas donde habitualmente trabajan el alumnado en las aulas de 2 años, específicamente en el aulario de una de las maestras. En esta ocasión, la investigadora decide cambiar el enfoque de la actividad y, en lugar de utilizar las figuras individuales que empleó en el trabajo con el gran grupo, les presenta todas las figuras en una misma página. Esta modificación busca hacer la actividad más accesible y organizada para el trabajo en equipo de las maestras, facilitando el análisis y la comparación de las figuras de manera conjunta.

Con esta nueva disposición, la investigadora pide a las maestras que observen y discutan las figuras geométricas presentadas en la página, invitándolas a clasificar y reflexionar sobre cuáles de ellas cumplen con las características necesarias para ser consideradas polígonos y cuáles no. La actividad se desarrolla de manera colaborativa

-M7:" *…Pues mira, no es polígono, ni ésta ni ésta…" (y empieza a señalar las figuras).*

La investigadora les recuerda que deben justificar el por qué:

-M17*:" …Porque los polígonos tenían que tener las líneas rectas…"*

Mientras las maestras continúan la actividad, siguen detectando las figuras que no cumplen con las propiedades de los polígonos, principalmente porque están abiertas o contienen líneas curvas. Este proceso de identificación y clasificación avanza con normalidad hasta que, de repente, Estrella, una de las maestras, detecta una figura tridimensional entre las imágenes presentadas.

La investigadora se muestra contenta y sorprendida, ya que en el gran grupo anterior no se había logrado identificar esa figura como tridimensional, por lo que se siente orgullosa de que Estrella lo haya notado. Se le dedica un momento de reconocimiento y la investigadora le dice con entusiasmo*:*

-I: *"¡Qué bien, que sepas que el otro grupo no lo tuvo claro!"*

M7*, se ríe y responde:" …Es que a mí me gustan las matemáticas…"*

Figura 58

Maestras realizando la actividad 9 (2)

Finalmente, hacen un recopilatorio de las ideas en conjunto con la investigadora para aclarar las propiedades, dejando claro qué son polígonos y qué no. La investigadora procede a hacer otra actividad (Actividad 10)

Transcripción día siguiente con dos maestras que no pudieron asistir con sus compañeras a la primera sesión:

Las maestras se sientan juntas en una de las mesas donde habitualmente trabaja el alumnado (aulas-5 años;3ºEI), específicamente en el aulario de una de las maestras participantes. En esta ocasión, debido a que el tiempo disponible es más limitado, la investigadora decide no utilizar las figuras individuales que había empleado en el trabajo con el gran grupo, sino que les enseña todas las figuras en una misma página.

Antes de que las maestras comiencen la actividad, la investigadora les recuerda verbalmente lo que sí se considera un polígono y lo que no. Este repaso rápido les ayuda a reforzar los conceptos clave antes de poner en práctica lo aprendido.

Una vez hecho esto, la investigadora decide probar y cambiar la metodología y esta vez les entrega una plantilla a cada una de las maestras, y cada una empieza a rodear las figuras que no son polígonos.

Mientras realizan la actividad, se dan cuenta de que, a pesar de haber identificado varias figuras, no han detectado la figura 10, que es tridimensional. La investigadora interviene y les avisa que hay una figura que no han detectado:

> -M1:" *…este…" (señalando el 6 y el 13 de forma algo impulsiva)* la investigadora le dice que no.

Después, M6 con algo de duda, señala la figura 10 y pregunta:" *... "¿Este? ..."*" La investigadora confirma que sí, la figura 10 no es un polígono y explica el motivo: es una figura tridimensional, y como tal, no puede ser clasificada como polígono.

Este momento permite que las maestras reflexionen y aclaren la diferencia entre figuras bidimensionales y tridimensionales, lo que refuerza su comprensión de las propiedades geométricas y las bases para clasificar las figuras correctamente.

Actividad 10: Clasificando Polígonos

La investigadora recoge las plantillas de la actividad anterior y, a continuación, reparte nuevas figuras numeradas en el suelo del aula con el objetivo de que las maestras descubran y analicen diferentes propiedades geométricas. Esta vez, el enfoque se centra en explorar aspectos más específicos de las figuras, como el número de lados, la forma (si son regulares o irregulares), el tipo de ángulos (si son cóncavos o convexos), el número de simetrías y el número de diagonales de cada figura.

El objetivo de esta actividad es no solo identificar las figuras, sino también profundizar en las características más complejas que permiten una clasificación más precisa y detallada, como la regularidad o irregularidad de las figuras, los tipos de ángulos presentes, las simetrías que poseen y las diagonales que se pueden trazar dentro de cada figura.

Este ejercicio también permite que las maestras se familiaricen con términos y conceptos más avanzados en geometría, y a medida que van descubriendo y debatiendo las respuestas, se fortalece su comprensión global de la geometría y su aplicabilidad en la Educación Infantil.

Les indica la siguiente instrucción:

-I:" … *Ahora que ya recordáis lo que son los polígonos, vamos a ver cómo podemos clasificar este conjunto de figuras poligonales. Así que tenéis que agrupar las siguientes figuras, que son todas polígonos, de diferentes formas, indicando la propiedad o propiedades, lo importante es que expliquéis vuestro criterio y uséis el vocabulario geométrico que ya vamos conociendo…".*

Con esta instrucción, las maestras comienzan a observar las figuras poligonales dispuestas en el aula

-M22:" *... Regulares e irregulares…"*

-I:" *…Vale, regulares e irregulares, ¿por qué era regular o irregular? Explícalo con tus palabras…"*

-M18*:" ...Pues mira por ejemplo La estrella es irregular…"*

-I*:" ... ¿qué número? ..."*

-M18*:" ...El 18…"*

-M3*:" …Y el 13…"*

Empiezan decir los que consideran irregulares

-M16, M19, M23, M10 Y M9" *…El 11,5,7,9,12,1,2…"*

-M13:" … *¿Pero regulares dices que los lados de las líneas sean iguales de tamaño, o que si las partes con una línea y sean iguales? ..."*

-M14:" *…Que sean simétricos 2 a 2 los lados …"*

-M13*:" …ósea el rectángulo sería regular…"*

-M14:" *…Eso es…"*

Sale el concepto de simetría. Entonces empiezan a modificar esa agrupación

- M3, M10 M23 y M19*:" ...Entonces el 12 no, 3 no, 17 no, el 15 no.*

- M18*:" …Ya me he perdido…"*

M19 y M3 deciden agacharse y empiezan a mover las figuras para que la agrupación sea visual.

Durante la actividad, M5, M13 y M1 se muestran dudosas sobre si el (el 2 y el 9) trapezoide puede considerarse regular. Comienzan a debatir.

-M10*:" ...que el 2y el 9 si,*

-M3*: ". que se pueden doblar…"*

-M13*:" ...pero júntalas, no cuadran…"*

-M3*:" ... ¿se pueden recortar? la forma digo, es que no lo veo…"*

Siguen discutiendo, la investigadora, al notar que el debate no avanza debido a la confusión y a la falta de tiempo, interviene para aclarar la duda conceptual. Explica de manera clara y concisa que "están mezclando conceptos" una cosa es la simetría y el número de ejes de simetría, y otra muy distinta es la regularidad de las figuras.

-Todas*:" ...Aaaaaaaaaaaaa vale por eso no nos ponemos de acuerdo…"* (risas)

-I*:" …es que los polígonos tienen diversas características, y es que la regularidad se refiere a que todos los lados y ángulos de una figura deben ser iguales. En el caso del trapezoide, como sus lados no son todos iguales y sus ángulos tampoco lo son, no puede considerarse regular, aunque puede tener simetría en algunos casos. Les indica que es mejor centrarse en un criterio para poder obtener una clasificación de acuerdo a ese que elijan. Porque por ejemplo si deciden elegir el criterio regular, saldrán* *clasificación, pero si eligen criterio simetría, saldrá otra opción distinta. ¿por cuál queréis empezar? …"*

-M15*:" ...por los regulares…"*

-I*:" … vale, pues ¿qué le pasa al regular? …"*

-M2*:" …Que todos sus lados son iguales…"*

-M15*:" …Y los ángulos*

Después de esta aclaración, las maestras comprenden la diferencia entre los dos conceptos y modifican la agrupación de las figuras, corrigiendo la clasificación en función de la regularidad y la simetría. La actividad continúa de forma más fluida, ya que se resuelve la confusión y las maestras pueden avanzar en el análisis y clasificación de los polígonos de manera más precisa.

-M10:*" …Entonces el 4 si, 14, 6……".* Empiezan a hablar a la vez muchas de ellas

-M13:" *…Entonces chicas esperad que, si no nos enteramos todas hablando, el 14 no vale, el 8 y 16 fuera…"*

-M9:" *…Si el 8 es irregular el 17 también…"*

-M23:" *… ¿y el 6? …"*

-M10:" *… también…"*

M16 y M19 se agachan a modificar la clasificación moviendo la figura 9*,* M13 les dice que no.

Figura 59

Maestras discutiendo sobre las figuras bidimensionales

La investigadora ahora les propone lo siguiente*, "…ahora vais a hacer la clasificación según el eje de simetría…*" (les recuerda que, si hay una línea imaginaria, la figura queda dividía en dos figuras totalmente iguales y todas las distancias son equidistantes de esa línea) les invita a que hagan esa clasificación, de pronto una maestra tiene una duda. Y decide coger la imagen y doblarla.

-M13*:" ...Pues para adentro un montón el 9, 17, el 18… empiezan a participar las demás…"*

-M23*:" ...el 17 no…"*

M13, M18 y M3 dicen que si porque se puede rotar: M10 dice que no porque al pegarlo no cuadra. *(Discuten)*. M9 coge la figura y dobla el papel para ver si coinciden las esquinas. Se dan cuentan que no es así

-M10:" *… ¿Ves? no coincide …"*

-M2:" *…Claro y el 2 y el 4 tampoco…"*

M16 se levanta para doblar con las que tienen dudas para comprobar con la misma técnica que utilizó su compañera.

Terminan la clasificación e interviene la investigadora: "*…Vale ya lo tenéis, ahora queda otro…"*

-M13:" *… ¿qué? ¿otra?aaa! ya sé, por los ángulos…"*

Intervienen varias a la vez:

-M9*:" …Por triángulos- no triángulos…"*

-M23 y M10*:" … Cóncavo y convexo, pero no recuerdo cual era cada uno…"*

-M23*:" … lo muestra a modo de ejemplo con la palma de la mano…"*

-M2*:" …Pues el 5 tiene ambos…"*

-M5*:" …Es que en cuanto uno lo tiene hacia dentro, ya se llama cóncavo…"*

-M10*:" …ósea que el 1 lo sería…"*

-M13*:" … Y el 7…"*

-M10*:" … Podemos hacer los que están como para adentro y los que no…"*

-M23*:" …Eso era lo de cóncavo y con-beso…"* (se ríe mientras hace el gesto con las manos)

-M2*:" …Claro, pero están mezclados, quiero decir, algunas figuras son las dos cosas…"*

-M21*:" …Ahii si esto lo está viendo mi hija en Primaria, vaya tela, los convexos están todos fuera y los que tienen un trozo metido son cóncavos…".*

-I*:" …si eso es, convexos tienen todos sus ángulos hacia afuera, pero si tiene alguno "que entra" son los cóncavos tienen al menos un ángulo que "entra"…"*

Y hacen otra posible clasificación

M2 sale y entre todas empiezan a hacer la clasificación de cóncavos y convexos

-I*:" …muy bien ya tenemos otra clasificación, nos quedaría otra que es la más fácil y no la decís…"*

-M18:" *… el número de esquinas…"*

-M3*:" …Por favor habla bien, vértices…"* (le corrige el vocabulario en tono sarcástico y cómico)

- M5:" *…Pero es igual que el número de lados…"*

-M11*:" …Si eso no vale, porque si tiene 6 siempre tendrá 6 vértices…"*

-M2:**"** *…Bueno, pues a ver .... por número de lados…"*

-" *…Venga yo hago las de 3…" (*sale M3*),* y dice*…" …venga el resto decir no me dejéis sola ahora que he salido…".*

Sale M2, las va contando y separando, las otras profes van señalando.

Cuando ya tienen la clasificación, M5 interviene y *dice" … otra opción y es que, dentro de esa clasificación por lados, podemos clasificarlos por si son regulares o irregulares …"*

-M10: (Se ríe de M5 porque está afónica y casi no puede hablar diciendo):*" … jolín para no poder hablar justo intervienes para ser la lista (risas). Entonces claro eso también lo podemos hacer con los de 4 lados…"*

-M18*:" …Hoy ya somos listas estás contenta…"* (refiriéndose a la investigadora).

-I*:" … eso es como veis hay muchas opciones, por ejemplo, podíamos hacer una clasificación por si tienen ángulos rectos, pero como no nos hemos centrado en ello, no lo vamos a hacer…"*

-M10*:" …A da igual mira el 9…"* (risas)

-M23*:" ...El 8…"*

-M2*:" ...El 6 y el 3 y en el 17…"*

-M19*:" ...Es verdad que así en grupo es mejor, más fácil…"*

Transcripción M7 y M17

En esta ocasión, la investigadora decide no utilizar las figuras individuales que había empleado en la actividad con el gran grupo. En su lugar, presenta todas las figuras poligonales en una misma página, lo que permite una visión más global de los polígonos para las maestras. Esta estrategia facilita que las maestras puedan ver todas las figuras al mismo tiempo y comparar sus propiedades de manera más directa y rápida, dado el poco tiempo que tienen para realizar el taller, les da la siguiente instrucción:

> -I*:"...Ahora que ya recordáis lo que son los polígonos, vamos a ver cómo podemos clasificar este conjunto de figuras poligonales. Tenéis que agrupar los siguientes polígonos de diferentes formas, indicando la propiedad o propiedades que utilizáis para hacer la clasificación..."*

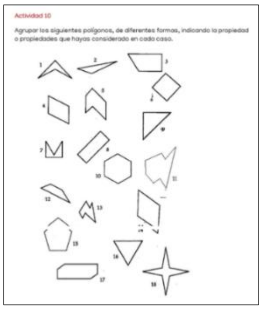
Con esta tarea, las maestras deben analizar las figuras y agruparlas en categorías basadas en diferentes propiedades geométricas. Entre las propiedades a considerar, la investigadora destaca:

- Número de lados de cada polígono.
- Forma: si es regular (todos los lados y ángulos iguales) o irregular.
- Tipo de ángulos: si los ángulos son cóncavos o convexos.
- Número de simetrías que posee cada figura.
- Número de diagonales que se pueden trazar dentro de cada polígono.

Este ejercicio permite que las maestras profundicen en el análisis de las figuras y utilicen varias propiedades geométricas para clasificar las figuras de manera lógica y sistemática. Además, las fomenta a practicar el uso preciso del lenguaje geométrico al describir las características de las figuras que están analizando.

Figura 60

Plantilla actividad 10



A continuación, se presentan los diálogos de las dos maestras participantes:

- M17*:" …pues por los lados…"*

Las maestras empiezan a contar los lados de las figuras y ahora en el papel esas figuras según si tiene 3-4-5-6-7-8. lados. Deciden ir tachando para saber qué figuras han contado. Una vez han terminado, dialogan sobre qué otra clasificación puede hacer, M17 dice que los vértices, pero M7 le contesta:

> " *…los vértices serán igual que los lados, y si hacemos una clasificación que todas las caras sean iguales, o sea sus bases…"*

La investigadora le intenta ayudar con el lenguaje, le dice que, si se refiere a los lados, porque las caras son para los cuerpos de tres dimensiones, y M7 afirma.

Se ponen a hacer la clasificación de los que tienen todos sus lados iguales y los que no. (figura 6,16,14, dudan entre el 15 y determinan que no). Esta maestra lo que intenta clasificar son los regulares y los que no lo son. Una vez lo han hecho, la investigadora les indica que esa clasificación se refiere a los regulares e irregulares, y le invita a que sigan observando porque hay más opciones.

- M7:" *…sí, que se meten "hacia dentro" …"*

- M17*:" …Entonces podemos hacer una clasificación de los que tiene partes para dentro y los que no. (figuras 1, 7, 11, 13, 18 y 5) …"*

La investigadora les dice que son los cóncavos. Es decir, están descubriendo los cóncavos y convexos y les dice que queda otra posible opción.

- M7:" *…Cuando se queda en forma de cuadrado o triángulo al hacer así…" (y hace como un gesto de doblar)*

La investigadora le dice que eso es la simetría, y la doblez eje de simetría

- M17 interrumpe:" *…Claro al doblar se ve si están igual o no…"*

Hacen esa clasificación (figura 8, 6,4,9,14,10,15,16 y 18, 1,7,). Luego cambian y dicen que el 4 no porque quedaría" papel por arriba", y el 14 lo mismo.

M7 no entiende por qué el 8 si y el 4 no son simétricos. porque también se gira si pongo mi línea imaginaria aquí y aquí (y lo dibuja). y dice que lo hace paralelo a los lados.

No lo ve claro, así que la investigadora se lo muestra con un papel con esa forma ya que lo tiene de la actividad grupal que hizo el día anterior con las maestras.

-M7: " *…aaaaa ahora si lo veo, claro se le salen las esquinas (se ríe), no lo visualizaba en la imagen madre mía…"*

(Por eso es muy importante mostrar con materiales las propiedades de las formas, sea la edad que sea).

Ahora revisan todo, M7 vuelve a tener problemas con el 14 pero ya lo ve claro con el ejemplo del 8., ni el 17.

Cierran la actividad recopilando todas las clasificaciones que han hecho.

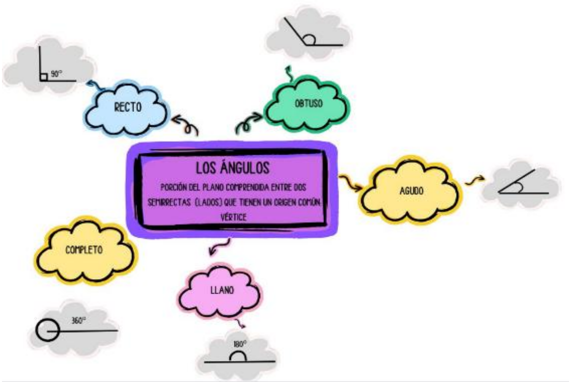
En este momento la investigadora les explica que, en la geometría unidimensional que vieron en la primera sesión, cuando se unen dos líneas rectas, se crean los ángulos (Anexo III), y los vértices, introduciendo nuevos términos.

- Ángulos: Explica que un ángulo se forma cuando dos líneas se encuentran en un punto común llamado vértice.
- Vértice: Es el punto en el que se encuentran dos líneas que forman un ángulo.

En ese momento les muestra en la PDI el siguiente mapa conceptual para abordar cada uno de ellos:

Figura 61

Mapa conceptual: los ángulos



Actividad 3: Descubriendo los ángulos

Tras el trabajo manipulativo y clasificatorio con figuras poligonales, la investigadora proyecta una imagen en la PDI que contiene diversas líneas y ángulos superpuestos sobre una figura o escena. A través del análisis en gran grupo, se busca que las maestras describan con mayor precisión las relaciones entre las líneas"paralelo", "perpendicular" y "recta". y los tipos de ángulos. Sale Mamen de forma espontánea actúa como portavoz verbalizando las características mientras el resto del grupo participa activamente

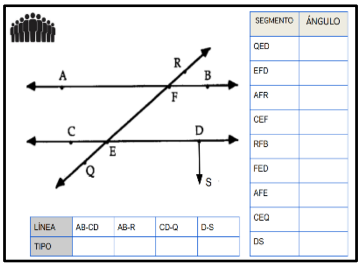
> -M11 (señalando la imagen en la PDI):” *…Mira, aquí hay claramente dos líneas rectas que se cruzan formando un ángulo recto. Esta debe ser una perpendicular…”*
>
> -M5:” *…Sí, y esta otra de aquí no la corta en ángulo recto… se nota que el ángulo es más abierto. Eso sería un ángulo obtuso, ¿no? …”*
>
> -M10:” *…Exacto. Y si seguimos esta línea hacia el otro lado del punto donde se cruzan, ¡también se forma otro ángulo! Nunca me había fijado en que en un vértice hay más de un ángulo” …”*
>
> -M8 (con tono reflexivo):” *…Claro, porque cada vértice es como un punto de encuentro… y las líneas pueden seguir en distintas direcciones. Si medimos desde un lado de la línea hacia el otro, hay dos ángulos opuestos, ¿no? Uno en un lado, y otro en el opuesto…”*
>
> -M9:” *… ¡Sí! Eso lo vi una vez con los niños: si giras una regla sobre un punto, formas dos ángulos. Creo que esos se llaman ángulos adyacentes o algo así…”*
>
> -M5 (tomando la palabra):” *…Opuestos por el vértice, creo. Porque están uno frente al otro, como reflejados. Y deben tener la misma medida, ¿no? Eso ya sería una propiedad…”*
>
> -M10 (entusiasmada):” *… ¡Ahí estamos ya deduciendo! Si dos líneas se cruzan, se forman cuatro ángulos, y los que están frente a frente son iguales. Entonces podríamos clasificar también los ángulos según esas relaciones …”*
>
> -M11:” *…Y también veo que hay líneas paralelas que no se tocan en ningún punto, pero una línea que las corta genera como... ángulos repetidos en distintos lugares…”*
>
> -I (interviniendo para guiar):” *…Me encanta cómo estáis conectando lo que veis con propiedades más profundas. Estáis pasando de nombrar lo que observáis a deducir relaciones …*

Una vez han respondido y terminado la actividad, les explica que las líneas son la base de la formación de todas las figuras geométricas. Este punto es esencial no solo para el trabajo en lectoescritura, ya que, al aprender a dibujar líneas, el alumnado no solo aprende a formar letras y números correctamente., sino también para la comprensión de las propiedades geométricas.

Actividad 4: Ángulos y líneas en una misma imagen

Figura 62

Plantilla actividad 4



A continuación, muestra en la PDI otra imagen que deben ir completando en la tabla que se les facilita atendiendo a las variables y códigos a analizar: ángulos y líneas. La investigadora refuerza que entender cómo se forman las figuras a partir de líneas es un conocimiento fundamental para enseñar geometría, pues sin el dominio de las líneas, sería más difícil abordar conceptos más complejos sobre figuras. Este enfoque también permite que las maestras comprendan cómo las líneas rectas, curvas y sus intersecciones son los componentes básicos de todo lo que aprenderán los estudiantes en geometría a lo largo de su desarrollo académico.

Al finalizar, las maestras tienen una discusión breve sobre cómo este conocimiento se aplicará a sus aulas, y la investigadora resalta la importancia de trabajar estos conceptos de manera práctica visual y manipulativa y les recuerda el valor de trabajar de forma muy pormenorizada las partes de las formas en el aula de Infantil, las líneas, porque cuando vayan a dibujar o ver una figura de dos dimensiones, podrán diferenciar los tipos de líneas que forman las figuras, quizá no con la palabra técnica matemática, pero sí que lo observen.

Esta sugerencia va ligada a la siguiente actividad de las figuras de 4 lados. E incluye la noción de cóncavo y convexo.

> -I: "*…Por ejemplo, les podemos mostrar figuras de 4 lados cóncavas y convexas y quizá ellos con sus palabras digan que hay un pico metido para adentro…"*
>
> -M14:" *…A ver en 2º de Primaria que es donde estoy yo este año aún no lo hemos visto…"*

Actividad 14: Analizando los cuadriláteros

La investigadora le facilita ahora una plantilla a cada maestra, en esa página aparecen seis figuras poligonales formadas por 4 líneas cerradas y todas distintas, y deben decir todo lo que puedan sobre esas figuras con el lenguaje recordado de la primera sesión de la geometría unidimensional, y los tipos de líneas, y ahora los ángulos. Les recuerda en primer lugar que al unir cuatro líneas se forman figuras cerradas, que se llaman cuadriláteros.

> -M2*:" … Son polígonos…"*
>
> -M14*:" … Bueno, todas tienen cuatro lados, así que todas son cuadriláteros. Y no todas son regulares…"*
>
> -M11*:" …Sí, pero mira, Por ejemplo, el cuadrado y el rectángulo tienen ángulos rectos, mientras que el rombo y el trapecio no siempre, así que no son regulares…"*
>
> -M10:" *…Entonces aquí solo es el cuadrado…"*
>
> -M21:" *…Y también tienen líneas paralelas este y este…" (señala)*
>
> -M9*:" …Todos menos el último tiene paralelas…"*
>
> -M10:" *…A claro y secantes tiene otras como el rombo y perpendiculares el (2,4,5) …"*
>
> -M5*:" …Y el cuadrado y el rombo tienen todos sus lados iguales, a diferencia del rectángulo y el trapecio. Y ninguna es cóncava…"*

-M14*:" ...Entonces podemos hacer dos grupos: Los que tienen ángulos rectos (cuadrado y rectángulo). Los que no tienen ángulos rectos (rombo y trapecio) …"*

-M21*:" ...Pero el cuadrado y el rombo también tienen algo en común: ambos tienen todos sus lados iguales…"*

-M5*:" ...el cuadrado tiene ángulos rectos y el rombo no, pero si los lados iguales como tú dices…"*

-M18:" *…Esto es genial para explicar el rombo y el cuadrado a los niños…"*

-M10:" *…Aquí solo es regular el cuadrado…"*

-M21*:" …sí, y luego con lo que dice M1 Eso mismo pasa con el rectángulo y el trapecio. Ambos tienen los de lados paralelos, pero el rectángulo tiene ángulos rectos y el trapecio no, sólo un par…"*

La investigadora interviene

-I:" *… ¿Podemos organizar estos cuadriláteros de alguna forma entonces, o sea agrupándolos? ..."*

-M11:" *…a ver chicas, vamos como de lo más general y de ahí a lo mejor si sacamos como subgrupos o como se diga en matemáticas, entonces… a ver…. el cuadrado y los rectángulos van en el mismo pack por los lados…"*

-M8:" *… y el rombo …"*

-M5:" *… entonces todos son en el mismo grupo como tú dices, Y el rectángulo y el rombo estarían dentro del grupo de los paralelogramos, porque tienen lados opuestos paralelos…"*

-M9*:" …y el trapecio no entra en esa categoría porque solo tiene un par de lados paralelos …"*

-M10:" *… ¿y está que no me acuerdo? …"* (señala el trapezoide)

-M9*:" …Esa... con esta, ¿no? …"* (refiriéndose al trapecio)

Al final las maestras organizan las figuras junto con la investigadora:

-I*:" ...venga chicas vamos a organizar información. ¿Todas estas figuras tienen 4 líneas rectas y están cerradas, así que podemos decir que cuadriláteros? …"* (Todas asienten).

-I:" *… Vale entonces dentro de los cuadriláteros podemos decir si son regulares - irregulares, pero si miramos sus lados podemos decir si son*

Paralelogramos (lados opuestos paralelos) y aquí están los

Rombo (todos los lados iguales, pero ángulos no)

Romboide (lados iguales, pero ángulos no)
Cuadrado (ángulos rectos iguales y rectos, y lados iguales)

Rectángulo (ángulos rectos iguales, pero lados no) …"

Entonces… (La investigadora les hace una última pregunta)

-I:" *…"y si encontraran una figura con cuatro lados y ningún lado paralelo como la última, ¿qué es?"*

-M9*:*" *… Eso sería un cuadrilátero que no va aquí, es irregular, no es paralelogramo, vas a pillar…"*

-M16*:*" *…Alaaaaa es verdad yo he cortocircuitado…"*

-I*:"* …Eso es, están los No paralelogramos como los Trapecios (solo un par de lados paralelos) Y los Trapezoides (lados no paralelos ni ángulos) *…"*

-M18:" *…Tu imagina que le decimos todo esto a los niños, no vuelven al cole…"*

-I:" *…Bueno, por supuesto que no hay que decirle todo eso, pero tu si tienes que saberlo…"*

-M19*:" …Zasca! eso te pasa por opinar…"* (en tono burlón)

-M18:" *…No si es verdad, pero que tengo que procesar toda esta información con un esquema…"*

-I:" *…No te preocupes que os lo voy a dar…"*

-M16:" *…a mí también me vendrá bien…"* (risas)

Actividad 25*: Simetría: triángulos*

La investigadora les explica que van a ver los tipos de triángulos, tal y como están sentadas, les reparte un triángulo según sus lados atendiendo a esa clasificación

"…Vamos a trabajar ahora con tres tipos de triángulos: equilátero, isósceles y escaleno…"

"*… las maestras solemos enseñar las figuras geométricas siempre igual y solo una opción. En este caso se suele enseñar el triángulo con los tres lados iguales, el equilátero. Esto da lugar a errores, porque cuando ven un triángulo distinto, no lo reconocen como triángulo. O ese triángulo en otra posición, y "dicen que está mal". Así que vamos a analizar los triángulos en esta nueva actividad, tenéis que tener tres, uno de cada color, para que sea más fácil, En Primaria por ejemplo se puede ofrecer del mismo color para que no se fijen en el color…"*

Las maestras mientras tanto van cogiendo un triángulo de los tres sobres que tenía preparada la investigadora.

-I:" *… ¿ya tenéis todas los tres? venga pues cogemos el amarillo. Este triángulo que tiene tres lados, que son iguales. Esto en Infantil se puede decir igual, incluso que lo comprueben común trozo de lana para que vean que los tres lados miden igual…Y hoy lo que vamos a ver nosotras que ha salido en las primeras actividades de los polígonos es la simetría*. *Era la línea imaginaria que hacemos desde un vértice, y que divide la figura en dos lados iguales. Vamos a ver si la doblarlo, cumple esta propiedad o no. Y mi pregunta es además ¿cuántos ejes de simetría tiene? …"*

Las maestras empiezan a doblar en silencio total, mirándose entre ellas para verificar si lo están haciendo bien.

-M16*:" … ¿pero lo doblo todo el rato? …"*

- M19:" *…No, no, lo tienes que volver a abrir que, si no, ¡no lo puedes ver! …"*

-I:" *…Eso es…"*

Mientras tanto hay dos maestras que están dialogando. M10 discute con M23porque esta no entiende que tiene tres ejes. M23 se lo explica, M10 dice que no y la investigadora indica que M23 tiene razón.

-M10:" *…: ¿pero ¿cómo se da la vuelta? …"*

-M23:" *… ¡Qué no! mira, y le muestra cómo va haciendo los pliegues…".*

M3 intercede y se lo va haciendo a M10. La investigadora confirma que tiene tres ejes de simetría. Ahora les dice que hagan lo mismo con el triángulo de color rosa (isósceles).

-M9:*" …con el rosa solo 1 eje…". (*Aun así, lo prueban y comprueban).

-I:" *… ¿y en el naranja (escaleno)? …"*

-M19:" *…No sale. …"*

-M3*:" …es verdad. …"*

-I:" *…Pues este juego tan simple, si se puede hacer con los niños en el aula. También sería interesante tener en el aula un corcho y que pudieran girar las formas para que observaran que, aunque esté en distinta posición, pero sigue siendo un triángulo. También en la construcción de un triángulo en el geoplano, van a poder contar los clavos que tiene cada lado del triángulo. Vamos entonces a ver los tres triángulos y su simetría…"*

La investigadora les propone otra cuestión:" … *¿Cómo son sus* ángulos y lados *al plegar? …"*

> -M11*:" …Pues en el triángulo equilátero, al doblar por cualquiera de sus alturas, los lados se superponen perfectamente, y los ángulos también quedan enfrentados. Eso me confirma que todos los lados y ángulos son iguales…"*
>
> -M10*:" …Exacto. Es como si cualquier línea de pliegue desde un vértice al lado opuesto funcionara como un eje de simetría. Por eso tiene tres ejes, y cada ángulo es de 60 grados, ¿verdad? …"*
>
> -M9*:" …Sí. En cambio, con el isósceles, solo uno de los lados sirve como eje. Cuando lo doblamos por esa altura, se emparejan los dos lados iguales, y los ángulos de la base se superponen. Eso muestra que esos dos ángulos también son iguales…"*
>
> -M5:" *…Y el escaleno no tiene ninguna coincidencia al doblar. Ningún lado coincide con otro ni ningún ángulo se superpone. Ahí se ve claro que no hay simetría y que todos sus lados y ángulos son diferentes…"*
>
> -M8*:" …Lo interesante es que, aunque el escaleno no tenga simetría, sigue cumpliendo con la suma de ángulos internos. Al doblarlo por distintos lados, no hay superposición.*
>
> -M11*:" …Y al ver esto con las manos, te das cuenta de que no solo es lo que ves, sino cómo se relacionan las partes entre sí. Los lados iguales generan ángulos iguales, y cuando no hay lados iguales, los ángulos también varían…"*

Actividad 7: Yo dibujo tu dibujo

Ahora les dice que se tienen que colocar en parejas para la siguiente actividad y les indica las instrucciones:

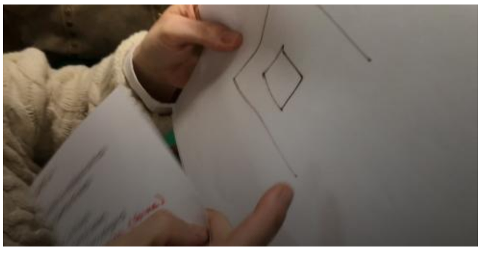
> -I:" … *Ahora vais a trabajar por parejas. A una de vosotras le voy a entregar una tarjeta con unas instrucciones geométricas. Esa persona será la que dibuje una figura en su hoja, siguiendo exactamente lo que pone en la tarjeta. La compañera no podrá ver el dibujo en ningún momento. Una vez terminado el dibujo, la que ha dibujado deberá explicar con sus palabras a su compañera qué debe dibujar, utilizando el lenguaje geométrico adecuado: tipo de línea, orientación (horizontal, vertical, diagonal), si son paralelas o perpendiculares, si hay líneas curvas, si la figura está cerrada, etc.*
>
> *El objetivo es que la compañera logre reproducir el dibujo solo a partir de vuestra explicación verbal. Cuando terminéis, podéis comparar los dos dibujos y analizar si la comunicación ha sido clara y precisa. Recordad: no se trata solo de reproducir el dibujo, sino de usar correctamente el lenguaje geométrico que habéis aprendido."*

Empiezan a hacer la actividad y surge alguna duda:

> -M11:" *¿Pero le puede dar indicaciones de ponerlas líneas perpendiculares encima?"*

Figura 63

Maestra realizando la actividad 7



La investigadora asiente y les indica que pueden utilizar lo recordado hasta ahora, es decir, crea un ángulo de 90º con una línea recta y una curva……y deja en parejas y grupos de tres para realizar la actividad. Y también la orientación. El objetivo es que consiga hacer ese dibujo.

> -M11:*" …Vale entonces, dibuja dos paralelas, líneas rectas horizontales, y deja bastante hueco entre ellas, y ahora dibuja una línea vertical que una los dos inicios de las paralelas. Vale bien, ahora dibuja lo mismo dentro, pero demás debes cerrarlo con otra línea vertical…"*

(Primero lo hace un miembro de la pareja, y después deben coger otra tarjeta nueva de las creadas por la investigadora para cambiar quien recibe la orden y quien la da. Así ambas personas deben utilizar el lenguaje geométrico apropiado.)

> -M19:*" …Madre mía esto es difícil ehhh…"*

Tan solo dos parejas lograron dibujar casi de forma similar el dibujo de su compañera, pero se divirtieron y pensaban en el vocabulario que querían utilizar para definir.

Después de esta actividad, les indica que deben sentarse en círculo otra vez para hacer un juego. Les explica las instrucciones del Bingo geométrico.

Actividad 6: Bingo geométrico

La investigadora les indica la instrucción:

> *" … Vamos a cerrar la sesión con una actividad en parejas que os va a ayudar a recordar y aplicar todo lo aprendido sobre geometría unidimensional. A cada pareja le entregaré un cartón distinto con elementos geométricos: pueden ser líneas o tipos de ángulos. Yo tengo aquí una bolsita con pequeños papeles, cada uno con una definición geométrica escrita. En las primeras rondas leeré solo el nombre del concepto para que os familiaricéis con la dinámica. A partir de ahí, iré sacando definiciones, y vosotras tendréis que identificar si aparece en vuestro cartón y marcarla. Además ¡hay premio para quien complete la línea o canto Bingo primero!"*

Las maestras se muestran nerviosas y muestran interés en de jugar al Bingo geométrico.

Van saliendo los nombres: cóncavo-líneas paralelas-

> -M16:" *…Pero no lo tengo…"*
>
> -I:" *…Claro porque cada tarjeta tiene imágenes distintas…" (Risas)*
>
> -I:" *…venga seguimos: línea curva abierta…"*
>
> -M12:" *… ¿oye y en los huecos que no hay nada? …"*
>
> -I:" *…Pues nada, se deja en blanco, son espacios…"*
>
> -M11:" *… Venga que hago línea…"*
>
> -I:" *…figura de 4 lados de distinta longitud y amplitud de sus ángulos interiores- ángulo agudo- …"*
>
> -M2:" *… ¿Una misma imagen pueden ser 2? …"*
>
> -I:" *…No…"*
>
> -M14:" *…vamos que una figura no puede cumplir dos propiedades …"*
>
> -I:" …eso es, *unidad más simple que no tiene dimensiones…"*
>
> -M23:" *…: ¿la columna? …"*
>
> -I:" … M23*! Es el punto……"*

-M23:" *…no no! Qué digo que hemos hecho columna no línea, ¿eso no vale? …"* (Se ríen por el error de lo que se refería la maestra y la investigadora)

-I:" *… no, eso no vale…"*

-M10:" *…esta chica no ha ido al Canoe en su vida (tono burlón) (*Famoso Bingo en Madrid*) venga sigue (le dice a la investigadora) …"*

-I:" *…es la formación de diversos segmentos de rectas unidas cuyos extremos no coinciden. …"*

-M4*:" … ¿Puedes decir el nombre? Venga va que estamos cansadas…"*

-I: *chicas porque estamos al final de la sesión va: línea poligonal abierta*

-M11:" *…uy venga que estamos a puntito de cantar…"*

-I:" *…son líneas que se cruzan unas con otras en ángulo de 90 grados y están formadas por líneas verticales y horizontales…"*

-M10 y M15*:" … línea!!!!!! …"*

-M11 y M14*:" …y nosotras!! …"*

Figura 64

Maestras en la actividad del Bingo

La investigadora se levanta para repartir los premios a las parejas que han cantado línea: bolsitas de triángulos de maíz.

- M23:" *…han hecho trampa, seguro(riéndose).*

-I:" *…seguimos a ver quién canta Bingo: ángulo que mide más de 90º.*

-M11*:" … venga toma un poquito de nuestro premio anda envidiosa.* (Se empiezan a repartir las dos bolsas entre todas).

-I:" *…sucesión continuos de puntos extendidos en una sola dirección y que puede ser ascendente, descendente vertical y horizontal…vamos: una línea* Otra*: sucesión de puntos que cambian de dirección y que al final llegan al mismo punto que comenzó*

-M11: "*…estamos a puntito otra vez. …venga sigue…"*

-M19:" *…tooongo…"* (expresión burlona con la palabra cuyo significado es de trampa)

-M23:" *…pero en esta que has dicho puede ser círculo o línea curva cerrada, ¿no?*

-I: *si porque no te he dado más datos, valdrían las dos.*

-M5 y M19:" *… ¡¡¡línea!!! …"*

-I:" *…otra bolsita de triángulos isósceles*. (risas, abucheos y aplausos) "*…y seguimos: polígono de 4 lados de la misma longitud y de ángulos interiores iguales…"*

-M9:" *…o sea el cuadrado…"*

-M19:" *… ¡nos queda una para Bingo! …"*

-M11:" *…y a nosotras…"*

-I:" *…ángulo que mide 90º…"*

-M22:" *… Bingooooooooo…"*

-M23: _" *… a ver, a ver …"* (Se ríen)

M3 dice que M23 no sabe perder. La investigadora se levanta a por el premio

-M11:" *…a la el Bingo, a laaaaaa, qué fuerteeeeee, qué rico yo quiero el Bingo…"*, mientras mira a la investigadora y el premio (regalices)

3. Cierre de la sesión

-M3*:" …En la otra sesión organizábamos los mirábamos los polígonos y los clasificábamos por su forma. pero hoy mira que listas…"*

-M7:" *…Es interesante esto sí, a mí por qué no me enseñaron así, yo no me acuerdo por lo menos…"* (risas)

-M1:" *…Sí, y esto nos ayuda a explicar mejor las figuras a mis hijos (risas) lo de las diagonales me va a dar juego para este finde, ahora guille va a flipar conmigo…"* (su marido).

-M11*:" …Bueno y a mí para los listos de 5 que tengo este año…"*

La investigadora vuelve a decir el valor de lo que han visto hoy y es que se puede dar mucha información sobre una sola figura.

Sesión 5 y sesión 6

SESIONES 5 Y 6: 06/03/2024

Tabla 61

Orden de implementación de las actividades en las sesiones 5 y 6

Orden	N.º Actividad	Título de la actividad
1º	19	Descubriendo los cuerpos geométricos
2º	20	Clasificando cuerpos geométricos
3º	21	¿Qué tienes?
4º	13	Adivina adivinanza, mi triángulo.
5º	26	Diagonal y simetría cuadriláteros
6º	11	Descubriendo los Cuadriláteros con Geoplanos 3x3
7º	16	Teselamos con Pattern Blocks
8º	24	Formando Formas
9º	17	Hundir la Forma

Para alcanzar estos objetivos, la sesión se estructuró en 3 partes:

1.Bienvenida y breve recordatorio de la sesión anterior.

2.Puesta en marcha de las actividades planificadas relacionadas con la geometría bidimensional y tridimensional.

3.Cierre de la sesión.

1. **Bienvenida y breve recordatorio de la sesión anterior.**

Antes de comenzar, la investigadora una vez da la bienvenida hace un recordatorio de lo visto anteriormente en las dos sesiones anteriores y dando comienzo a una nueva dimensión geometría: los cuerpos geométricos.

En esta sesión, la investigadora ha colocado previamente el aula en forma con las sillas en forma de círculo, poniendo el siguiente recurso manipulativo estructurado: los cuerpos geométricos en el suelo. Están dispuestos de forma circular, al azar, con el objetivo de captar la atención de las maestras una vez van llegando al aula donde se realiza la investigación y cuyas sillas se encuentran alrededor de este material presentado para que vayan tomando asiento.

> -I:" *…Antes de nada, vamos a recordar, el primer día vimos la geometría unidimensional que era las líneas. En la segunda sesión empezamos a ver qué eran los polígonos (los que eran regulares-irregulares) los que no eran polígonos, sus características, vimos propiedades del triángulo como los ejes de simetría y a continuación vamos a dar comienzo esta sesión con otro bloque de geometría, la tridimensional y con ese recurso que estáis viendo: los cuerpos geométricos, que como veis tienen tres dimensiones: alto, largo y ancho…".*
>
> -M1:" *…Yo tengo una caja de mi madre (va a por ella y la muestra) con muchos cuerpos geométricos. Es que mi madre era maestra. …"*
>
> -M18:" *…Yo tenía una y me la robaron, no sería tu madre …"* (risas)

2.Puesta en marcha de las actividades planificadas relacionadas con la geometría tridimensional.

Actividad 19: Descubriendo los cuerpos geométricos

Figura 65

Disposición del material tridimensional

La investigadora continua y les indica que trabajarán con las que ella ha traído en otra caja, ya que tiene dos cajas con el mismo número de piezas. En ese momento, abre otra caja y les indica la primera instrucción:

> -I:" *…idlas pasando una por una, para tocarlas, y las tocáis, busquéis a cuál es de las que están en el suelo, es decir, las identifiquéis entre el tacto y la vista…"*

Las maestras empiezan a pasar las figuras de mano en mano, comprobando las diferentes propiedades de las figuras de forma táctil y visual (arista, vértice, cara y base).

> -M19:" *… ¿Pero solo tengo que mirar, o las tengo que coger, las del suelo digo? …"*
>
> -I:" *…tienes que mirar las del suelo para encontrar la que tú tienes en la mano.*
>
> -M3:" *…Es para ver que sientes…"*
>
> -I:" *… Si, pero de forma literal (risas). Las tenéis que tocar porque luego el siguiente juego no vais a poder verlas, sol tocarlas y averiguar cuál es…"*
>
> -M19:" *…A ver, son fáciles si no me pides cómo se llaman. …"*

-M13:" *…Es muy fácil es el oaoedro…" (hace broma pareciendo que dice los nombres)*

- M1:" … *Pero que hay que hacer…"*

-M3:" *…tu toca M1…"*

-M20:" *…Mira la pirámide de Keops…"*

-M23:" *…Este es un cono cortado…"*

-M11:" *…El cilindro me lo quedo…" (risas)*

-M3:" *…Este cuántos ángulos tiene, a vale 6, hexágono…" (refiriéndose a las caras del cubo).*

- M19:" *…Pero que no hay que decir el nombre no vayas de lista…"*

Actividad 20: Clasificando cuerpos geométricos

-I:" … *"Ahora que ya conocéis las figuras tridimensionales y las habéis tocado, vamos a dar un paso más. Vamos a mirar todas las figuras que tenemos en el suelo y a buscar parecidos entre ellas. Algunas pueden parecerse por su forma, otras por su base, otras por si ruedan o no…Lo que quiero que hagáis es formar pequeños grupos o conjuntos de figuras que, para vosotras, tienen algo en común. No os preocupéis si no estáis seguras del nombre exacto. Lo importante ahora es que expliquéis por qué las habéis agrupado así. Podéis usar vuestras propias palabras, e iremos poniendo en común los criterios que van surgiendo. Así empezaremos a ver que hay propiedades que se repiten, y que podemos usar esas semejanzas o diferencias para clasificar los cuerpos geométricos…"*

-M3:" *…Venga pues los cuadrados, este con éste, y éste… y empieza a cogerlos y agruparlos…"*

El resto empieza a participar señalándoles a las tres voluntarias que se han agachado.

- M20:" *…los pinchitos en otra, los picos…"*

Sale la primera clasificación, 3 conjuntos: picos, cuadrados y redondos.

Figura 66

Clasificación de los cuerpos geométricos

Se quedan mirando, pero M9 dice que no está de acuerdo ya que dicen que estas tienen cara rectangular (señalando le grupo que está más arriba de la figura) y puede ir en el grupo de allí. (señalando la agrupación de las que están a la derecha).

-M9:" *…Ya, pero es que esos* (cuadrados*) también pueden ir en esta porque mira tienen la base cuadrada…" (*refiriéndose a los prismas).

Entonces se levantan M19 y M13 y cambian la disposición, haciendo una nueva agrupación con las figuras que tienen algún elemento redondo o curvo.

Figura 67

Clasificación de los cuerpos geométricos (2)

-M20:" … *Pero bueno es que aquí cada una tiene su criterio…" (queriendo explicar que hay diversas opciones)*

- M11:" …*Claro está bien lo que dice M10…"*

La investigadora les recuerda que al igual que el otro día vimos que los polígonos podrían clasificarse de distintas formas dependiendo del criterio, aquí ocurre lo mismo.

-M18 le pregunta a M11:" … *¿por qué ha puesto el cono en el grupo de los redondos con el cilindro y no de los pinchos? …"*

-M11:" …es *que la base es redonda…"*

M16 se levanta y coge la figura para comprobarlo

- M20:" … *Es que yo pondría este que tiene triangulito allí…"* (en la otra agrupación)

- M3:" … *¿pero la base de la pirámide no es cuadrada? …"*

- M20:" …*depende, que esa la tiene de círculo…"*

Empieza a cambiar todo en función de la base, ahora los llama *triangulitos* y no pinchos. Surge nuevo debate entre ellas.

Figura 68

Clasificación de los cuerpos geométricos (3)

-M19:" …*Yo sigo preocupada como ahora nos pregunte los nombres…"*

-M13:" …*Que no pasa nada tú le dices, es como un gorro de gnomo, una pirámide, una rueda…. Y ya está…"*

Actividad 21: ¿Qué tienes?

La investigadora recoge esas figuras, y mete otras en una bolsa negra opaca. Hay las mismas figuras tanto fuera como dentro de la bolsa y les indica lo siguiente:

-I:" …*Vamos a hacer ahora un juego distinto. Aquí tengo una bolsa opaca con algunas de las figuras que ya conocéis. Son las mismas que tenéis a la vista sobre el suelo. Haré una primera ronda de prueba para que veáis cómo funciona. Yo mostraré una figura a la persona que está jugando, y ella deberá meter la mano sin mirar en la bolsa, y extraer* *esa misma figura. El objetivo es que comprobéis si podéis identificar las figuras solo por el tacto, usando el reconocimiento…"*

(Todas van probando y van aplaudiendo cuando aciertan).

-M16:" … *Ay, yo quiero jugar a esto…"*

Todas hacen una ronda. A continuación, les indica otra actividad:

-I:" … *"Ahora vamos a continuar el juego, pero esta vez por parejas.*

Yo le daré a una persona de cada pareja una figura. Esa persona deberá darle pistas a su compañera (que no puede verla figura) diciendo propiedades del cuerpo geométrico para que, una vez tenga la mano introducida en la bolsa, adivine usando solo el tacto, y guiada por las pistas que le dé su compañera, el cuerpo geométrico en cuestión…"

Primera pareja: M3-M12

-M3:" … *Tiene 6 lados, con forma de cuadrado y es un cuerpo geométrico con volumen, se puede ver por todos sus lados, y …todas sus caras son iguales) …"*

-M12:" *…muestra la figura correcta…" (el cubo)*

Segunda pareja: M18 y M13

- M18 a M13:" … *"es un cuerpo geométrico, con volumen, cuerpo alargado, base de 2 cuadrados, el resto son rectángulos, son 4 rectángulos, se puede ver por todos los lados…".*

M13 acierta (aplausos)

- M23:" *…Muy divertido muy divertido esto si si si. Si tuviera el material lo haría…" (y mira a la directora de Infantil que también participa) (risas)*

La investigadora mientras recoge, explica que este juego se puede realizar tanto en Infantil como en Primaria, pero ajustando el nivel, además es que estamos trabajando muchos sentidos que es muy importante además para realizar actividades como nos dice el DUA Y del Real Decreto. *(Algunas murmullan y no saben muy bien qué es)*

M21 les explica el término:

" *…hay que proponer actividades para todos los alumnos y la importancia de hacer actividades con diferentes sentidos (visual, táctil, auditivo). Es el Diseño Universal de Aprendizaje…"*

La investigadora les indica que van a cambiar de actividades, les recuerda que en la sesión anterior trabajaron los tipos de triangulo según sus lados y las simetrías.

Hoy van a ampliar esos contenidos. Mientras lo dice, va colocando el nuevo material en el suelo. Es un cuadro de doble entrada (en la columna los triángulos según los lados y en la fila según los ángulos) con la cuadricula vacía, por otro lado, coloca imágenes de distintos triángulos, y, por otro lado, definiciones en papel.

Actividad 13: Adivina adivinanza: mi triángulo.

Les indica que van a ver los tipos de triángulos atendiendo a sus ángulos:

-I:" … *Ahora vamos a ampliar lo que vimos en la sesión anterior sobre triángulos*, vamos a incorporar una nueva clasificación: la que se basa en sus ángulos. *Para ello, vamos a usar este cuadro de doble entrada*: *…En la columna tenemos los triángulos según sus lados: equilátero, isósceles y escaleno. Y en la fila, vamos a colocar los triángulos según sus ángulos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo. A medida que os vaya leyendo definiciones, vamos a ir ubicando cada definición en el lugar correcto del cuadro con la imagen, según sus lados y ángulos."*

(Empiezan a leer los nombres) M19 empieza a leer en alto,

:" *…acutángulo, obtusángulo… Ese día yo me puse mala…" (*refiriéndose a cuando ella era alumna y que en ese momento no lo recuerda).

Primero recuerdan los triángulos de acuerdo con los lados, y la investigadora les empieza a decir las definiciones y lo van incorporando al cuadro de doble entrada. A continuación, se ponen con la clasificación, los nombres de las propiedades de los triángulos según los ángulos

-M18:" *…yo no me quedo con los nombres…"* (Cuando están viendo los tipos de triángulos según los ángulos)

-I:" *… tenemos el que tiene tres lados iguales y además los tres ángulos iguales, que son los tres agudos, y por se llama acutángulo…"*

-M5:" *…por eso el equilátero se llama Acutángulo también!, esto lo he visto con mi hijo, pero no había caído en el por qué…"*

-I:" *… el isósceles, dos lados iguales y ángulos también agudos. Y el escaleno que tienen los tres lados distintos…"*

-M1*…Espera que mi cerebro necesita unos segundos para pensar lo que dices…" (risas).*

-I:" *… ahora vamos a ver qué triangulo tiene un ángulo recto…"*

Todas señalan el rosa, pero M23 y M1 también dicen que el verde. M11dice que no porque que el verde tiene los lados distintos.

La investigadora lo confirma y M3 va pensando en alto:

-M23:" *…el nombre de rectángulo para el rosa y para el verde es rectángulo, solo que el verde es a la vez escaleno porque sus tres lados son distintos…"*

- M23:" *… vale ya lo veo…"*

- M3:" *…A las mentes privilegiadas ya nos cuadra…"*

-I:" *… muy bien y vamos a ver este: tres lados iguales y un ángulo recto.*

Todas rápidamente dicen que no existe

-I:" … ¿y tres lados iguales y un ángulo obtuso? *…"*

-M18:" *… ¿Ese era el que era más de 90 no? …"*

-M19:" *… si…"*

Todas dicen de nuevo que no puede ser.

-I:" *… venga nos queda el isósceles con un ángulo obtuso…"*

-M23:" *… el amarillo…"*

-I:" *…queda el escaleno y ángulo obtuso, el azul…"*

-M21:" *… Haced una foto por favor para tener esto de recuerdo…"*

Se cierra la actividad indicando que ya han visto todas las propiedades de los triángulos según los lados, los ángulos y la simetría. Así que van a pasar con otras figuras, las que se forman al añadir una línea más, las de 4 lados.

Ahora pasan a otra figura, los cuadriláteros, con la siguiente actividad.

Actividad 26. Diagonal y simetría cuadriláteros

Primero la investigadora recuerda el nombre de las figuras que vieron en la anterior sesión: los cuadriláteros, paralelogramos y no paralelogramos. Les indica que van a ver nuevas propiedades doblando y dibujando: las simetrías, como hicieron con los triángulos. Entre todas recuerdan el nombre de cada figura a analizar: Cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, trapecio y trapezoide.

La investigadora les reparte una figura a cada maestra de figuras recortadas de papel que lleva la investigadora. Y les indica lo siguiente:

> -I:" *… hoy vamos a continuar con lo que trabajamos la sesión pasada: los cuadriláteros, y dentro de ellos Estas 4 figuras tienen algo en común (los paralelogramos), a ver si averiguáis el qué…"*
>
> -M16:" *…Los lados, que todos tiene 4 esquinas y 4 lados…"*
>
> -I:" *… ¿Podemos ver si en todas las figuras los lados son iguales? …"*
>
> -M13:" *… No, solo en 2…"*
>
> -M11:" *… En 3…"*
>
> -M23:" *…En 2…"*
>
> -M11:" *… En el rombo y en el cuadrado…"*
>
> -I:" *… ósea que solo que sean iguales dos a dos en el cuadrado y en el rombo…"*

M21 dice que no, que el rectángulo también.

> -M1*:" ... Aquí tengo un rectángulo. Sabemos que es un cuadrilátero porque tiene cuatro lados, y además, sus ángulos son todos rectos. Sí, pero el cuadrado también tiene cuatro ángulos rectos. ¿Cuál es la diferencia entre un rectángulo y un cuadrado de forma formal a ver espera que piense como lo diríamos? …"*
>
> -M6*:" ... La diferencia está en los lados, ¿no? O sea, es que, en un cuadrado, los cuatro lados son iguales, ¿pero en un rectángulo solo los lados opuestos? se dirían que son iguales…"*
>
> -M1*:" …Vale guay, entonces, podemos decir que los cuadrados también son rectángulos, pero no todo rectángulo es un cuadrado, porque el cuadrado cumple con todas las propiedades del rectángulo yyyyyyyyy: que el cuadrado tiene todos los lados iguales, tommaaaaa ya somos listas…"* (risas)
>
> -M3:" *… Vale, pero entonces una cosa, estos son paralelogramos, que son cuadriláteros…"*
>
> -I:" *…Eso es, hay más cuadriláteros, pero no son paralelogramos. Que si os fijáis se llaman así porque sus líneas son paralelas. Por eso vimos en las otras sesiones las líneas paralelas…"*
>
> -M19:" *…Andaaaaaaaa mira que nos organiza los contenidos, muy bien, gracias…" (risas)*
>
> -M18:" *… vale entonces estos son paralelogramos porque sus líneas son paralelas…*

Y empiezan a revisar todas de nuevo para comprobarlo.

> -M9:" *… Y 3 de ellos son simétricos mira…"*
>
> - M3:" *… Ya está la empollona…"*
>
> *(El resto la abuchea de broma)*
>
> -I:" *… Venga pues vamos a comprobarlo, vamos a hacer como con triángulos, y vamos a comprobar la simetría, id doblando las formas a ver que sucede…y cuantos ejes de simetría tiene cada figura…"*
>
> -M1:" *… Todos 2…"*
>
> -M21:" *…El cuadrado tiene 4…"*

Empiezan a comprobar si el rectángulo también y dicen que 2.

- M11:" *…Todos 2 menos el romboide. Este también do s(refiriéndose al rombo) menos el romboide…"*

- M10:" *… Nooo que el cuadrado tenía más, mira (y le enseña la doblez) …"*

Una vez verifican todas las formas, la investigadora les explica la diagonal, y les dice que lo dibujen en cada figura con el rotador, para diferenciarlo de la simetría. Cuando les explica que es una línea que va de un vértice a otro vértice no consecutivo, es decir, que no es al lado, se quedan con cara de no entender las palabras y de estar procesando la información.

- M1:" *… A ver… dilo con palabras claras…"*

- M3:" *… a ver espera que piense tus palabras en mi mente…"*

La investigadora les pone un ejemplo con el cuadrado. Las maestras empiezan a probar.

Empiezan a doblar las figuras atendiendo a la búsqueda de las diagonales.

descubren cómo pueden doblar apareciendo las diagonales y simetrías.

Se dan cuenta que las diagonales si se repiten, pero las simetrías deciden dibujarlas.

-M6:" …todos los cuadriláteros tienen 2 diagonales *…"*

M1 lo confirma, pero dice que sin embargo ejes de simetría no.

-M6 lo comprueba y se da cuenta que el romboide no tiene…"

-M1:" *… esto xxxxx (su hijo) yo creo que no ha visto tía y está en Primaria, se lo voy a enseñar este finde…" (risas).*

-M11:" *…solo tiene una, el rombo…"*

-M20:" *…No mujer dos, mira…"*

-M11:" *… es verdad…"*

-M3:" *… Claro es que una cosa es la diagonal y otra el eje…"*

-M21:" *… Claro en el cuadrado si coincide mira…" (y lo muestra).*

-M18:" *… entonces a ver en el romboide la diagonal, a pues también dos…"*

-M11*:" …A ver, ya tengo el rectángulo, las diagonales son iguales y se cruzan en el centro o sea que todas serán así porque todas tiene 4 lados y 4 esquinas, o sea vértices…"*

-M23:" *…Espera vamos a probar. AAAA pue si claro tía yo si no lo veo no puedo asegurar. . Pero una cosa, son líneas distintas mira, o sea la diagonal se cruzan, pero no son líneas iguales, peso da igual…"*

-M11*:" …ver yo creo que da igual eso vamos a preguntar (la instructora dice que efectivamente no importa y les hace una pregunta ¿podemos saber cómo es un tipo de cuadrilátero según nos digan cómo son sus diagonales?*) *…" (*se ponen a investigar).

-M3:" *…a ver si nos dices por ejemplo que las diagonales que se cruzan en el centro y son iguales, sabemos que es un rectángulo…".*

-M23:" *…o un cuadrado…"*

-M11:" *…bueno si nos ponemos exquisitas sería si nos dice que todos los lados son iguales…".*

-M3:" *…aaaaaaa claro…"*
-M23:" *…esto seguro que las otras no lo han sacado …"* (risas).

La investigadora ya de forma grupal les hace otra pregunta *"… ¿qué pasa con los polígonos de más lados…?"*

-M5*:" …Bueno, pues a ver si por ejemplo uno de 6 lados* ("hexágono" le dice M20), *las diagonales también se cruzan en un punto específicos y dividen el hexágono en triángulos…"*

*(*Lo ponen a prueba y ven que salen triángulos)

-M19:" … ¡estos eran los equiláteros! *…"*

-M14:" *…Entonces, esto pasará en todas las figuras, o sea que van saliendo más diagonales siempre, pero no simetría…"*

La investigadora les hace ahora otra pregunta *trampa:*

-I:" *… ¿Cuántas diagonales tienen los triángulos? …"*

-M18:" *… ¿pero qué triángulo? …"*

-I:" *… Cualquier triángulo…"*

-M13:" *… ¿de los que tenían cuerpo? …" (Refiriéndose a los cuerpos geométricos)*

La investigadora le dice que no que se refiere a las figuras plana de tres lados.

-M22 y M19:" *… No tienen…"*

-M23:" *… Claro porque si tienen que ser no consecutivos no hay suficientes vértices…"*

-M3:" *…claro es que, si intentas hacerlo la final estas pintando el lado, la línea…"*

-M13:" *… Nada de eso, olvídate. No nos has pillado…"*

-I:" *…Ya sabéis una cosa más, los triángulos si tiene simetría, pero no diagonales…"*

La investigadora les dice de hacer un recopilatorio de información

-I:" *… Todas son paralelogramos ¿qué más? …"*

-M20:" … Que *son cuadriláteros…"*

-M1:" *… Todas tienen 4 lados y 4 vértices. Los ángulos del cuadrado y rectángulo son iguales. Los lados iguales son solo en el cuadrado y en rombo. La figura que tiene más ejes es el cuadrado. El rectángulo y el rombo 2. El romboide ninguno…"*

- M18:" *… ¿Y entonces cuales son los que no son paralelogramos? …"*

- M5:" *… el trapecio y el trapezoide…"*

-Todas:" *…Ya está la de Primaria, la lista, la de enero…" (broma refiriéndose en educación a los niños que son de enero frente a los de diciembre) (risas)*

-M13:" *… Vale esos son cuadriláteros, pero no paralelogramos valen vale…"*

Cambio de actividad rápidamente para que no se pongan a hablar entre ellas

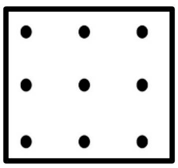
Ahora la investigadora saca unos folios, son geoplanos 3x3.y les dice:

-I:" *… ¿os acordáis del geoplano? …" (Todas* asienten)

Actividad 11: Descubriendo los Cuadriláteros con Geoplanos 3x3

Figura 69

Plantilla actividad 11: Geoplano en papel



La investigadora les explica que, si no tienen Geoplanos en el aula, pueden utilizarlo en papel, incluso en Infantil. La investigadora les indica la siguiente instrucción:" *… en cada uno de los geoplanos 3x3debeis dibujar una figura de 4 lados, con la condición de que siempre debe ser línea poligonal cerrada y siempre diferentes."*

Las maestras (M21, M19, M3 y M22) comienzan a dibujar en los geoplanos y van comentando, mirando las que están haciendo las otras.

- M23:" *… ¿pero no tienen que ser regulares, ¿no? …"*

M3 se queda bloqueada. La investigadora confirma de nuevo que *los lados no tienen que ser iguales.*

M19 le ayuda y mientras sale M9 a hacer otro, y un poquito después sale M1. La investigadora les dice que hay más opciones.

M4 sale a hacer otro, pero se equivoca *(risas)* pero dice que se queda ahí hasta que le salga. Todas se quedan mirando

- M3:" … *¿te sientes observada M4? …"*

Figura 70

Maestras realizando nuevas opciones de cuadriláteros en el Geoplano

Sale M20y hace otro

- M4:" … ósea gracias (mirando a M20) ...*"* (Risas)
- M20:" … *lo siento la siguiente te chivo…"*
- M4:" … *bueno yo estoy creando dejadme…"*

Las maestras comparan todos hasta que ya no se les ocurre más y ven que han creado diferentes tipos de cuadriláteros.

-I:" … *vale pues ahora vamos a comentarlas* y les anima a que indiquen que están observando*…"*

-M10:" …*Pues que hay algunas son más rectas, o sea más regulares y otras más no porque están como inclinadas…"*

-M21:" … *El cuadrado y el rectángulo esos tienen ángulos que son perfectos en sus vértices…"*

-M4:" … *Pero los que dibujamos M19 y yo no tienen esos ángulos tan exactos…"*

-M19:" …*Sí, los lados parecen inclinados y algunos son más largos que otros.*

-M23:" … *Y la mía… se ve como si se doblara hacia adentro. No es como las demás. ¿Esa era cóncava? …"*

-I:" … *Eso es porque es un cuadrilátero cóncavo. A diferencia de los demás, que son convexos, este tiene un ángulo que "entra hacia adentro"…"*

-M4:" … *tía yo me llevo y lo saco veréis. A las 12 de la noche: chicas lo tengo…"* (risas)

Cierra la actividad explicando que el Geoplano sirve para mostrar y entender a los estudiantes las futuras tablas de doble entrada, pero también con las coordenadas, que van a hacer en esa misma sesión, pero con otros juegos. Les muestra tipos de Geoplanos de madera y ellas dicen que eso es muy fácil de hacer para tener en el centro.

M18 pregunta si el de madera es casero. La investigadora le indica que ese justo no.

> -M11:" *... podríamos pedirlo a ver si nos lo compran…"*
>
> -M20:" *... a ver si es una madera y unos tacos! Los podríamos hacer. Eso me lo hago yo en un rato, os cambio patio por geoplanos…"*

Y la investigadora les indica cambio de actividad, hace la transición a los siguientes talleres, Para los siguientes talleres, van a hacer tres equipos o grupos, y les explica lo que van a hacer en cada uno de ellos, y que se van a ir turnando.

Primero les enseña otro recurso didáctico estructurado, los *Pattern Blocks* o bloques geométricos.

> - M19:" … ¡*esto si tengo yo en mi clase! ..."*

Y les indica que tiene cada forma un color, pero que dependiendo de dónde lo compren, el código de color varía.

> - M23:" … *¿es como el Tangram? ..."*

La investigadora le indica que no, es estos son grupos de figuras, normalmente casi todas figuras regularles, el tangram son solo 7 piezas. Les explica que ahora van a trabajar en 3 equipos, y que cada equipo hará un taller distinto. Y que a los 20 minutos rotarán aproximadamente.

> - M20:" … *Trabajo por rincones…" (se ríen) (refiriéndose a la metodología en Infantil de trabajar por rincones y áreas de aprendizaje como el rincón de arte, simbólico, de naturaleza, de matemáticas…).*

La investigadora empieza a explicar los talleres: *En un equipo vamos a hacer teselaciones*

> -M23:" *... ¿perdona? ..." (Se ríen)*
>
> -I:" *... a ver mosaicos, pero hay que cubrir todo el plano de la mesa sin huecos. En otra mesa tendremos el juego de Hundir la forma con los geoplanos…"*
>
> -M1:" *... Que chulo que guay…"*

A continuación, se explica cada uno de esos talleres.

Actividad 16: Teselamos con Pattern Blocks

Figura 71

Maestras realizando la actividad 16

En esta parte de la sesión, las maestras se colocan por equipos, porque en cada mesa del aula van a realizar distintas actividades, la investigadora les explica primero qué van a hacer en ellas. Cambiarán de actividad a los 15 minutos aproximadamente.

En este taller o actividad, las maestras cuentan con material de bloques geométricos o también conocidos como *Pattern Blocks*. Este material tiene un código, cada forma de un color distinto. Hay hexágonos, rombos, cuadrados, trapecios, círculos, triángulos equilátero semicírculos y trapezoides. El objetivo de esta actividad es descubrir que hay figuras con unas características más adecuadas para completar el plano, siendo son los polígonos regulares, y en concreto en este caso el hexágono o dos trapecios en su transformación.

La investigadora les indica la instrucción:

> -I:" *…En esta actividad, con los Bloques geométricos o Pattern Blocks hacemos teselaciones, es decir, tenéis que cubrir el máximo posible del plano, de la mesa, evitando que queden huecos entre las piezas, debéis explicar la elección de las figuras…"*

Para grabar las mesas, se utilizan diferentes móviles que posteriormente facilitan a la investigadora los videos, y así poder recoger toda la información.

Equipo 1: conformado por M13, M16, M5, M1

Empiezan a colocar las piezas sobre la mesa y prueban diferentes combinaciones.

M5 empieza utilizar los hexágonos y el resto la siguen

> - M1:" … *mira queda simétrico es como una flor ahora le ponemos pétalos. Empiezan a poner semicírculos a los bordes de los hexágonos…"*
>
> - M5:" …*Como pongamos pétalos se nos acaba porque son redondos y se van a chocar unas con otras, no va a cuadrar bien. entonces en todo caso habrá que poner algo así (y coge un rombo encajando entre dos hexágonos) porque esto sí que cuadra…"*

Así que empiezan a cambiar los pétalos de semicírculos a rombos. (detectan una propiedad de esa figura, si son redondas es más difícil teselar, y el rombo encaja en el hexágono)

> - M1:" …*esto ya no es una flor, esto parecen los azulejos de mi baño…"* (se da cuenta que las figuras son características del entorno que nos rodea)
>
> -M16:" …*entonces esto no vamos a poder ponerlo nunca…" (refiriéndose a los semicírculos)*
>
> - M5:" …*sí, para bordear cuando no tengamos más piezas. Además, mira los círculos pues los hacemos con éstos (cogiendo semicírculos y uniéndolos) y es un mosaico en relieve, así usamos todas, que ha dicho que tenemos que usar todas, pero sin que queden huecos. Lo chulo de esto es que como no te dan muchas indicaciones, hay que crear…"* (M5 es la motivada y la líder de este equipo sin duda)

Marta empieza a poner sectores circulares y la empiezan a decir, que no haga eso,

> -M1:" … *M16 es la de diciembre…"* (refiriéndose a que en Infantil, los de diciembre por ser más pequeños van siempre más retrasados en cuanto a entender cosas que los de enero, típica frase que se dice entre profes. "es de diciembre") (empiezan a chascarrear y gastar bromas relacionadas con el colegio)

Siguen incorporando piezas convirtiéndolo en una especie de flor, fruta tropical (según M1), intentan utilizar el trapecio, pero dicen que no cuadra.

La investigadora en este momento les recuerda que el objetivo es que cubran el máximo de mesa, no que quede un dibujo chulo, así que se ponen a hacer por otro lado la unión de trapecios

> -M13:" …pregunta si entonces esto tiene que tener continuidad y dudan, las profes de otros equipos intervienen y dice que *tiene que estar todo pegado…"*
>
> -M5:" *…chicas entonces no lo estamos haciendo bien…"*
>
> -M16:" *…aquí todas somos de diciembre e…" (risas)*
>
> - M16*:" …Voy a empezar con estos cuadrados. que, encajan perfectamente…"*
>
> -M22:" *...Sí, y con los rombos también se pueden llenar espacios…"*
>
> -M4:" *…con círculos no chicas, las descartamos, aunque los semicírculos si las podemos usar al final que tienen una parte recta…"*
>
> -M16:" *…Pero habrá que unir todo, ¿no? bueno vamos juntando y a ver ahora que hacemos con el resto Entonces, ¿qué figuras sí sirven para llenar todo el espacio sin dejar huecos? …"*

Equipo M3- M23-M18- M20

> - M20:" *…vamos a empezar por los hexágonos porque es la que más lados tiene y es regular, así llenaremos la mesa mejor…"*
>
> M18 pregunta si tienen que estar todas las figuras pegadas. y empieza a poner figuras.
>
> - M20:" *…muchacha noo que nos rompes la simetría…"*
>
> (Descubren propiedad de la simetría de una composición)
>
> - M18:" *…perdón perdón…"*
>
> - M23:" *…Mira con estas, con los trapecios hacemos más hexágonos…"*
>
> - M20:" *…mete ahí los rombos picudos (una de las figuras de los pattern blocks). Nos podemos dedicar a ésto. Hay vidrieras que son así. …" (*aparece el entorno y la geometría)
>
> - M23:" *…esto me flipa…"*
>
> - M20:" *…nos está quedando precioso…"*

Llaman a la investigadora para que les haga foto:

> - M23:" *...somos el equipo teselaciones* (les hace mucha gracia el nombre, no lo habían escuchado nunca)

Cierran la composición con los semicírculos y deciden hacer otro pero empezando también por el hexágono, que es el que tiene más lados.

La investigadora una vez termina el tiempo de la actividad les pregunta resultados que han visto en relación a las formas

> -M18:" *…Parece que las figuras regulares funcionan mejor para ésto…".*
>
> -M3:" *…Exacto. El cuadrado, el triángulo equilátero y el hexágono son figuras regulares y cubren el plano perfectamente…"*
>
> -M20:" *…Pero el trapecio no es regular y también… …"*
>
> -M23:" *…eso eso, que dos trapecios juntos hacen un hexágono, que sí es regular. …"*

Actividad 24: Formando Formas

En esta parte de la sesión, las maestras se colocan por equipos, porque en cada mesa del aula van a realizar distintas actividades, la investigadora les explica primero qué van a hacer en ellas. Cambiarán de actividad a los 15 minutos aproximadamente.

En este taller o actividad, las maestras cuentan con material de bloques geométricos o también conocidos como Pattern Blocks. Este material tiene un código, cada forma de un color distinto. Hay hexágonos, rombos, cuadrados, trapecios, círculos, triángulos equilátero semicírculos y trapezoides. El objetivo de esta actividad es descubrir propiedades de las figuras a través de composición y descomposición de las figuras geométricas, Por ejemplo: construye un hexágono con 3 triángulos y un trapecio.   Tiene tres niveles de dificultad: rosa-fácil; azul-medio; rojo-difícil. Todas las tarjetas se encuentran en el Anexo III.

En esta actividad hay dos maestras que no han podido asistir y lo harán en su hora de la comida al día siguiente.

La investigadora les indica la instrucción:

> -I:" …*En esta actividad, con los Bloques geométricos o Pattern Blocks tenéis que leer las instrucciones de las tarjetas y componer esa figura que os indica…"*

Grupo M9, M19, M21, M4 y M22

Figura 72

Maestras configurando las formas a través del material

-M9*:" …me encantan estos retos…".*

-M19 y M21 se miran y se ríen diciendo…*madre esto que difícil verás…".*

Empiezan a hacer las tarjetas más fáciles, y les va saliendo así que piden las rojas (las difíciles) (Cada vez que les sale una tarjeta aplauden)

M9:" …*Esto me está encantando, esto es facilísimo…"*

M22:" …*Bueno, no te flipes que somos 5 para hacerlo…"*

Se dan cuenta que todas las piezas salen son regulares.

M23- M3-M18 (en este grupo iba M20 pero se tuvo que marchar antes)

En este equipo participa la hija de M23 (una de las maestras, y que la investigadora tiene consentimiento para que la alumna salga en los vídeos y fotos).

Empiezan a hacer las tarjetas, siendo XX, la hija, la que coge las figuras y las va uniendo,

En una de las tarjetas tienen que hacer un hexágono con 6 triángulos.

> - M23:" …*, si si mira como los quesitos del trivial (mientras une las esquinas) lo consiguen y aplauden…"*
>
> En la siguiente tarjeta la indicación es hacer un hexágono, pero con un rombo y 4 triángulos.
>
> - M18:" …*pero si es igual…"*
>
> - M23:" …*no, o sea si pero con otras formas…"*

(M3 empieza a tomar el pelo a M23 y coge uno de los triángulos equiláteros y lo gira y dice que mejor así). (Se ríen) En ese momento se dan cuenta que, si giran esa forma, da igual (buena propiedad de los polígonos regulares)

Siguen con las tarjetas rojas-nivel difícil.

- M23:" … *mira si, juntando tres triángulos sale un trapecio…"*

- M3…*alaaaaaaa oleeee…"*

Mientras, M10 y M6 Empiezan con las tarjetas, y el nivel rojo (difícil) se frustran y deciden hacer otras dejando alguna sin construir ni conseguir.

Actividad 17: "Hundir la Forma"

Después la investigadora explica el juego con el geoplano y deben adivinar la figura dibujada del contrincante.

-I:" …*Vais a jugar a la adaptación de Hundir la flota, se llama* <u>*Hundir la forma,*</u> *teniendo en cuenta los tipos de triángulos. Reglas del juego:*

✓ *Cada maestra debe "crear "su triángulo en su geoplano.*

✓ *La contrincante dirá una coordenada.*

✓ *Solo podemos decir si es lado, vértice, exterior o interior.*

✓ *Cuando la contrincante lo tenga casi claro, puede usar un comodín, y decir una descripción para corroborar su idea, mencionando una característica del triángulo (por ejemplo: "Tiene un ángulo recto" o "Tiene tres lados iguales").*

✓ *Si la maestra tiene un triángulo con esa característica, debe decir "¡Tocado!" y, si es el último acierto de ese triángulo, dirá "¡Hundido!".*

✓ *Solo se podrá utilizar vocabulario geométrico apropiado, si no es así, pierdes turno. Por ejemplo, decir raya en vez de lado, o esquina no vértice.*

✓ *Gana quien descubra primero el triángulo de su compañera. …"*

- M4:" …*Venga que nos deja la chuleta ahí puesta…" (refiriéndose al cuadro de doble entrada)*

Se ponen con el juego (por parejas)

- M19:" …*Voy a empezar.: si tienes un triángulo que tenga un ángulo recto…"*

- M10:" … *(Mirando su geoplano) ¡Sí! El tuyo tiene los tres lados iguales…"*

- M19:" … *no, pero el tuyo esssssss triángulo rectángulo, porque tiene un ángulo recto…"*

- M10:" … *pues ala ya está…" (risas)*

<u>Otra pareja</u>

-M17:" … *¿tienes un triángulo con todos sus lados iguales? …"*

-M7:" …, *y tú?*

-M17:" …*no. ¿Tienes un triángulo con todos los ángulos distintos? …"*

-M7:" …*sí, y tú? …"*

-M17:" …*yo no, pero el tuyo es un escaleno…"*

-M7:" …*noooo te has equivocado…"*

-M17:" …*aiiii que tiene que ser los lados distintos vale vale. …"*

3.Cierre de la sesión

-I:" … ¿Qué recordamos? ... *"*

-M17:" … Que los triángulos pueden clasificarse según sus lados: pueden tener tres lados iguales (equilátero), dos lados iguales (isósceles) o todos diferentes (escaleno). ... *"*

- M11 :" … Y también según sus ángulos: pueden tener un ángulo recto (rectángulo), un ángulo mayor a 90° (obtusángulo) o todos menores a 90° (acutángulo)… *"*

Sesión 7 y sesión 8

SESIONES 7 Y 8: 24/04/2024

Tabla 62

Orden de implementación de las actividades en las sesiones 7 y 8

Orden	N.º Actividad	Título de la actividad
1º	22	Cuadro de doble entrada
2º	12+28	Doblado de papel: círculo y óvalo + Descubriendo propiedades geométricas
3º	15	Yo tengo, quién tiene
4º	23	¿Quién es quién? Geométrico
5º	29	Completando bi-información
6º	27	Sumando ángulos
7º	18	Artistas matemáticos
8º	30	Concurso final
9º	8	Kahoot

Para alcanzar estos objetivos, la sesión se estructuró en 3 partes:

1.Bienvenida y breve recordatorio de la sesión anterior.

2.Puesta en marcha de las actividades planificadas relacionadas con la geometría bidimensional y tridimensional.

3.Cierre de la sesión.

1.Bienvenida y breve recordatorio de la sesión anterior.

Para esta última sesión, la investigadora coloca de nuevo la clase en modo asamblea con las sillas en semicírculo para que cuando lleguen las maestras se vayan sentando. En primer lugar, y con una cartulina tamaño grande donde tiene dibujado un eje cronológico van haciendo un resumen de todos los contenidos que han ido viendo a lo largo de las anteriores sesiones, dado que las sesiones se han ido haciendo una vez por mes.

Recuerdan en primer lugar la geometría unidimensional, veían los tipos de líneas.

Con las dos dimensiones, revisan qué era el polígono y sus propiedades y las posibles clasificaciones: los lados, los ángulos, la simetría y diagonal, si eran regulares -irregulares. En concreto vieron las propiedades de triángulos y cuadriláteros.

Les explica que, en la sesión de hoy, verán las figuras no poligonales como el círculo y el rombo; analizarán los cuerpos geométricos y terminarán con la fase 5 Van Hiele, Integración, que servirá a modo de evaluación.

2. Puesta en marcha de las actividades planificadas.

Actividad 22: Clasificamos los cuerpos geométricos

La investigadora le da la vuelta a la cartulina con el resumen de las sesiones anteriores y tiene hecho un cuadrante con la clasificación de los cuerpos geométricos y unas definiciones con el objetivo de irlas leyendo y que vayan colocando la definición en el sitio correspondiente, mientras lo prepara va explicando qué son los cuerpos geométricos, explicando los poliedros y los cuerpos redondos o de revolución.

Mientras están leyendo las definiciones y las han colocado en el cuadrante, la investigadora saca las figuras de madera, y otras figuras hechas con cartulina para completar la clasificación. Para ello, le da a cada maestra una figura.

Empiezan a ver la clasificación de poliedro, y ven los 5 sólidos platónicos en primer lugar.

-M13:" *…Jamás lo había escuchado…"*

-M18:" *…Yo tampoco…"*

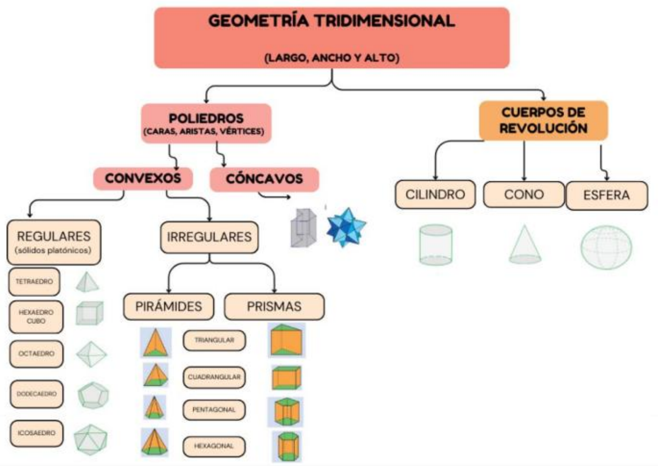
-M10:" *…¿Pero no es de filosofía? …" (risas)*

La investigadora va dando las definiciones de cada figura para que las maestras vayan viendo cual tiene cada una, e ir completando el cuadrante. Después ven los cuerpos de revolución

Les enseña en la PDI la siguiente imagen que se puede encontrar en el Anexo III:

Figura 73

Mapa conceptual de la clasificación de los cuerpos geométricos



Actividad 28+12: Doblado de papel-descubriendo propiedades redondas.

Analizamos con papiroflexia propiedades geométricas del círculo y del óvalo, descubriendo los ejes de simetría, las diagonales, no ángulos y no lados. Se analiza semejanzas y diferencias.

Tras la explicación, la investigadora muestra una imagen de un círculo y sus elementos ven los elementos*: radio, circunferencia, diámetro, centro, arco y cuerda*. Les pide que definan con sus palabras esos elementos:

> -M4:" *…Circunferencia: la línea cerrada que forma el círculo…".*

La investigadora lo completa explicando que es la línea que genera la frontera, es decir, separa el interior del exterior.

> -M3:" *…Arco: el trocito de la circunferencia que está marcada por dos puntos y la cuerda es la línea que está dentro del círculo, pero sin tocar el centro…".*
>
> -M5:" *…Radio: como la bici, la línea que va desde el centro a la circunferencia. Y luego pues aclarar la diferencia entre círculo y circunferencia, que el círculo es lo de dentro, porque el circulo tiene interior. El hulahop es la circunferencia y una moneda sería el círculo…".*

La investigadora le da a cada una un círculo de papel para que puedan doblarlo y puedan descubrir una propiedad más…les da una pista y es en relación a la simetría y diagonal.

> -M5:" *…Tiene ejes de simetría infinitos…"*
>
> -M18:" *…Ya está la lista que no nos deja pensar…"*
>
> -M3:" *…Claro porque se dobla por todos los sitios, y además no tiene lados…".*
>
> -M23:" *…Ni ángulos, claro ni diagonal…"*
>
> -I:" *… ¿Qué otra figura vimos que no tenía diagonales? …"*
>
> -M9:" *…El triángulo…"*

La investigadora les da ahora un óvalo-elipse para que analicen y comparen, justificando los elementos y propiedades que descubran.

> -M6*:" …Yo veo que tanto el círculo como el óvalo tienen una línea que no tiene esquinas ni cortes. Son curvas cerradas…"*
>
> -M17:" *...Sí, pero el círculo es como más "equilibrado". Si doblas cualquier parte, siempre coincide. En el óvalo no pasa eso. …."*
>
> -M12:" *...Lo que pasa es que, en el círculo, todos los puntos de la línea curva están a la misma distancia del centro. En el óvalo, eso no ocurre. Por eso no tiene radio fijo. …."*
>
> -M21:" *...Entonces el óvalo no tiene centro como tal, ¿no? No uno que funcione como el del círculo. …."*
>
> -M14:" *...Matemáticamente, el óvalo tiene dos focos, no un solo centro. Por eso su forma se define de otra manera. No es sólo visual, sino una propiedad de construcción. …."*
>
> - M5:" *... ¡Qué interesante! Yo siempre decía que el óvalo era un "círculo estirado". Pero ahora veo que no es lo mismo, porque su forma no responde a la misma regla. …."*

-M8:" *...Justo. En el círculo puedes calcular su área con una fórmula basada en el radio, pero en el óvalo necesitas usar los dos ejes, mayor y menor. Cambia toda la lógica. ....*"

-M2:" *...Y la línea que los rodea, aunque sea curva en ambos, no tiene las mismas propiedades. Creo que en el círculo es perfectamente simétrica respecto a cualquier eje, y en el óvalo no. ....*"

Actividad 15: Yo tengo, quien tiene

La investigadora aprovecha que están colocadas en círculo para pasar a la siguiente actividad, mientras, reparte las tarjetas les indica las instrucciones.

-I*: ".... Vamos a jugar ahora para repasar lo que hemos visto hasta ahora, tenéis cada una, una tarjeta que pone yo tengo y una palabra; y otra frase que pone una definición. El juego comienza cuando una de vosotras dice su frase de color negra, la respuesta la tendrá otra compañera. De tal forma que haremos una cadena..."*

Las maestras comienzan el juego en tono jocoso, consiguen acabar el juego sin problemas.

Actividad 23: ¿Quién es quién? Geométrico

A continuación, les explica el siguiente taller, basado en un juego tradicional pero modificado para esta formación, y los diferentes talleres que van a realizar a continuación:

-Quien es quien geométrico

-Completar tabla

-Sumamos ángulos

Una vez explica las instrucciones, la investigadora va pasándose por los equipos de trabajo, grabando a las maestras, a continuación, se detallan esos extractos de las grabaciones utilizadas en las transcripciones en este proceso.

La investigadora les explica que deben colocarse por parejas dentro de ese equipo de trabajo para jugar al *Quién es quién geométrico.* Previamente diseñó unas nuevas tarjetas para este juego y utiliza los elementos del juego de mesa para modificar las plantillas, quitando las caras y poniendo cuerpos geométricos:

-I: "*...para este juego hay que seguir las normas: solo se puede preguntar una propiedad por pregunta. Solo hay cuerpos geométricos.*

Os dejo la imagen en la PDI con la clasificación de los cuerpos geométricos modo "chuleta" para que podáis revisarlo. Y por supuesto...Gana la persona que primero descubrir la figura de su contrincante..."

La investigadora facilita una tarjeta a cada maestra, siendo esta la que su contrincante debe averiguar.

Pareja M10-M3: transcripción del diálogo final

- M10: *"...me la voy a jugar...es una pirámide pentagonal..."*

- M3: *"...sí (asiente con la cabeza y poniendo cara triste) ..."*

-M10: *"...yujuuuuuuu te he ganado, y haciendo un baile con los brazos..."*

-M14: *"...oye me encanta te lo voy a copiar para mis alumnos..."*

-M22:" ... y yo para mis hijas también, las voy a hacer listas…" (risas)

Actividad 29: completando bi-información

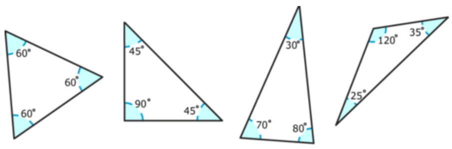
M5:" *… esta actividad, pero más fácil también la podemos hacer en Primaria y con cooperativo! A modo folio giratorio…"*

M1: *"…es verdad que buena idea, Elena nos vienes muy bien…"*

Actividad 27: Sumamos ángulos

Figura 74

Plantilla actividad 27



La investigadora les facilita estos triángulos y les dice que deben con el doblado de papel, descubrir una nueva propiedad. *(Se ponen a doblar)*

- M19:" *...a ver saca el móvil que lo sumamos que yo de cabeza ni de coña……"* (Sale 180°).

-M11:" *...A ver hacemos otro…"*

- M5:" *...dime que sumo…. Pues si 180º también, podríamos probar con diferentes tipos de* triángulos: *equiláteros, isósceles y escalenos, para ver si siempre se cumple…"*

- M19:" *...pues ala, que sale 180º siempre…"*

La investigadora les da ahora otros triángulos, pero esta vez sin el grado indicado, les indica que deben de descubrir esa propiedad, pero de otra manera, como las maestras no saben qué hacer, les da una pista…el doblado de papel.

- M19:*" ...Vale, no hay grados esta vez... ¿cómo vamos a saber cuánto suman los ángulos? No podemos sumar si no hay números…"*

- M5:*" ... Yo tampoco sabía por dónde empezar, pero con la pista del doblado… he cortado un triángulo, lo he doblado por los vértices hacia el centro y... ¡mira esto! ..."*

- M4*: ¡Ah, lo he hecho también! Cuando doblas los tres vértices hacia un punto, las puntas encajan perfectamente en línea recta. Como si formaran una línea horizontal.*

- M11:*" ... Entonces, si las tres esquinas del triángulo juntas forman una línea recta… eso significa que suman 180 grados, porque una línea recta tiene ese valor.*

- M19:*" ... ¡Es verdad! Es como si los tres ángulos se reorganizaran en una línea recta. No hace falta medirlos, lo demuestra el doblado. ..."*

- M5:*" ... O sea, no estamos solo "viendo" que suman 180, como en la actividad anterior. Ahora estamos justificando por qué es así. No depende de los números, sino de cómo se comportan los ángulos. ..."*

- M4:*" ...Me encanta esto. Estamos haciendo una demostración sin fórmulas, solo con papel. ¡Eso es geometría pura! ..."*

A continuación, se presenta el diálogo entre M5, M4, M16 y M19, quienes intentan descubrir que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, sin datos numéricos y guiadas únicamente por la pista del doblado de papel.

La investigadora les confirma que han descubierto la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y les propone una nueva pregunta:

> -I:"*¿Y con los cuadriláteros Aquí tenéis varios: un cuadrado, un rectángulo, un trapecio y un rombo? Tampoco tienen grados escritos. ¿Cuánto sumarán sus ángulos??"* (y les da unas figuras, una de cada).
>
> -M5*: "… (Doblando los vértices) ahora sale otra cosa espera…"*
>
> -M16: *"… madre mía, que desconocimiento tengo. …"*
>
> -M4: *"…ya tía como se enteren los padres (risas) Entonces, Espera. Si el triángulo suma 180°, y eso es una línea recta, entonces… ¿podríamos dividir un cuadrilátero en dos triángulos? …"*
>
> -M5: *"…Sí! Si uno une una diagonal, cualquier cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos. Y si cada triángulo suma 180°, entonces 180 + 180 = 360 grados. …"*
>
> -M11: *"… ¡Claro! No es que el cuadrado "tenga más" porque sea más grande, sino porque tiene más ángulos. Es como si sumaras dos triángulos pegados. …"*
>
> -M19: *"… ¡Ahora entiendo! La línea recta representa media circunferencia, y si el triángulo es como "media vuelta", entonces el cuadrado completa la vuelta entera: 360°…"*
>
> -M5: *"… Podríamos deducir que con cada lado nuevo que añadimos, estamos sumando otro triángulo… es decir, un pentágono tendría tres triángulos: 3×180 = 540. …"*
>
> -M4: *"… ¡ostras! Jolín esto sí que es visual, ¿en Primaria lo ven así? …"*
>
> -M5:" *… el próximo curso sí (risas) …"*
>
> -M11: *"… no si al final nos volvemos matemáticas…"*
>
> -M16: *"… si de aquí al grado de matemáticas (risas) …"*
>
> -M11*: "… en serio, yo me siento ahora muy contenta, voy a ser una madre lista voy a poder ayudar a XX y XX (sus hijos) cuando vean esto en Primaria (se ríe) …"*

Actividad 18: Artistas matemáticos

Una vez han hecho los talleres, les divide en dos grupos, ya que algunas maestras pro diferentes cuestiones deben marcharse antes de acabar la sesión, la investigadora les facilita dos imágenes, una escultura y una pintura, y les indica que deben describirlo con el lenguaje geométrico más apropiado posible y que tienen 10 minutos para ello. Una vez finaliza el tiempo, la investigadora intercambia las fotos en las que se han basado para que el equipo contrario escuche la definición que dice el equipo.

Equipo 1

> -M4 *en nombre del equipo:" …es un cuadrilátero y en su interior podemos ver circunferencias, círculos, rectángulos y triángulos, Los triángulos que se pueden observar son isósceles, escalenos, equiláteros al igual que podemos apreciar sus ángulos agudos, obtusos y rectángulos. Todas estas figuras conforman una obra de arte…"*
>
> -M23*:" …perdonad, pero no hay ángulos obtusos. …"*
>
> *Todas responden riendo.*
>
> -M19*:" …hombre que no, …"*
>
> -M5*:" …hay uno…"*

-M4*:" ... tu si que eres obtusa…" (riendo)*

- M20*: cuidadito que están las de Primaria…"*

M9 se levanta y le señala a M23 el triángulo obtuso, pero M23 dice que es recto, las demás le dicen que no, que lo han medido doblando el papel…"

-M10*:" ...es verdad es un pelín obtuso…"*

-I*: ¿diríais algo más? ..."*

(En tono de risa indican que no, que está perfecto).

La investigadora intercede y les expone más ideas:

-I:" *…por ejemplo que es un rectángulo que está dividido por una diagonal…"*

-M3*" ... aaaaa es verdad si es que no tenemos mirada matemática aún…"*

-M23*:" ...mira aquí hay una semicircunferencia…"*

-I*: "...o un arco puede ser…"*

-M3*: ¡hay un rombo!*

-M19*: "...es que no nos ha dado tiempo ¿vale…?"*

-M3*: "...que hay dos triangulo unidos por su vértice y encima están en el centro de dos círculos concéntricos…"*

-M10*: ...muy biennnnnnn…"*

-M23*:" ...oleeeeeee"*

-M5*:" ... eso lo habíamos dicho pero que no lo habíamos dejado escrito…"*

-M3*:" ...si, si loque tu digas, pero os hemos añadido bastantes cosas…"*

Equipo 2

-M23 en nombre de este equipo: *"...Bosque de cuerpos geométricos con distintos volúmenes. Cabe destacar la presencia de esferas, cuerpos piramidales y prismas. En resumen, es una composición de poliedros irregulares, sólidos platónicos y de cuerpos redondos o de revolución…". ¿Cómo os quedáis? mirando al otro equipo (y aplaudiendo el resto de miembros del equipo).*

-M5: *sólidos platónicos dicen. Aquí las filosofas…" (haciendo broma al nombre que previamente habían dicho que no habían escuchado)* (risas)

La investigadora ahora incide en completar esa información, por ejemplo, indicando que las esferas se encuentran en la cúspide de las pirámides.

3.Cierre de la sesión.

Actividad 30: concurso final

Como cierre de la formación, la investigadora muestra una presentación en la PPT, con preguntas para que las respondan de forma verbal.

Van hablando según salen las imágenes

-M18: "*… Cuadrado: 4 lados, 4 vértices. Es un polígono regular porque todos sus lados y ángulos son iguales. Es convexo y tiene 4 ángulos rectos. Además, es un cuadrilátero y un paralelogramo. ..."*

-M5: "*… Rectángulo: 4 lados, 4 vértices. Es regular en términos de sus ángulos, porque todos son rectos, pero no de sus lados porque dos son más largos. También es convexo y un paralelogramo. ..."*

-M7: *"…Rombo: 4 lados, 4 vértices. No es regular porque sus ángulos no son iguales, pero sí tiene todos sus lados de la misma longitud. Es convexo y es un paralelogramo porque tiene lados opuestos paralelos. …"*

-M3: "… *Trapecio: 4 lados, 4 vértices. Es irregular porque no todos sus lados ni ángulos son iguales. Solo tiene un par de lados paralelos, así que es un cuadrilátero, pero no un paralelogramo. Es convexo. …"*

-M4*:" …Trapezoide: 4 lados, 4 vértices. Es diferente porque ninguno de sus lados es paralelo. Eso lo hace irregular y sigue siendo un cuadrilátero, pero no es un trapecio ni un paralelogramo. Es convexo. …"*

-M1*: "… Y aquí está la figura irregular… también tiene 4 lados, pero ninguno es igual, ni sus ángulos, ni hay lados paralelos. Es un cuadrilátero irregular y convexo, digo cóncava…"*

La investigadora entonces les hace una pregunta más para que digan Diferencias entre cuadriláteros y paralelogramos:

-I:" … *Entonces, ¿todos estos son cuadriláteros paralelogramos?"*

-M16*: "… Sí, porque tienen cuatro lados. …"*

-M20*: "… Pero no todos son paralelogramos. …"*

-M16*: "…ahí no me entero…"*

-M9: *"… Un paralelogramo son los cuadriláteros con lados en paralelos. El cuadrado, el rectángulo y el rombo lo son, pero el trapecio, el trapezoide y la figura irregular no.*

-M5: "… *eso es, todos los paralelogramos son cuadriláteros, pero no todos los cuadriláteros son paralelogramos. …"*

-M18: "… *menudo trabalenguas …"*

Una vez finalizan la investigadora las aplaude:

-I:" *…no me diréis que en la primera sesión a hoy no habéis avanzado…"*

-M18*: "…Jolín la verdad que sí. Un aplauso para ti…*" (y empiezan a aplaudir)

Actividad 8: Kahhot

Y la investigadora les pide que cojan sus dispositivos móviles, busquen la siguiente aplicación (Kahhot)para hacer la última actividad. Una vez acceden a la aplicación web, deben introducir el código que aparece en la PDI. Los estudiantes revisan y resumen lo que han aprendido sobre líneas, consolidando su nueva red de conocimientos.

Las maestras van completando las preguntas realizan un Kahoot con todo lo trabajado en las 4 sesiones del programa. Estas fases están diseñadas para ayudar a los estudiantes a progresar desde un nivel de comprensión básico hacia un razonamiento geométrico más avanzado.

Gana la maestra Lucía.

-I: "*…Bueno, ahora vamos a hacer algo diferente. Vamos a poner a prueba lo que habéis aprendido con un Kahoot…"*
-M22: *"… ¿Un… qué?"*
-I: *"…Un Kahoot. Es una aplicación para jugar con preguntas y respuestas. Tranquilas, no se necesita saber nada complicado de informática. Solo tenéis que entrar con el móvil y poner el código que aparece en la PDI…"*

-M9*: "… ¡Pues vamos a probar! Yo quiero ver si es tan divertido como dicen mis hijos..."*
-M19: *"… ¡Ah, ya estoy dentro! Me puse de nombre "La Reina del Triángulo…".*
-M16: *"…esto sí que me gusta a mi…"*
-M9: *"…qué divertido…"*
-M2*: "…oye que chulo esto, ¿no? También nos vale para Primaria."*

Se hace una foto grupal, y se les agradece la participación acordando una fecha para realizar los post-test, generando un cronograma de acuerdo con los horarios de cada maestra.

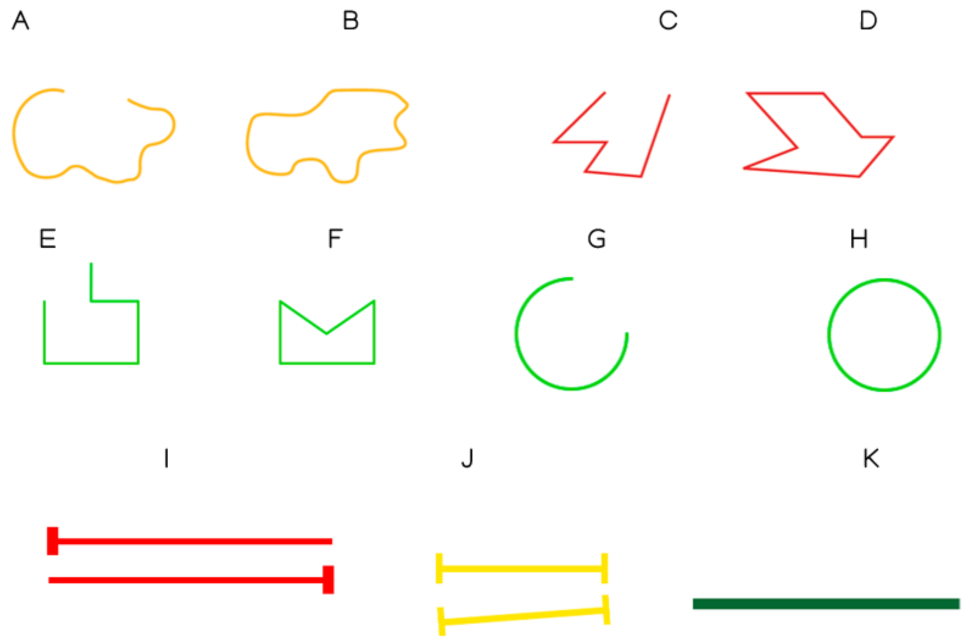
Figura 75

Imagen grupal con gran parte de las maestras participantes

Anexo III. Recursos utilizados en el programa

Actividad 1. Recordando los tipos de líneas

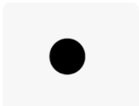
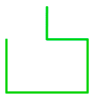
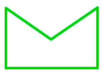
Ordena y define según corresponda:

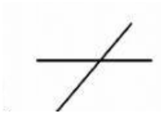


	Línea recta	Línea semirrecta	Línea curva	Segmento	Línea poligonal abierta	Línea poligonal cerrada
Letra						
Define con tus palabras						

Actividad 2. Definiendo los tipos de líneas

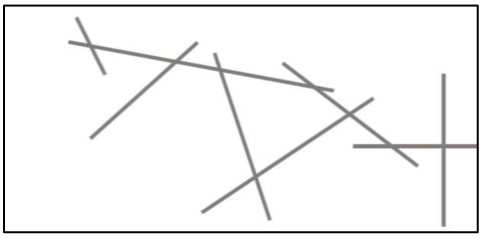
Une los tipos de líneas, su imagen y su definición.

Nombre		Imagen		Definición
Punto	o		o	Es la unidad más simple, es una figura geométrica sin dimensión, sin longitud, ni área, ni volumen, ni otro ángulo dimensional. Describe una posición en el plano.
Segmento	o		o	Recta (imaginaria) que tiene su trayecto desde un punto cualquiera del espacio terrestre al centro de la tierra.
Línea recta	o		o	Son líneas que mantienen la distancia entre sí y su trayectoria es infinita. Nunca se encuentran o tocan y están formadas por líneas verticales u horizontales.
Línea curva abierta	o		o	Son líneas que se cruzan unas con otras en ángulo de 90ª y están formadas por líneas verticales y horizontales
Línea poligonal abierta	o		o	Es la formación de diversos segmentos de rectas unidas cuyos extremos coinciden
Línea poligonal cerrada	o		o	Es la formación de diversos segmentos de rectas unidas cuyos extremos NO coinciden.
Líneas paralelas	o		o	Sucesión de puntos que cambian de dirección y que el final llega al mismo punto que comenzó
Líneas perpendiculares	o		o	Es una recta perpendicular a una vertical, que al intersecionarse crean un ángulo recto de 90º.

Líneas oblicuas o secantes	o		o	Son líneas rectas que se cruzan unas con otras creando un ángulo que no miden más de 90ª.
Línea vertical	o		o	Sucesión continua de puntos extendidos en una sola dirección y que su dirección puede ser ascendente, descendente, vertical y horizontal.
Línea horizontal	o		o	Sucesión de puntos que cambian de dirección y que no llega el final llega al mismo punto que comenzó.
Línea curva cerrada	o		o	Es la parte de una recta delimitada por dos puntos.

Actividad 3. Descubriendo los ángulos

Encuentra en esta imagen todas las líneas anteriores, asigna a cada línea un número para poder describirla.

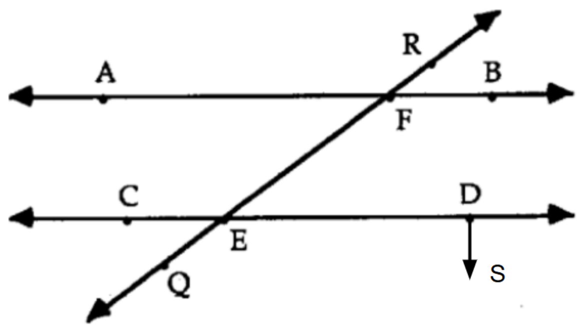


Actividad 4. Ángulos y líneas en una misma imagen

¿Cuántos vértices hay? ____

Segmento	Ángulo	Segmento	Ángulo	Segmento	Ángulo	Segmento	Ángulo
QED		AFR		RFB		AFE	
EFD		CEF		FED		CEQ	

Línea	Tipo	Línea	Tipo
AB-CD		CD-AB	
AB-R		CD-Q	

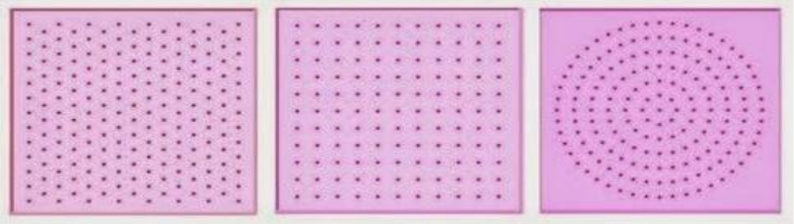


LÍNEA	AB-CD	AB-R	CD-Q	D-S
TIPO				

SEGMENTO	ÁNGULO
QED	
EFD	
AFR	
CEF	
RFB	
FED	
AFE	
CEQ	
DS	

Actividad 5. Conociendo el Geoplano

Utiliza los 3 Geoplanos para representar en ellos todas las líneas unidimensionales trabajadas de todas las formas posibles. ¿Qué ángulos se forman al unir al menos dos líneas?



1. ¿Cuáles serían los puntos de una recta representados en el Geoplano?

2. Todos los segmentos posibles.

4. Todas las líneas rectas verticales posibles.

5. Todas las líneas rectas horizontales posibles.

6. Todas las líneas secantes - oblicuas posibles.

7. Todas las líneas curvas abiertas posibles.

8. Todas las líneas curvas cerradas posibles.

9. Algunas líneas poligonales abiertas.

10. Todas las líneas paralelas posibles.

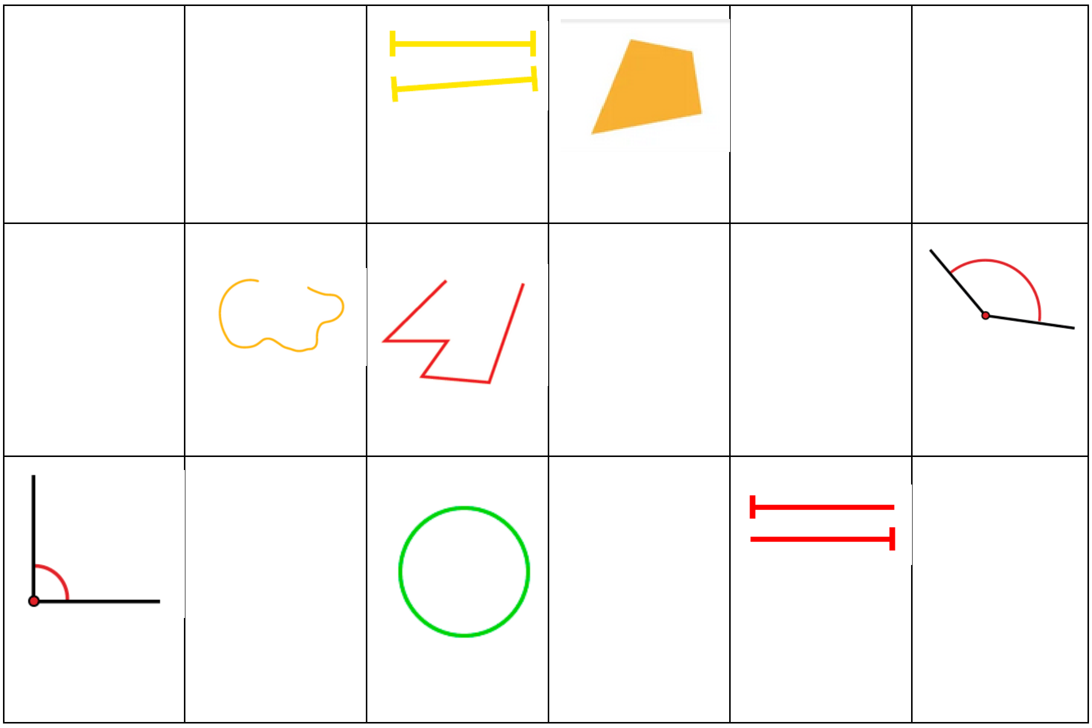
11. Todas las líneas perpendiculares posibles.

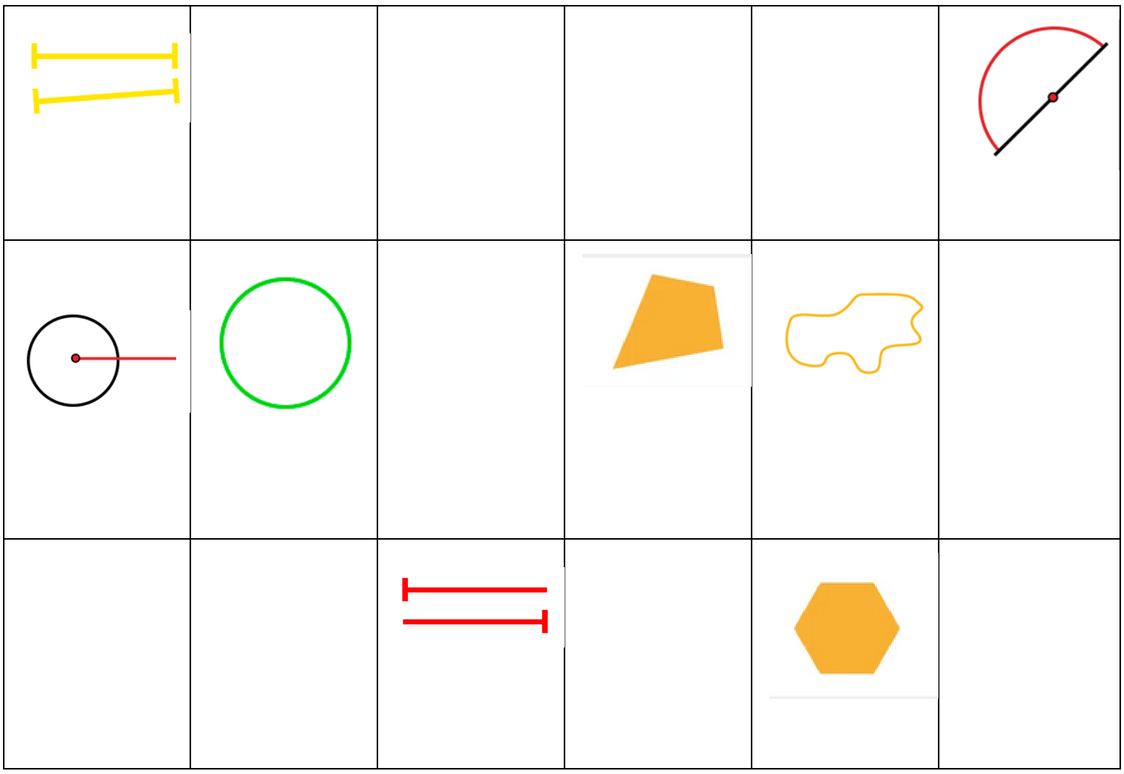
12. ¿Qué habéis descubierto frente a los tres Geoplanos con relación a las líneas?

13. ¿Habéis tenido alguna duda?

14. ¿Qué utilidad le encuentras de cara a otras áreas o conceptos?

Actividad 6. Bingo geométrico

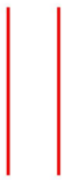


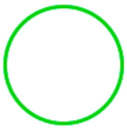


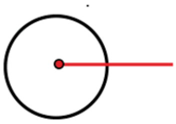
Indicaciones para jugar en tres modalidades por orden de dificultad:

- Enseñando el dibujo
- Indicando el nombre
- Nombrando la definición

				
Es una sucesión de infinitos puntos (no tiene principio ni fin, es decir, no tiene límites) en la que los puntos están trazados en una misma dirección. cuya trayectoria se realiza en dirección arriba – abajo, o a la inversa.	Es una sucesión de infinitos puntos (no tiene principio ni fin, es decir, no tiene límites) en la que los puntos están trazados en una misma dirección. cuya trayectoria se realiza de un lado al otro, o a la inversa.	línea que indica que algo sube hacia arriba	línea que indica que baja sube hacia abajo	se encuentran en un mismo plano y mantienen una cierta distancia entre sí, pero nunca se cruzan, ni se acercan ni llegan a tocarse en ningún punto, ni siquiera sus prolongaciones.cuya trayectoria se realiza de un lado al otro, o a la inversa.
LÍNEA VERTICAL RECTA	LÍNEA HORIZONTAL RECTA	LÍNEA RECTA ASCENDENTE	LÍNEA RECTA DESCENDENTE	LÍNEA PARALELAS HORIZONTALES RECTAS

			
se cortan en un punto. Al cortarse dividen el plano en 4 regiones de distinto tamaño, por eso decimos que forman 4 ángulos.	se cortan en un punto. Al cortarse dividen el plano en 4 regiones de mismo tamaño, por eso decimos que forman 4 ángulos rectos.	única figura geométrica que **no contiene dimensiones** (ni alto, ni ancho, ni profundo). Se utiliza para identificar una posición en el plano o eN el espacio.	se encuentran en un mismo plano y mantienen una cierta distancia entre sí, pero nunca se cruzan, ni se acercan ni llegan a tocarse en ningún punto, ni siquiera sus prolongaciones.cuya trayectoria se realiza en dirección arriba – abajo, o a la inversa.
OBLICUAS O SECANTES	PERPENDICULARES	PUNTO	PARALELAS VERTICALES RECTAS

				
SU INICIO Y FINAL SÍ COINCIDEN. línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente.	**SU INICIO Y SU FINAL NO COINCIDEN,** línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente.	**SU INICIO Y FINAL SÍ COINCIDEN**. **es aquella formada por segmentos unidos por sus extremos de manera que dos segmentos consecutivos no estén alineados**.	**EN LAS QUE SU INICIO Y SU FINAL NO COINCIDEN, es aquella formada por segmentos unidos por sus extremos de manera que dos segmentos consecutivos no estén alineados**.	**SU INICIO Y FINAL SÍ COINCIDEN**. línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente.
LÍNEA CURVA CERRADA REGULAR	LÍNEA CURVA ABIERTA	LÍNEA POLIGONAL CERRADA	LÍNEA POLIGONAL ABIERTA	LÍNEA CURVA CERRADA IRREGULAR

				
la distancia de separación entre ambas rectas tienen una cuya amplitud que mide 90° partiendo desde el mismo vértice, por tanto, sus lados son perpendiculares.	la distancia de separación entre ambas rectas tienen una amplitud mayor a 0° y menor a 90°.por tanto, sus lados son secantes o oblicuos	la distancia de separación entre ambas rectas tienen una amplitud mayor a 90° y menor a 180°, por tanto, sus lados son secantes o oblicuos	su amplitud mide 360°, en este sentido, la línea que lo inicia vuelve a su punto de origen.	medida de amplitud es de 180°. Este ángulo posee una característica en particular, y es que sus dos líneas se unen desde el vértice formando una prolongación en forma de línea recta.
ÁNGULO RECTO	ÁNGULO AGUDO	ÁNGULO OBTUSO	ÁNGULO COMPLETO	ÁNGULO LLANO

Actividad 7. Yo dibujo tu dibujo

Por parejas:

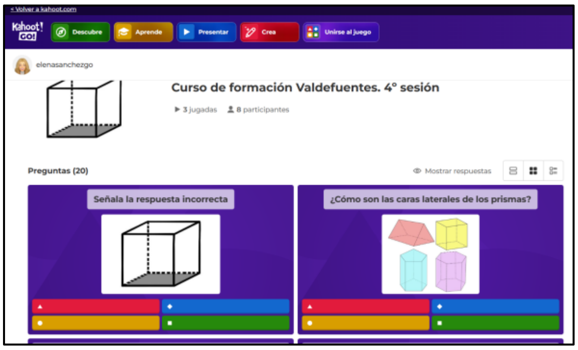
1. Uno de los miembros recibe una de las cartas con las indicaciones. Sin enseñarla al compañero, hace un dibujo en un folio, y debe cumplir con todos los requisitos.

2. Ese dibujo no debe verlo el compañero.

3. Ese mismo miembro deberá dar las indicaciones precisas con el lenguaje matemático visto en la sesión anterior, en relación con el tipo de líneas, para que su compañera (sin ver el dibujo previo ni las indicaciones de la carta) lo realice en una folio en blanco, el mismo dibujo.

CARTA 1	CARTA 2
Realiza un dibujo con las siguientes líneas: – Una línea vertical. – Una línea poligonal abierta. – Una línea curva.	Realiza un dibujo con las siguientes líneas: – Dos líneas paralelas. – Una línea poligonal cerrada. – Una línea curva abierta.

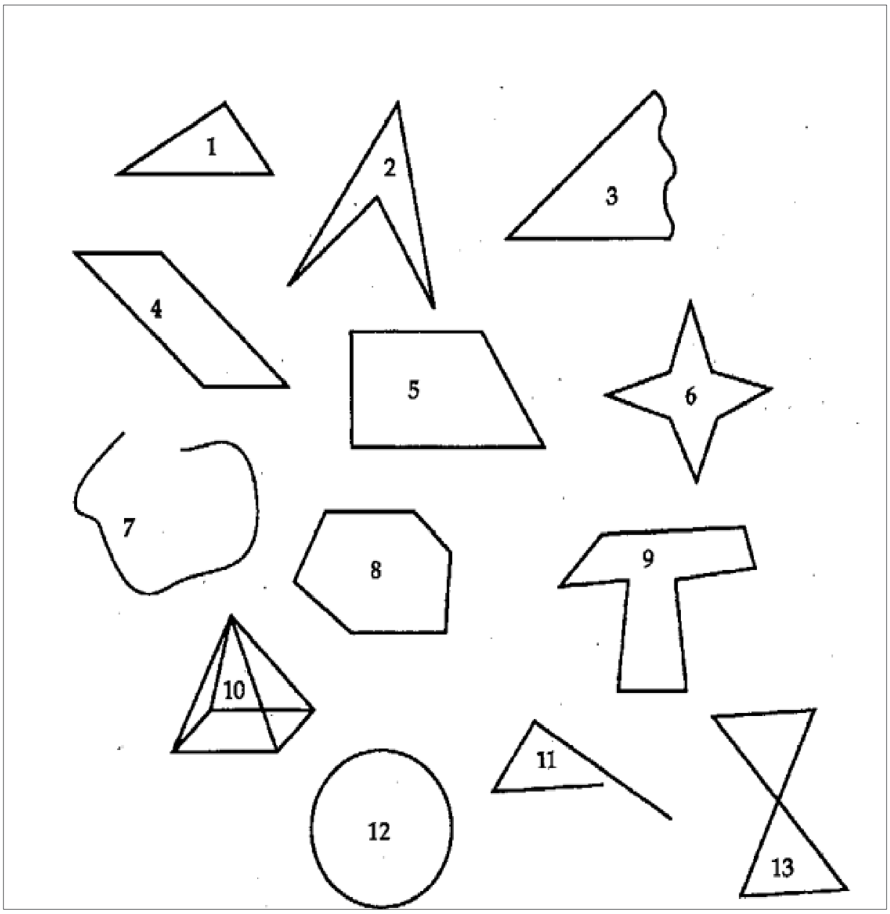
Actividad 8. Kahoot!



Nota.Enlace al cuestionario empleado: https://create.kahoot.it/share/curso-de-formacion-valdefuentes-4-sesion/6adabf06-287b-4271-a138-73ecd9945ac3.

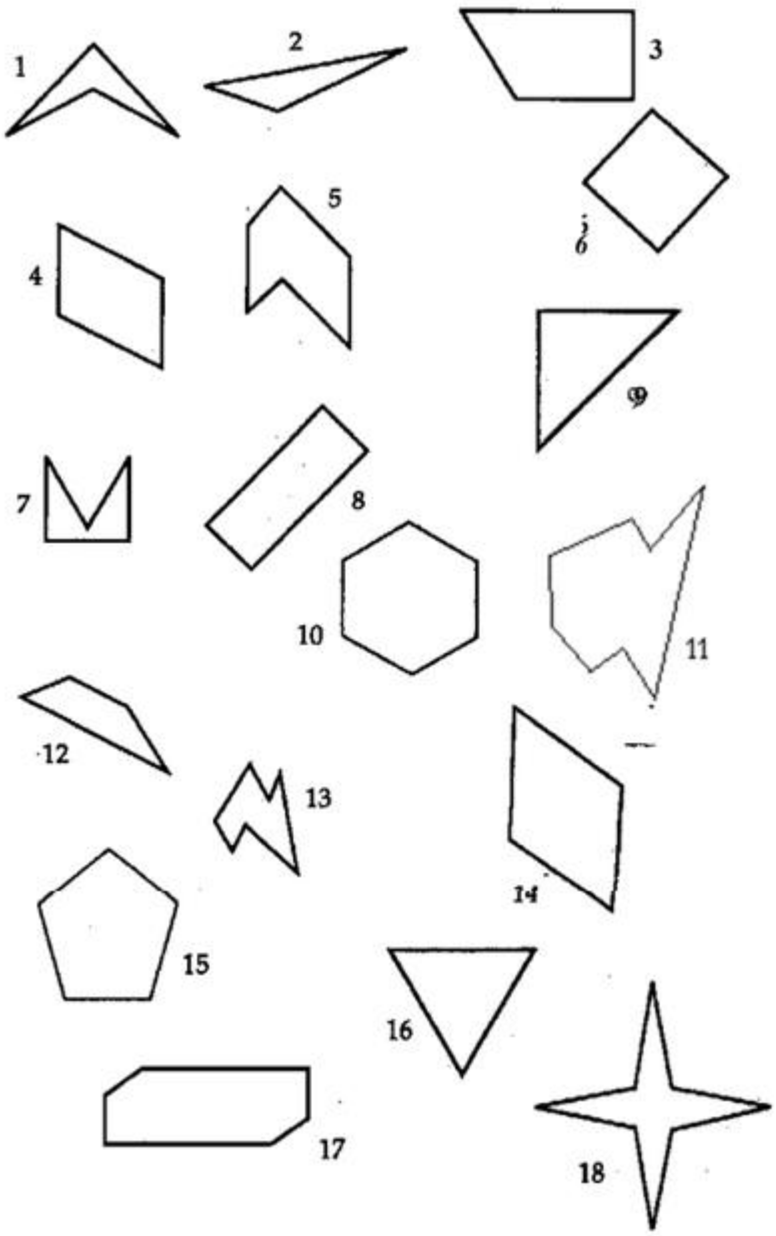
Actividad 9. ¿Qué era un polígono?

Observa detenidamente cada una de las siguientes figuras. Indica aquellas que no son polígonos. Justifica tu respuesta.



Actividad 10. Clasificando Polígonos

Agrupa los siguientes polígonos, de diferentes formas, indicando la propiedad o propiedades que hayas considerado en cada caso.

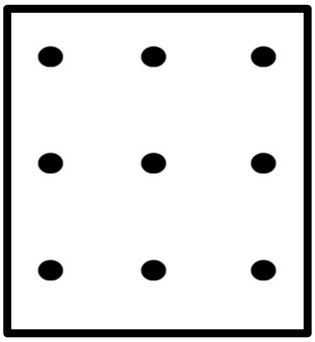


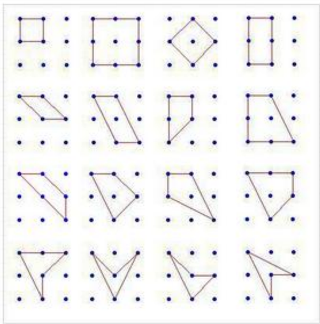
Actividad 11. Descubriendo los Cuadriláteros con Geoplanos 3x3

En este geoplano 3x3 en papel y con distintos rotuladores:

¿cuántos cuadriláteros diferentes puedes dibujar en este geoplano?

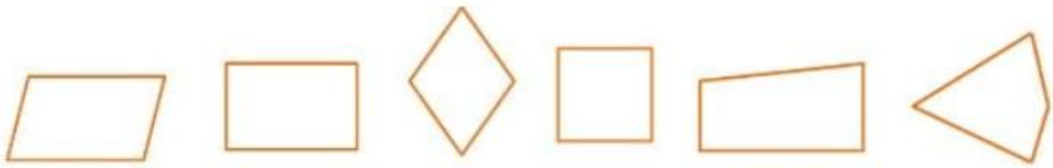
(Recuerda que un cuadrilátero es toda figuras geométricas planas y cerrada con 4 lados).





Actividad 14. Analizando los cuadriláteros

Describe todo lo que puedas decir sobre estas figuras y haz una clasificación bajo tus criterios justificados.



Actividad 15. Yo tengo, quién tiene

YO TENGO diámetro ¿QUIÉN TIENE el nombre para un triángulo con dos lados iguales?	YO TENGO trapecio ¿QUIÉN TIENE la palabra que es un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son iguales y paralelos dos a dos?
YO TENGO isósceles ¿QUIÉN TIENE un cuadrilátero que no tienen lados paralelos?	YO TENGO paralelogramo ¿QUIÉN TIENE el nombre de un cuadrilátero con 4 lados iguales, y ángulos iguales 2 a 2?
YO TENGO circunferencia ¿QUIÉN TIENE la palabra para indicar el espacio abarcado por dos semirrectas con vértice común?	YO TENGO ángulo ¿QUIÉN TIENE un cuadrilátero que solamente tienen un par de lados opuestos paralelos?
YO TENGO cuerda ¿QUIÉN TIENE la longitud de la línea poligonal que encierra un polígono?	YO TENGO perímetro ¿QUIÉN TIENE el segmento que va desde un punto a otro de la circunferencia, pero sin pasar por el centro?
YO TENGO rombo ¿QUIÉN TIENE el segmento que va desde el centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia?	YO TENGO radio ¿QUIÉN TIENE la palabra que designa a línea curva cerrada cuyos puntos están todos a la misma distancia de un punto fijo llamado centro?
YO TENGO trapezoide ¿QUIÉN TIENE un polígono de cuatro lados cuyos pares de lados opuestos son iguales y paralelos dos a dos?	YO TENGO cuadrilátero ¿QUIÉN TIENE el segmento que va desde un punto a otro de la circunferencia pasando por el centro?
YO TENGO vértice ¿QUIÉN TIENE el nombre para un triángulo con 3 ángulos iguales?	YO TENGO eje de simetría ¿QUIÉN TIENE la palabra que designa a un triángulo que no tiene lados iguales?

YO TENGO recto ¿QUIÉN TIENE cómo se llama un ángulo menor que 90º?	YO TENGO agudo ¿QUIÉN TIENE el borde de un círculo?
YO TENGO círculo ¿QUIÉN TIENE el nombre de un polígono de seis lados?	YO TENGO hexágono ¿QUIÉN TIENE el término con el que se designa a un ángulo de 90º?
YO TENGO obtuso ¿QUIÉN TIENE la palabra de que es una línea de referencia imaginaria que al dividir una forma cualquiera en dos partes, sus puntos opuestos son equidistantes entre sí?	YO TENGO escaleno ¿QUIÉN TIENE cómo se llama a un ángulo mayor que 90º?
YO TENGO circunferencia ¿QUIÉN TIENE el número de diagonales de un pentágono regular?	YO TENGO 5 ¿QUIÉN TIENE el punto común de las dos semirrectas que forman un ángulo?
YO TENGO equilátero ¿QUIÉN TIENE la figura plana formada por una circunferencia y su interior.	YO TENGO bisectriz-diagonal ¿QUIÉN TIENE la recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales?

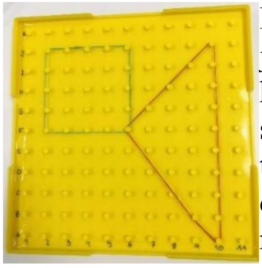
Actividad 17. Hundir la Forma

INSTRUCCIONES

¿Preparadas?

Os propongo un juego muy similar al hundir la flota, pero iremos un paso más allá añadiéndole triángulos y cuadriláteros. Por eso lo hemos llamado HUNDIR LA FORMA.

¡Comencemos!



Lo primero que debemos hacer para jugar es preparar el tablero. Cada jugador dibujará, con gomas elásticas una forma. Como en el juego de hundir la flota, se juega por turnos, y el objetivo es descubrir dónde están situados los vértices de los triángulos del contrincante. Durante nuestro turno, tenemos que decir en voz alta las coordenadas de uno de los puntos del geoplano. El contrincante tendrá que darnos toda la información que relaciona este punto con los triángulos:

- Si forma parte de un vértice o de un lado
- Si se encuentra en el exterior o en interior, es decir, no esté *tocado.*

Podéis marcar las coordenadas que vais diciendo en el Geoplano que tenéis de papel.

Ahora que sabemos las normas, ya podemos empezar a jugar.

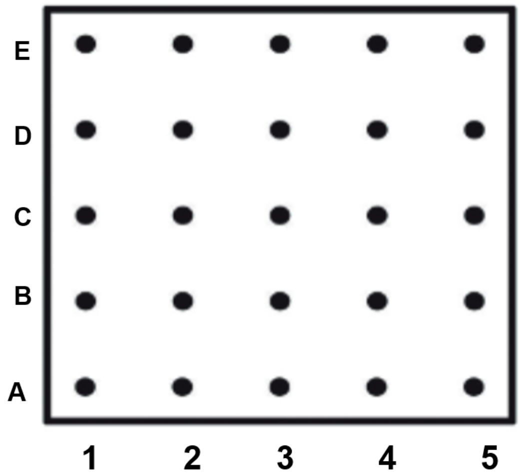
¡Vamos allá! 😁

Anota las coordenadas del contrincante para averiguar su figura

¡Recuerda! solo podrás decir:

interior-exterior

lado-vértice

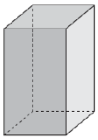
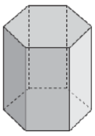
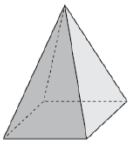
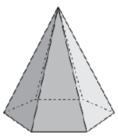
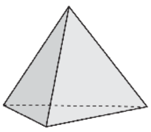
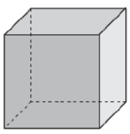


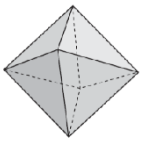
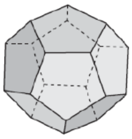
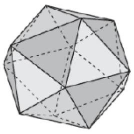
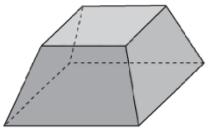
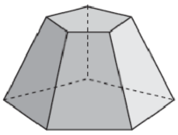
Actividad 18. Artistas matemáticos

Wassily Kandinsky. Obra: Blando duro

Objekts, Steven Scicluna

Actividad 22. El cuadro de doble entrada tridimensional

Poliedro	**Nombre**	**N.º de caras (C)**	**N.º de vértices (V)**	**N.º de aristas (A)**
				
				
				
				
				
				

Actividad 23. ¿Quién es quién? Geométrico

Instrucciones

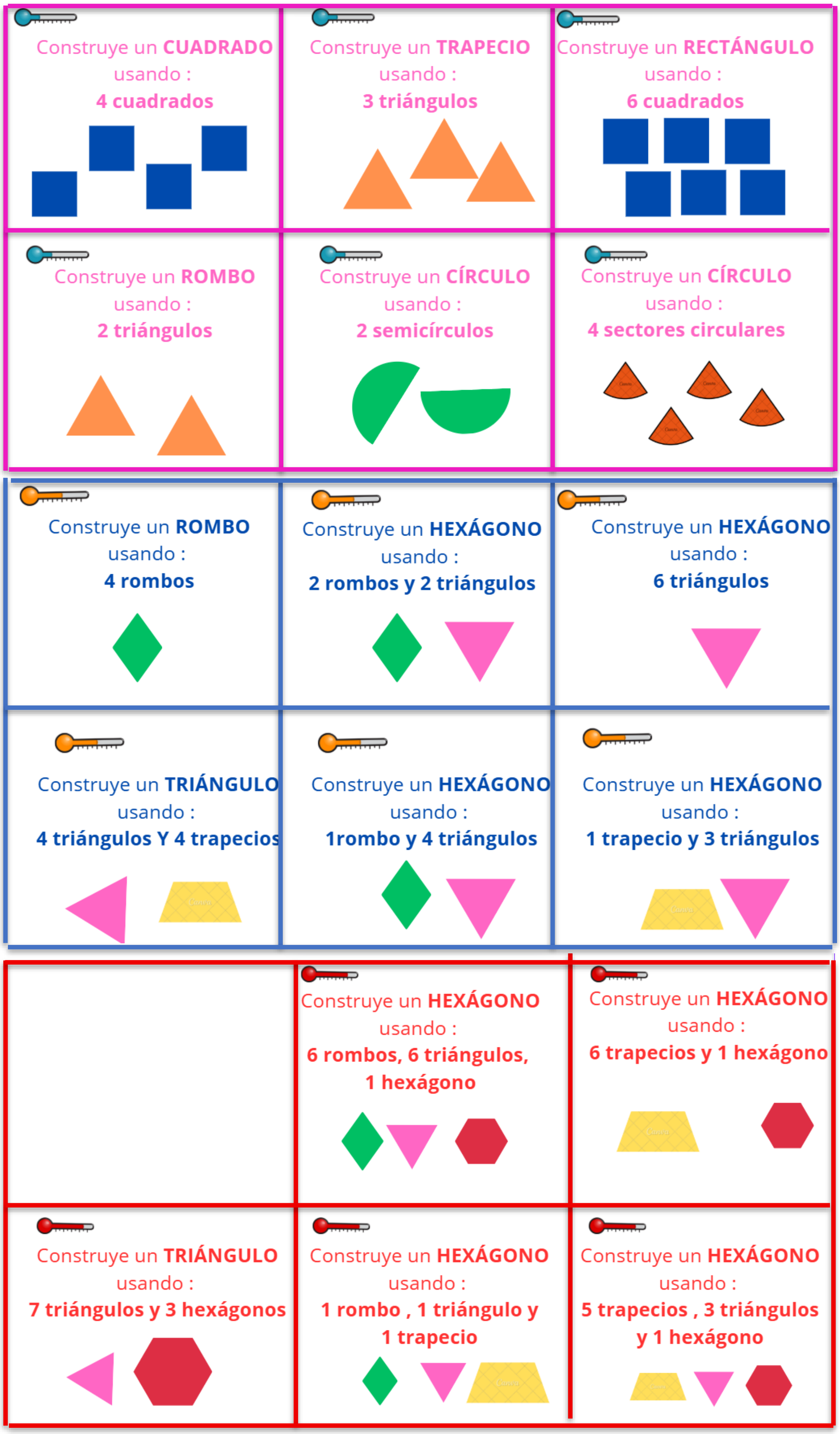
Un jugador podrá ir diciendo una pregunta por jugada, el contrincante solo podrá decir sí o no hasta averiguar qué cuerpo geométrico tiene su contrario

Ejemplo:

jugada 1 ¿es un poliedro? - respuesta sí

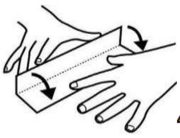
jugada 2 ¿es regular? no

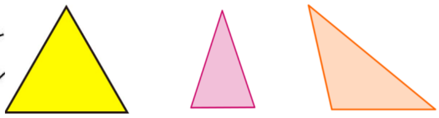
Actividad 24. Formando Formas



Actividad 25. Diagonal y Simetría triángulos

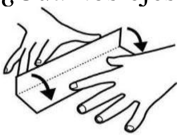
¿Cuántos ejes de simetría tienen los triángulos? Usa la papiroflexia para ello.

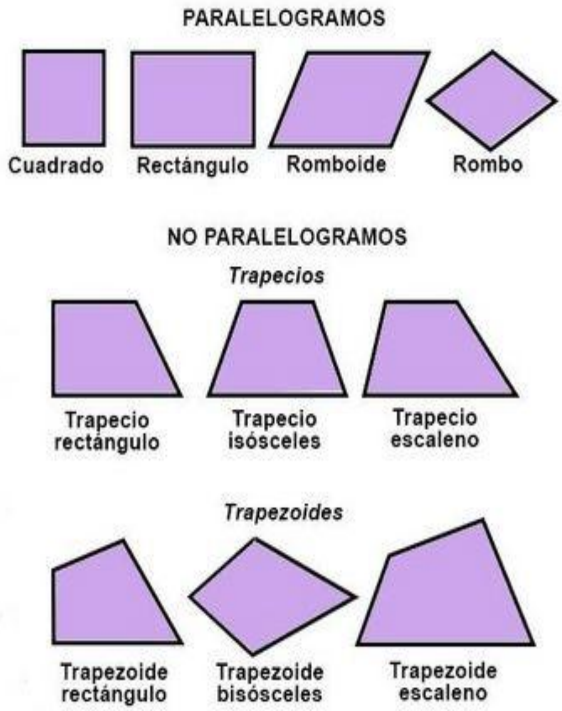




Actividad 26. Diagonal y simetría cuadriláteros

¿Cuántos ejes de simetría tienen los cuadriláteros? Usa la papiroflexia para ello.





Actividad 29. Completando bi-información

				¿Cómo son sus lados-líneas?	ángulos-vértices	Ejes de Simetrías	N.º Diagonales	¿En qué Figura se Transforma al Doblarlo? puedes dibujarlo
Polígonos	Triángulo	Equilátero						
		Isósceles						
		Escaleno						
	Cuadrilátero	Paralelogramos	Cuadrado					
			Rectángulo					
			Rombo	.				
			Romboide					

		No Paralelogramos	Trapecio					
			Trapezoide					
No Polígonos	Círculo							

Anexo IV: Comité de Ética

Conformidad Comité de Ético de Investigación y Docencia de la Facultad de Educación

udima
UNIVERSIDAD A DISTANCIA DE MADRID

REF: NR20241219

Dictamen del Comité Ético de Investigación y Docencia de la Facultad de Educación

Noelle Rodríguez Garrido, miembro del **Comité Ético de Investigación y Docencia de la Facultad de Educación de la Universidad a Distancia de Madrid**

Certifica:

Que este Comité ha evaluado la propuesta para que se realice el estudio:

Razonamiento geométrico bajo el modelo Van Hiele: un estudio de caso en maestras de educación infantil

por parte de la doctoranda: Elena Sánchez González

El comité considera, teniendo en cuenta la documentación aportada, que:

- ☐ - Se cumplen los criterios necesarios de idoneidad del protocolo en relación con los objetivos del estudio.
- ☐ - La capacidad de los/las investigadores y de los medios disponibles son ambos apropiados para llevar a cabo el estudio.
- ☐ - Dicho estudio se ajusta a las normas éticas esenciales y criterios deontológicos que rigen en este centro.
- ☐ - Será la doctoranda, junto con sus directores, quienes se comprometan a custodiar los datos de manera segura.
- ☐ - Los datos del estudio se recogerán una vez emitido el dictamen favorable por parte del
- ☐ CEID y nunca con anterioridad.
- ☐ - En caso de llevarse a cabo técnicas de investigación adicionales, éstas siempre estarán sujetas a los protocolos marcados en la memoria emitida y de acuerdo a este dictamen.

Este CEID acepta que dicho estudio sea realizado, debiendo ser comunicado a dicho Comité todo cambio en el estudio o acontecimiento adverso grave.

Este CEID hace constar que:

1º En la reunión celebrada el 19 de diciembre de 2024, se decidió emitir el informe correspondiente al estudio de referencia que queda recogido en el acta N02/24_25 .

2º Listado de los miembros:

María Mar de la Cueva Ortega

Cristina Marín Oller

Marco Ramos Ramiro

Aurora Centellas Rodrigo

Noelle Rodríguez Garrido

En el caso de que se evalúe algún proyecto del que un miembro sea investigador/colaborador, éste se ausentará durante la reunión de discusión del proyecto.

Para que conste dónde proceda y a petición del investigador:

Firmado: Noelle Rodríguez Garrido

19 de Diciembre de 2024

Conformidad del centro

udima
UNIVERSIDAD A DISTANCIA DE MADRID

CONFORMIDAD DEL CENTRO

Doña M.ª José Montes (Directora) (indicar nombre y puesto dentro del centro) da su conformidad como persona autorizada en el centro Colegio Valdefuentes para que la profesora doctoranda Elena Sánchez González pueda tener acceso al claustro del mismo y desarrollar el proyecto titulado "***Tocando la geometría: programa de formación docente***".

Y para que así conste,

En Madrid (indicar lugar), a 23 (indicar día) de Noviembre (indicar mes) de 2023 (indicar año)

Firma y sello

COLEGIO EDUCARE
Valdefuentes

NOTA: Los cargos que pueden firmar este documento son el director y el jefe de departamento de orientación

Modelo de consentimiento informado maestras participantes

Doctorado en Educación y Tecnología
Modelo de consentimiento informado
Hoja de información

La presente investigación está desarrollada en la Universidad a Distancia de Madrid- UDIMA por la doctoranda Elena Sánchez González**.** La finalidad de este estudio es describir y analizar las competencias geométricas en el profesorado de Infantil en activo y valorar su evolución tras una propuesta de intervención en un centro de titularidad concertada de la Comunidad de Madrid.

Con este motivo, solicito su participación en la presente investigación a través de la participación voluntaria en el programa de formación intervención**.** La duración de la formación comprende un total de 8 horas, en franjas de 2 horas de duración. La investigación se llevará a cabo en el 2024: en los meses de enero y marzo se recogerán recogida de datos, y en febrero se realizará el programa de formación.

De acuerdo con la Ley Orgánica, 3/2018, de 5 de diciembre, de Protección de Datos Personales y Garantía de los Derechos Digitales (LOPDGDD), los datos de estudio y, especialmente los de índole personal, serán confidenciales y empleados únicamente a efectos de investigación. Asimismo, usted está facultado/a para ejercer los derechos de oposición, acceso, rectificación y cancelación dentro del ámbito de la citada ley, antes de presionar el botón de envío (momento en el que la recuperación de los datos será imposible dada su anonimidad).

La participación en esta investigación es estrictamente voluntaria y la información que se recoja será confidencial. Las respuestas a los cuestionarios y entrevistas serán anónimas y quedarán custodiadas mediante usuario y clave por la doctoranda. Las sesiones quedarán grabadas en formato video para su posterior análisis, al igual que fotografías de las diferentes tareas que se realicen en los talleres. Para las entrevistas, se utilizará una grabadora de voz para su posterior análisis. Todo el material audiovisual se guardará de forma confidencial como prueba documental del centro y de la investigación desarrollada en él. Servirá también como posible material didáctico con fines formativos y difusión de la investigación.

La recogida y tratamiento de los datos garantiza que no sea posible establecer de forma reversible el origen de las respuestas. Los cuestionarios en ningún caso recogen información que permitan identificar a la persona que responde al mismo o a un centro educativo concreto (ni de manera directa ni de manera reversible).

Para el análisis de las respuestas se utilizará los siguientes Software: editor de texto, hoja de cálculo Microsoft Excel365 (v.2510)., programa estadístico SPSS (v.26)

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede formular preguntas en cualquier momento durante su participación en él. Igualmente, puede retirarse del mismo si lo estima oportuno.

Cualquier información adicional o petición sobre el contenido y curso de la investigación puede ser solicitada a través de la dirección que se adjunta.

Nombre de la persona responsable de la investigación: Elena Sánchez González

Datos de contacto de la persona responsable de la investigación:
elena.sanchez.go@udima.es

91 856 16 99 Ext. 3751

Consentimiento informado para mayores de edad

Título del estudio: *La formación de maestros en activo de Educación Infantil análisis y propuesta de mejora basada en el modelo Van Hiele para el desarrollo del sentido geométrico.*

Yo,____
_**(nombre y apellidos del participante en el estudio)** he leído la hoja de información sobre el estudio. La doctoranda **Elena Sánchez González** me ha informado sobre el estudio y he podido hacer todas las preguntas que he considerado sobre el estudio. He recibido respuestas satisfactorias a mis preguntas y comprendo que mi participación es voluntaria y que mis datos serán confidenciales. Así mismo, comprendo que puedo retirarme del estudio cuando quiera sin que ello conlleve ninguna repercusión. Comprendo que mis datos se van a usar con fines de analizar los datos para elaborar una tesis doctoral y presentar los resultados en comunicaciones en congresos y difusión en artículos en revistas indexadas de aspectos específicos del estudio y de datos de un periodo concreto de recogida.

Presto libremente mi conformidad para participar en el estudio.

Fecha:

Firma del/de la participante Firma de la doctoranda

Autorización de imágenes

Autorización relativa al alumnado: uso de imagen y voz (MAYORES DE EDAD)

Nombre y apellidos de la doctoranda que realiza el estudio: Elena Sánchez González

Dado que el derecho a la propia imagen está reconocido en el artículo 18.1 de la Constitución española y está regulado por la Ley Orgánica 1/1982, de 5 de mayo, sobre el derecho al honor, a la intimidad personal y familiar y a la propia imagen, el investigador/a pide el consentimiento al participante para poder publicar fotografías y vídeos, relacionados con la tesis doctoral y, únicamente, para la difusión de la misma, donde aparezca y sea claramente identificable, o bien para hacer grabaciones sonoras.

Nombre y apellidos del/de la participante:

____

DNI/NIE/Pasaporte:

____

Autorizo la captación, la reproducción y la difusión de mi imagen y voz a través de fotografías, vídeos y grabaciones sonoras, para que pueda ser utilizada con las finalidades de investigación establecidas en la Tesis Doctoral del estudiante.

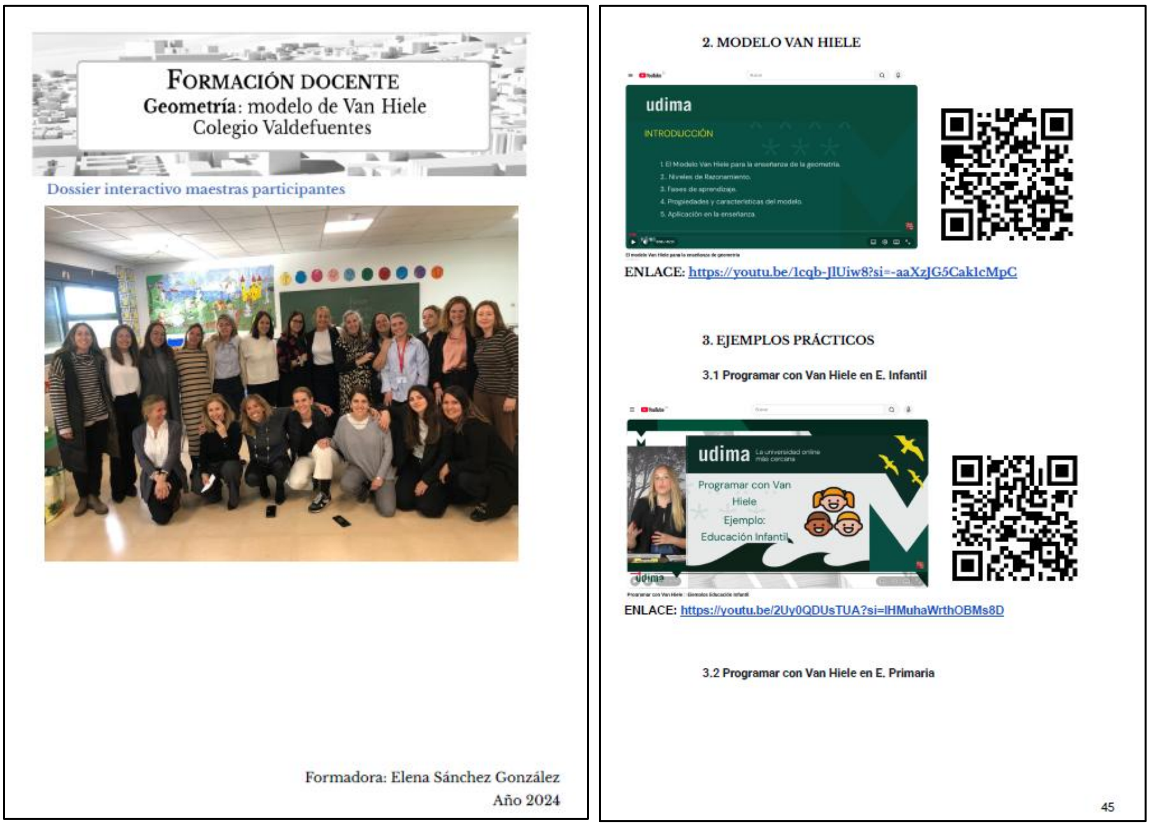
Autorizo la captación, la reproducción y la difusión de mi imagen y voz a través de fotografías, vídeos y grabaciones sonoras, para que pueda ser utilizada con finalidades docentes y de divulgación académica.

Lugar y fecha   Firma del/de la participante

Anexo V: Dossier interactivo para las maestras

Figura 76

Extractos Dossier interactivo maestras



Nota. enlace al dossier: https://drive.google.com/file/d/1Ym8_51JMT7bJxWtuSJXzr-jBfPfuvJFB/view?usp=sharing.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof en el año 1956 80
Figura 2 Pierre Van Hiele en el año 2005 81
Figura 3 Propiedad recursiva de los niveles 92
Figura 4 Mapa conceptual de Modelo de razonamiento geométrico Van Hiele 98
Figura 5 Cronograma de la investigación en el centro educativo 139
Figura 6 Actividad 1: Recordando los tipos de líneas 199
Figura 7 Maestras debatiendo sobre qué elementos se consideran polígonos 200
Figura 8 Disposición del material tridimensional 200
Figura 9 Actividad 2: Definiendo los tipos de líneas 202
Figura 10 Plantilla actividad 3 203
Figura 11 Plantilla actividad 4 203
Figura 12 Maestras debatiendo sobre la agrupación de polígonos 204
Figura 13 Maestras analizando la simetría de figuras bidimensionales regulares 204
Figura 14 Maestras clasificando figuras bidimensionales 205
Figura 15 Maestras realizando la actividad 11 206
Figura 16 Maestra analizando un cuerpo de revolución 207
Figura 17 Maestras utilizando el Geoplano 209
Figura 18 Plantilla actividad 14 210
Figura 19 Maestras analizando los triángulos y su simetría 211
Figura 20 Investigadora realizando la explicación de la actividad 13 212
Figura 21 Resultado final del cuadro de doble entrada: clasificación de los triángulos 212
Figura 22 Maestra analizando los cuadriláteros 213
Figura 23 Maestras realizando la actividad 21 214
Figura 24 Maestras realizando la segunda parte de la actividad 21 214
Figura 25 Plantilla cartón actividad 6:Bingo geométrico 216
Figura 26 Maestras realizando la actividad 7 217
Figura 27 Maestras realizando la actividad 16 217
Figura 28 Maestras realizando la actividad 17 218
Figura 29 Maestras componiendo figuras con Pattern Blocks 219
Figura 30 Clasificación final de los cuerpos geométricos 220
Figura 31 Maestras realizando la actividad 23 220
Figura 32 Imagen de la maestra ganadora de la actividad Kahoot 223
Figura 33 Maestras realizando la actividad 18 223
Figura 34 Maestra doblando la imagen para comprobar el ángulo del triángulo 224
Figura 35 Maestras realizando la actividad 29 225
Figura 36 Imagen de la primera diapositiva de la actividad 30 225
Figura 37 Maestras realizando las pruebas geométricas iniciales 228
Figura 38 Maestras en equipos manipulando los Geoplanos 231
Figura 39 Maestras realizando la actividad 9 233
Figura 40 Maestras rodeando las figuras que consideran polígonos 233
Figura 41 Maestras clasificando los cuerpos geométricos 240
Figura 42 Maestras teselando 242
Figura 43 Maestras realizando la actividad 24 242
Figura 44 Investigadora/instructora explicando la clasificación de los cuerpos geométricos 245
Figura 45 Material de la actividad 23 246

Figura 46 Desarrollo y avance de los conceptos de las dimensiones geométricas que surgen durante la formación. 258
Figura 47 Edad de las maestras participantes 262
Figura 48 Años de experiencia en aula de las maestras participantes 263
Figura 49 Imágenes del Curso de Verano 2024:” Enseñar Geometría con materiales manipulativos bajo el modelo Van Hiele” 338
Figura 50 Grupo participante en el Taller “Enseñar geometría en Educación Infantil con materiales bajo el modelo Van Hiele con materiales manipulativos” 339
Figura 51 Imagen reseña UDIMA 341
Figura 52 Reseña Redacción UDIMA Media..343
Figura 53 Imagen del Cuestionario inicial...363
Figura 54 Imagen de la Escala de Actitudes hacia las Matemáticas- EAM 363
Figura 55 Imagen del grupo creado en la aplicación WhatsApp. 368
Figura 56 Captura de imagen del video utilizado 368
Figura 57 Investigadora dando la bienvenida a las maestras participantes 369
Figura 58 Maestras realizando la actividad 9 (2)...382
Figura 59 Maestras discutiendo sobre las figuras bidimensionales....................................385
Figura 60 Plantilla actividad 10 387
Figura 61 Mapa conceptual: los ángulos 389
Figura 62 Plantilla actividad 4 390
Figura 63 Maestra realizando la actividad 7 393
Figura 64 Maestras en la actividad del Bingo..395
Figura 65 Disposición del material tridimensional..397
Figura 66 Clasificación de los cuerpos geométricos 398
Figura 67 Clasificación de los cuerpos geométricos (2)...399
Figura 68 Clasificación de los cuerpos geométricos (3)...399
Figura 69 Plantilla actividad 11: Geoplano en papel 404
Figura 70 Maestras realizando nuevas opciones de cuadriláteros en el Geoplano 405
Figura 71 Maestras realizando la actividad 16 406
Figura 72 Maestras configurando las formas a través del material 409
Figura 73 Mapa conceptual de la clasificación de los cuerpos geométricos 412
Figura 74 Plantilla actividad 27 415
Figura 75 Imagen grupal con gran parte de las maestras participantes 419
Figura 76 Extractos Dossier interactivo maestras...447

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Focos de investigación en educación matemática infantil 42
Tabla 2 Dimensiones y descripción para la formación de maestras de Educación Infantil en matemáticas..62
Tabla 3 Ventajas y desventajas de la investigación descriptiva..110
Tabla 4 Variables Cuestionario: percepción del desarrollo del sentido geométrico..........119
Tabla 5 Factores e ítems “Escala de actitud hacia las matemáticas-EAM”.......................120
Tabla 6 Factores e ítems del cuestionario percepciones hacia la geometría......................123
Tabla 7 Esquema del diseño metodológico del estudio 138
Tabla 8 Formación previa de las maestras 143
Tabla 9 Instituciones universitarias de magisterio en las que se formaron las maestras participantes 143
Tabla 10 Actividades implementadas en la formación 146
Tabla 11 Actividades implementadas atendiendo a las dimensiones de la geometría y a las Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele 147
Tabla 12 Actividad 1. Recordando los tipos de líneas..148
Tabla 13 Actividad 9. ¿Qué era un polígono? 149
Tabla 14 Actividad 19. Descubriendo los cuerpos geométricos..150
Tabla 15 Actividad 2. Definiendo los tipos de líneas 152
Tabla 16 Actividad 10. Clasificando Polígonos 153
Tabla 17 Actividad 12. Doblado de papel: el círculo y óvalo..155
Tabla 18 Actividad 14. Analizando los cuadriláteros..156
Tabla 19 Actividad 20. Clasificando cuerpos geométricos..157
Tabla 20 Actividad 3. Descubriendo los ángulos 159
Tabla 21 Actividad 4. Ángulos y líneas en una misma imagen...160
Tabla 22 Actividad 5. Conociendo el Geoplano 162
Tabla 23 Actividad 11. Descubriendo los Cuadriláteros con Geoplanos 3x3 163
Tabla 24 Actividad 13. Adivina adivinanza, mi triángulo..165
Tabla 25 Actividad 15. Yo tengo, quién tiene 166
Tabla 26 Actividad 21. ¿Qué tienes? 168
Tabla 27 Actividad 25. Simetría triángulos 170
Tabla 28 Actividad 6. Bingo geométrico 172
Tabla 29 Actividad 7. Yo dibujo tu dibujo 173
Tabla 30 Actividad 16. Teselamos con Pattern Blocks 175
Tabla 31 Actividad 17. Hundir la Forma 176
Tabla 32 Actividad 22. Cuadro de doble entrada..178
Tabla 33 Actividad 23. ¿Quién es quién? Geométrico 179
Tabla 34 Actividad 24. Formando Formas 181
Tabla 35 Actividad 26. Diagonal y simetría de los cuadriláteros 182
Tabla 36 Actividad 27. Sumando ángulos 184
Tabla 37 Actividad 28. Descubriendo propiedades redondas..185
Tabla 38 Actividad 29. Completando bi-información 187
Tabla 39 Actividad 8. Kahoot...188
Tabla 40 Actividad 18. Artistas matemáticos 189
Tabla 41 Actividad 30. Concurso final 191
Tabla 42 Número de actividades atendiendo a las Fases de Aprendizaje..........................197
Tabla 43 Número de actividades por dimensión...248
Tabla 44 Niveles alcanzados en las distintas dimensiones 261

Tabla 45 Respuestas ítem: Percepción sobre sus propios conocimientos...........................265
Tabla 46 Resultados del Factor Ansiedad hacia las matemáticas......................................266
Tabla 47 Resultados del Factor agrado hacia las matemáticas 268
Tabla 48 Resultados del Factor de utilidad de las matemáticas..269
Tabla 49 Resultados del Factor motivación hacia las matemáticas. 270
Tabla 50 Resultados del Factor confianza hacia las matemáticas 271
Tabla 51 Percentiles obtenidos en la escala de Auzmendi...272
Tabla 52 Tipo de agrupamiento 277
Tabla 53 Medios y Materiales Didácticos por sesión 279
Tabla 54 Análisis transversal de las percepciones de las maestras en relación con los materiales empleados y observaciones de la investigadora 280
Tabla 55 Cuadro resumen de las preguntas de investigación, objetivos y expectativas.....295
Tabla 56 Dirección de TFG por parte de la investigadora...342
Tabla 57 Factores e ítems escala "Actitud hacia las matemáticas-EAM" 364
Tabla 58 Descriptores del modelo Van Hiele 366
Tabla 59 Cronograma de las actividades llevadas a cabo en cada una de las sesiones correspondientes a las Fases de Aprendizaje del modelo Van Hiele..................................367
Tabla 60 Orden de implementación de las actividades en las sesiones 3 y 4 378
Tabla 61 Orden de implementación de las actividades en las sesiones 5 y 6 396
Tabla 62 Orden de implementación de las actividades en las sesiones 7 y 8 411